序

尚强同志编演梁绍鸿《初等数学复习及研究（平面几何）》题解，功既竣，索"序"于余。尚同志素嗜几何，1979年经友人介绍认识他，时年十七，已将梁编平几习题解之大半，余始为之改稿。尚入高校后，复请有关人士，对《平几题解》，考核参正。1984年余和他合编的《平面几何一题多解》即将由安徽教育出版社出版。

余在高校讲授课程，实以初等数学研究为主，梁编平几曾为余应用之教材。几何一课对训练学生逻辑思维能力，认识空间形式与数量关系，进一步学习有关课程，为四化建设甚为必要。而梁编平几有如下特点：

1．教材完备，影响深远，在初等几何中较为完备；

2．论证严密，尤注重证题技巧；

3．对门近世几何有沟通的渠道；

4．习题配备恰当，一般习题注意于定理的掌握，每章复习题则注意综合运用，总复习题难度大、综合性强。习题较多，便于选择。

然题繁多亦有不便之处，即学生偶问一题，教师事先若未演习，临时可能不得其解。因梁编平几为高师数学系师生和中学数学教师常用之书，故将其《题解》出版，教师得之可省演习之劳，学生得之可获印证之乐。

校者因忙，未能深入，错误浅薄之处在所难免，希望海内贤达不吝赐教是为至幸。

李梦樵

1985.12.20

目　　录

（上　册）

第一章　中学平面几何复习

习　题　二……………………………………（ 1 ）

习　题　三……………………………………（ 7 ）

习　题　四……………………………………（ 15 ）

习　题　五……………………………………（ 28 ）

复　习　题　一………………………………（ 34 ）

第二章　推证通法

习　题　六……………………………………（ 56 ）

习　题　七……………………………………（ 56 ）

习　题　九……………………………………（ 59 ）

复　习　题　二………………………………（ 63 ）

第三章　证题术

习　题　十……………………………………（ 73 ）

习题十一……………………………………（80）
习题十二……………………………………（92）
习题十三……………………………………（101）
习题十四……………………………………（111）
习题十五……………………………………（130）
习题十六……………………………………（147）
习题十七……………………………………（170）
习题十八……………………………………（194）
复习题三……………………………………（210）

第四章 轨迹

习题二十……………………………………（282）
习题二十一…………………………………（291）
习题二十二…………………………………（311）
习题二十三…………………………………（333）
复习题四……………………………………（354）

第一章　中学平面几何复习

习　题　二

3. 两三角形若一边的高及另两边对应相等，试问它们是否全等？为什么？

答：不必全等。

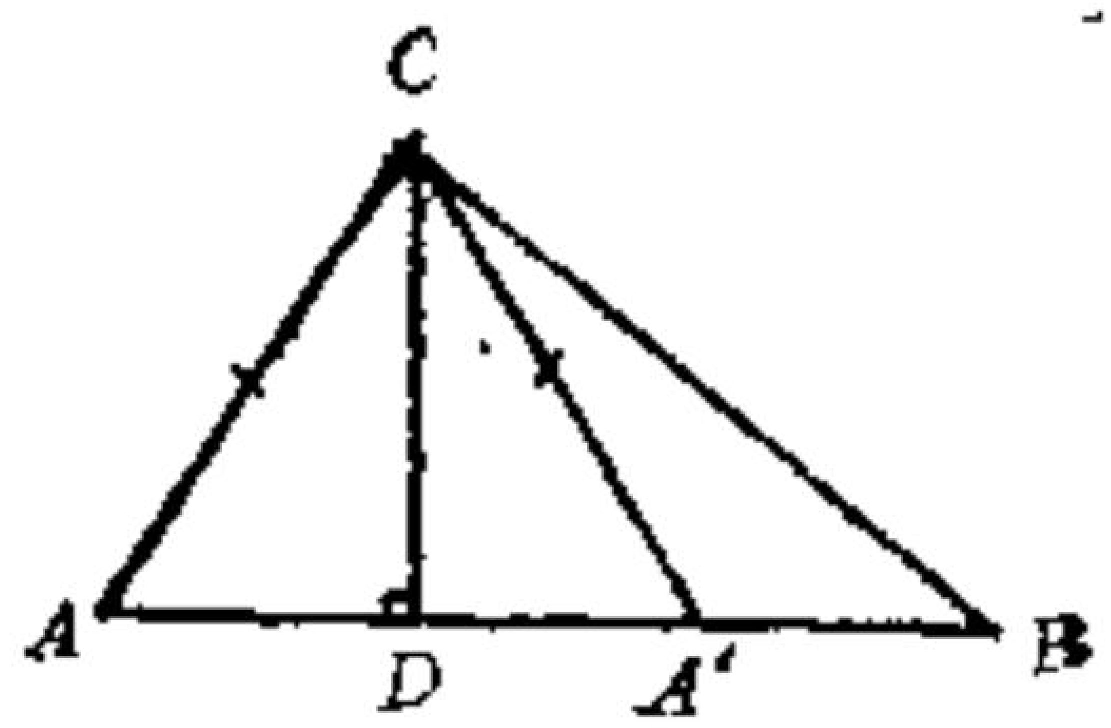


图2—3

4. 有两中线相等的三角形必是等腰的。

提要：(1)$EFDB$为平行四边形；

(2)$\triangle BCE \cong \triangle CBF$.

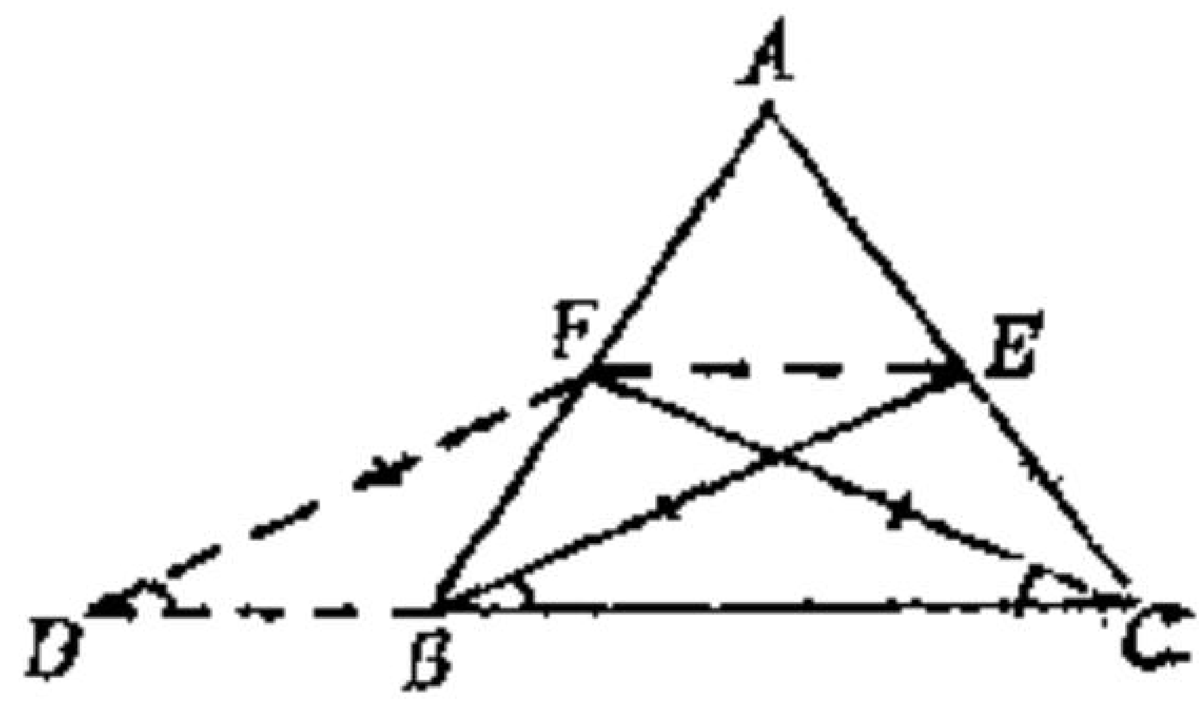


图2—4

5. 有两高相等的三角形必是等腰的。

提要：$\triangle BCE \cong \triangle CBF$.

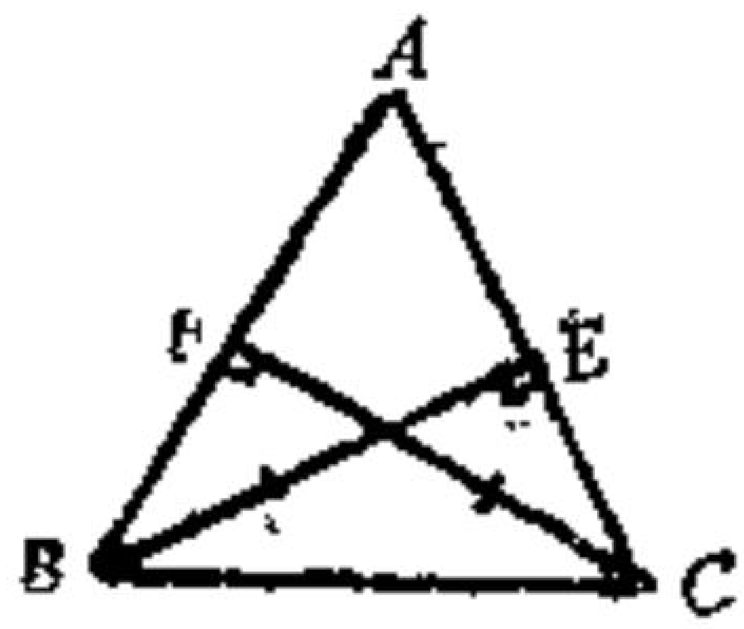


图2—5

6. 在$\angle xOy$的边Ox及Oy上各取两点A、B及C、D，使$OA=OC$且$BO=OD$. 连AD与BC设交于E，求证

OE平分$\angle xOy$.

提要：$\triangle AOD\cong\triangle COB$；

$\triangle ECD\cong\triangle EAB$；

$\triangle EOA\cong\triangle EOC$.

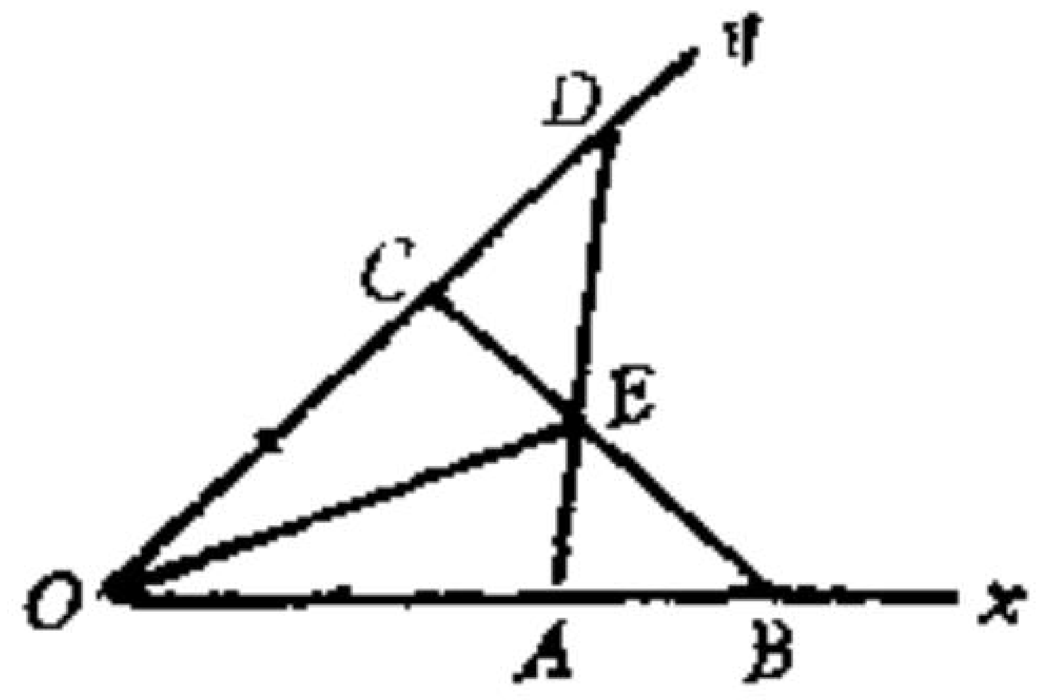


图2—6

7. 三角形的任一边都小于半周.

提要：由 $a+b>c$，有 $a+b+c>2c$.

8. 若一三角形中有一边等于另一边的二倍，则最短边的长介于周长六分之一与四分之一之间.

提要：(1)必有 $a>b$，故 b 为最短边；

(2) 令$\triangle ABC$ 的周长为 l，

$\because\quad l=AB+BC+CA=3AC+BC$

$=3b+a$,

$\therefore\quad a=l-3b$;

又　$AB-AC<BC<AB+AC$,

即　$AC<BC<3AC$，故有　$b<l-3b<3b$.

$\therefore\quad l/6<b<l/4$.

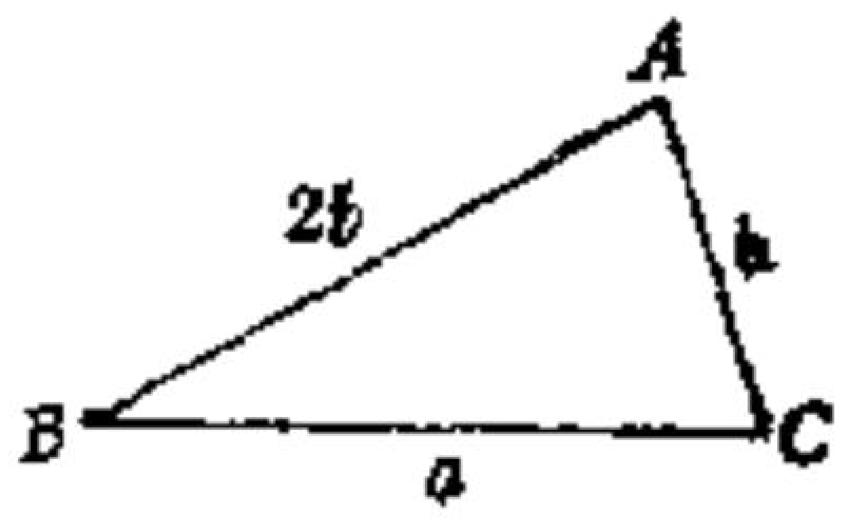


图2—8

9. 三角形任一边的中线，小于其它两边的和，而大于它们的半差.

提要：作 $MN\parallel CA$，有

$AM>AN-MN=(AB-AC)/2$；

又 $AM<AN+MN=(AB+AC)/2$.

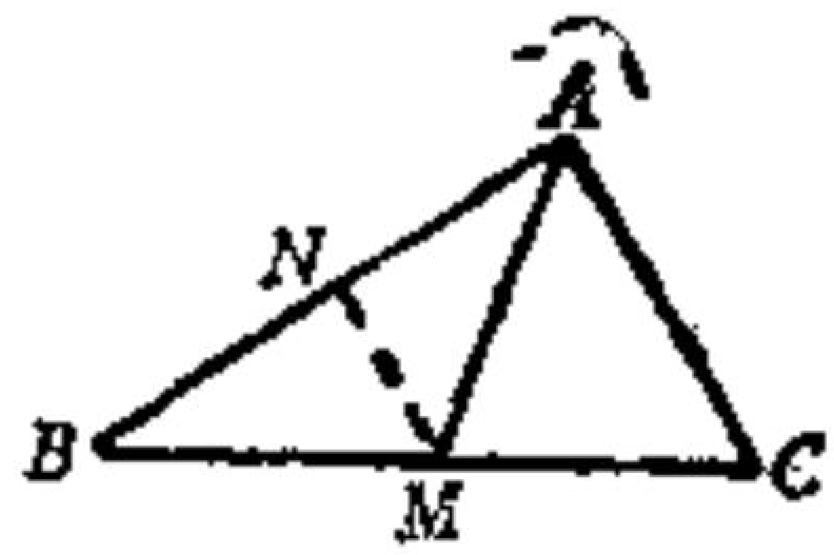


图2—9

10. 设在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，D是BC的中点.求证$\angle ADB>\angle ADC$ 且 $\angle BAD<\angle CAD$.

提要：延长 AD 至 E，则 $ABEC$为平行四边形. 且 $AB>BE$

$\therefore\quad\angle AEB>\angle EAB$. 即$\angle BAD<\angle CAD$.

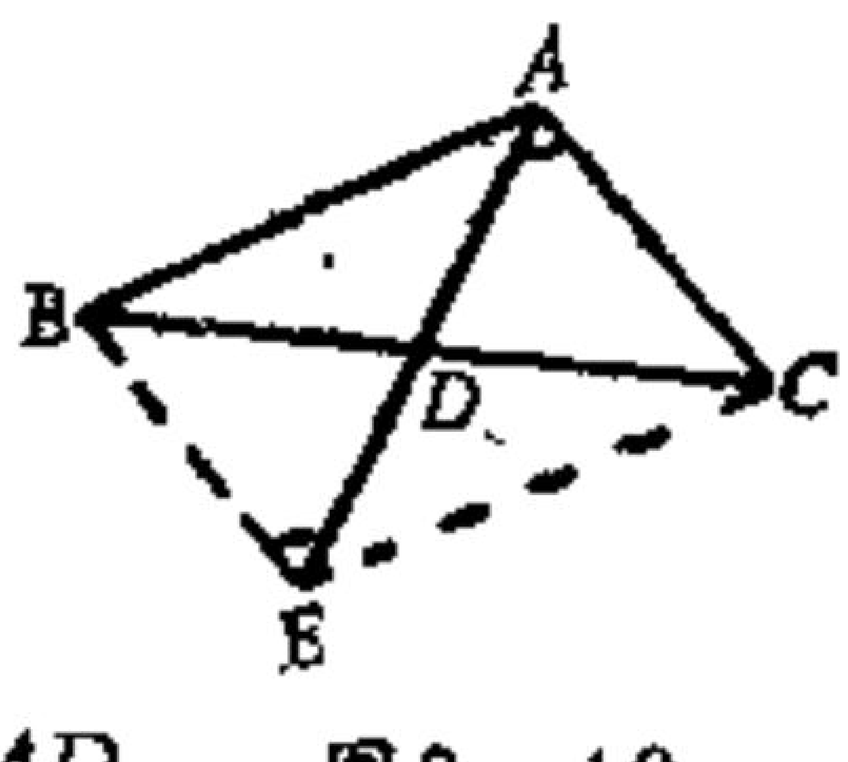


图2—10

又 $\angle C>\angle B$ ∴ $\angle C+\angle CAD>\angle B+\angle BAD$

即$\angle ADB>\angle ADC$.

11. 三角形任一角的平分线，不大于对边的中线。

提要：(1) 当$\triangle ABC$是等腰三角形时，$AD=AM$；

(2) 若$AB>AC$，由上题有$\angle BAM<\angle CAM$，故$\angle BAC$的分角线AD交BC边于MC的内部一点D.

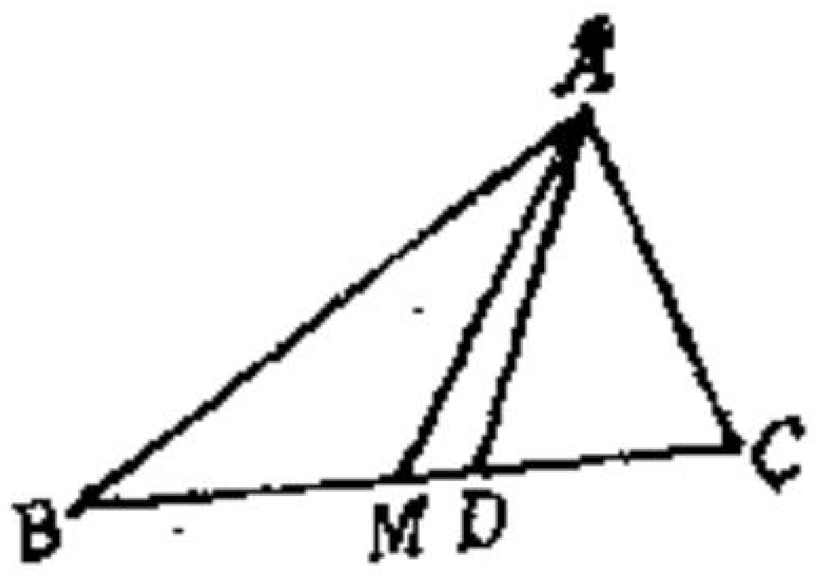


图2—11

∵ $\angle B+\angle BAM<\angle C+\angle CAD$,

∴ $\angle AMD<\angle ADM$. 故 $AD\leqslant AM$.

12. 设在$\triangle ABC$中，A角的平分线交BC边于D，求证：(1) $AB>BD$且$AC>CD$；

(2) 若$AB>AC$，则$BD>CD$.

提要：(1) 由$\angle ADB>\angle DAC=\angle DAB$得$AB>BD$；同理，$AC>CD$.

(2) 作BC上的中线AM，若$AB>AC$。如上题所述，D在MC内部，故$BD>CD$.（或用角平分线定理）

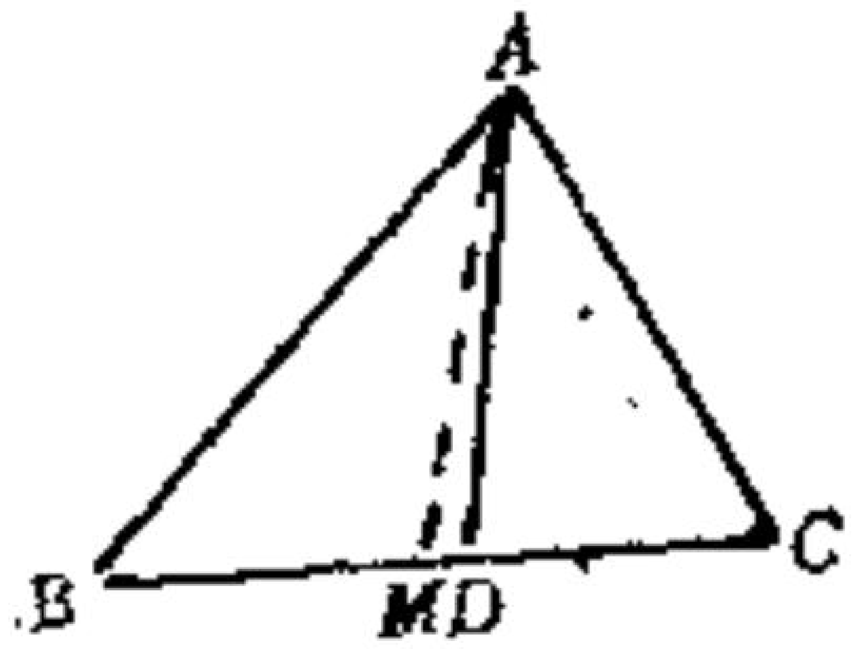


图2—12

13. 设P是$\triangle ABC$内部的任一点，求证：

(1) $\angle BPC>\angle BAC$；

(2) $\frac{1}{2}(BC+CA+AB)<PA+PB+PC$
$<BC+CA+AB$.

提要：(1) $\angle BPD+\angle CPD$

$>\angle BAP+\angle CAP$；

(2) 由 $(PA+PB)+(PB+PC)+(PC+PA)>AB+BC+CA$，得 $PA+PB+PC>(BC+CA+AB)/2$；

由 $(PB+PC)+(PC+PA)+(PA+PB)<(AB+AC)+(BC+BA)+(CA+AB)$，得 $PA+PB+PC<AB+BC+CA$。

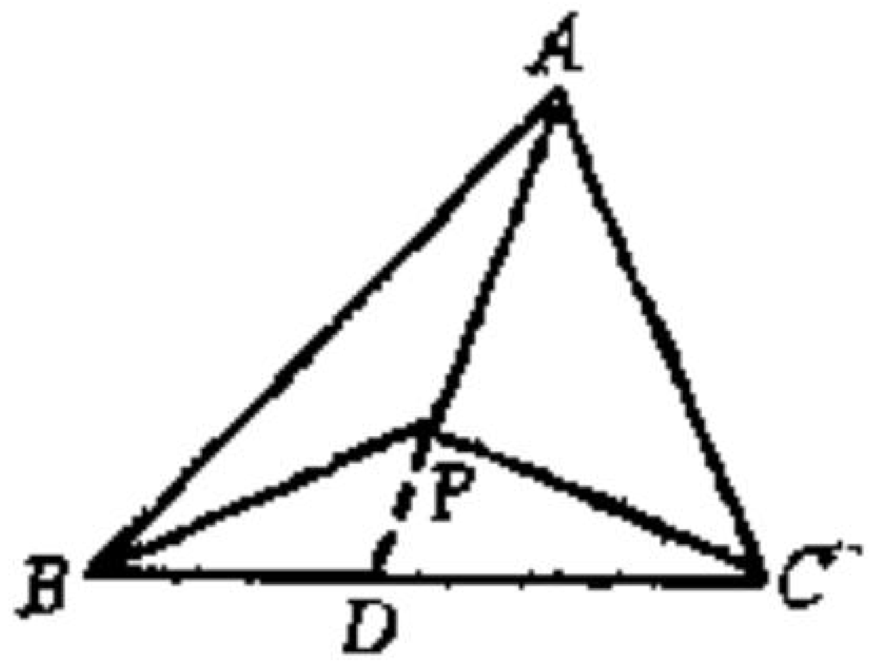


图2—13

14．自等腰三角形底边上任一点引两腰的平行线与两腰交成平行四边形，求证这样的平行四边形有一定的周长．

提要：由 $MB=MP$，$NP=NC$，得平行四边形的周长为定长

$AB+AC$。

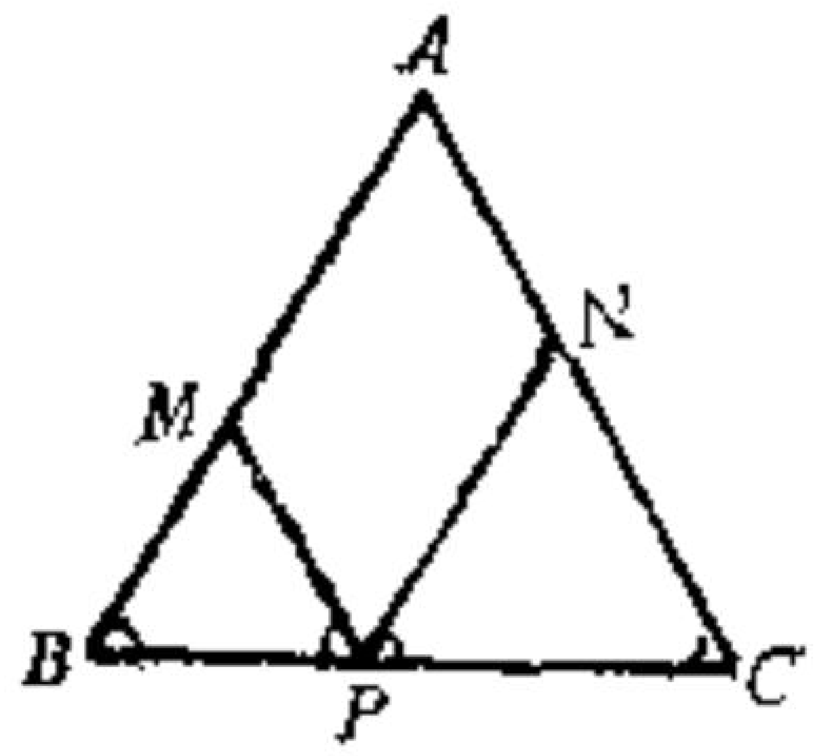


图2—14

15．求证顺次连结四边形各边的中点，必成一个平行四边形．

提要，$EF \mathrel{\underline{\parallel}} HG=AC/2$.

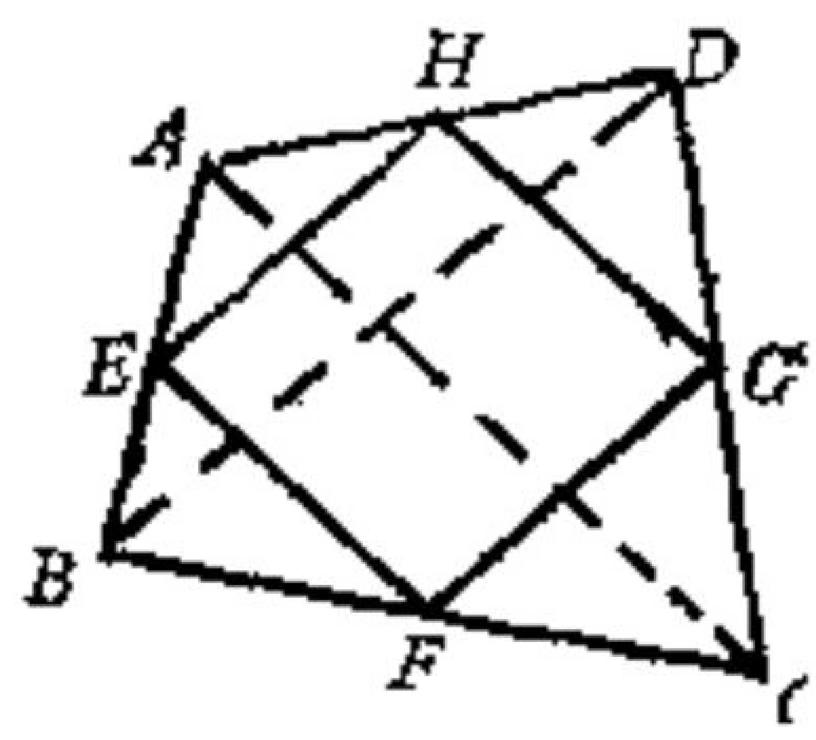


图2—15

16．若四边形的两对角线互相垂直，则对边中点的连结线彼此相等．

提要，由上题知，$EFGH$ 为矩形．

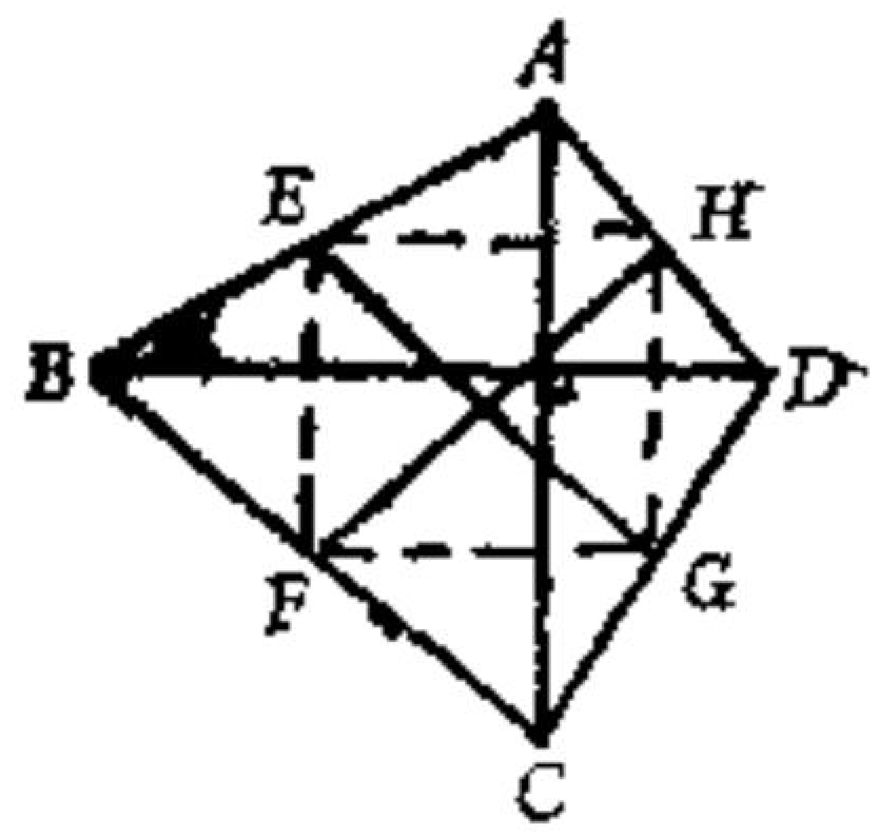


图2—16

17. 求证梯形的两腰中点及两对角线的中点同在一直线上.

提要：$PN \parallel BC \parallel MN \parallel AD \parallel QN$.

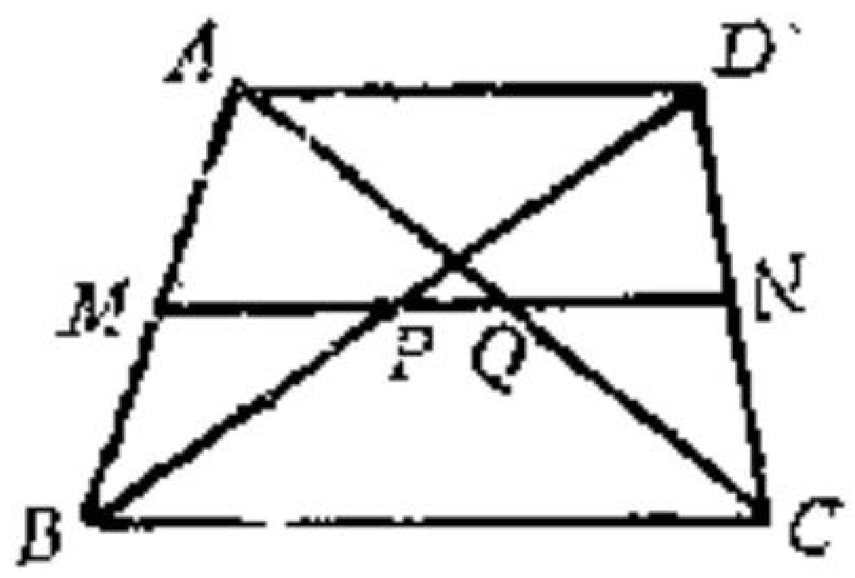


图2—17

18. 设G是$\triangle ABC$的重心，延长BG、CG至E、F，使$GE=2BG$且$GF=2CG$，求证E、A、F三点共线.

提要：$ME=GE-GM=4GM-GM=3GM=BM$.

$\therefore$ $ABCE$为平行四边形.

故 $BC \parallel AE$，同理，$BC \parallel AF$.

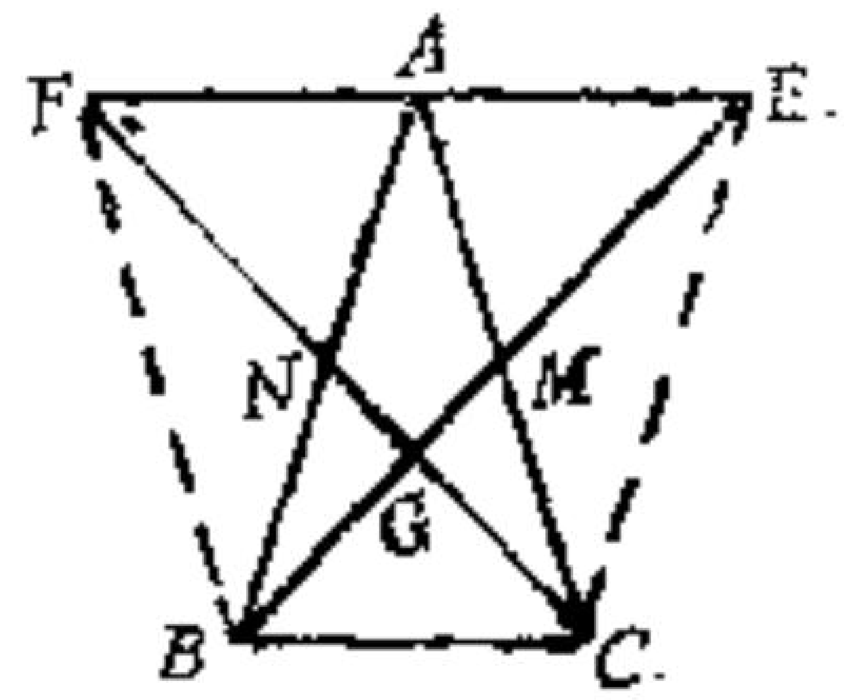


图2—18

19. 设O是正三角形$\triangle ABC$的中心，求证BO与CO的中垂线必三等分BC边.

提要：BN、CM是正$\triangle ABC$的中线

$\therefore$ $BG=BN/3$，而$GE \parallel AC$，

$\therefore$ $BE=BC/3$.

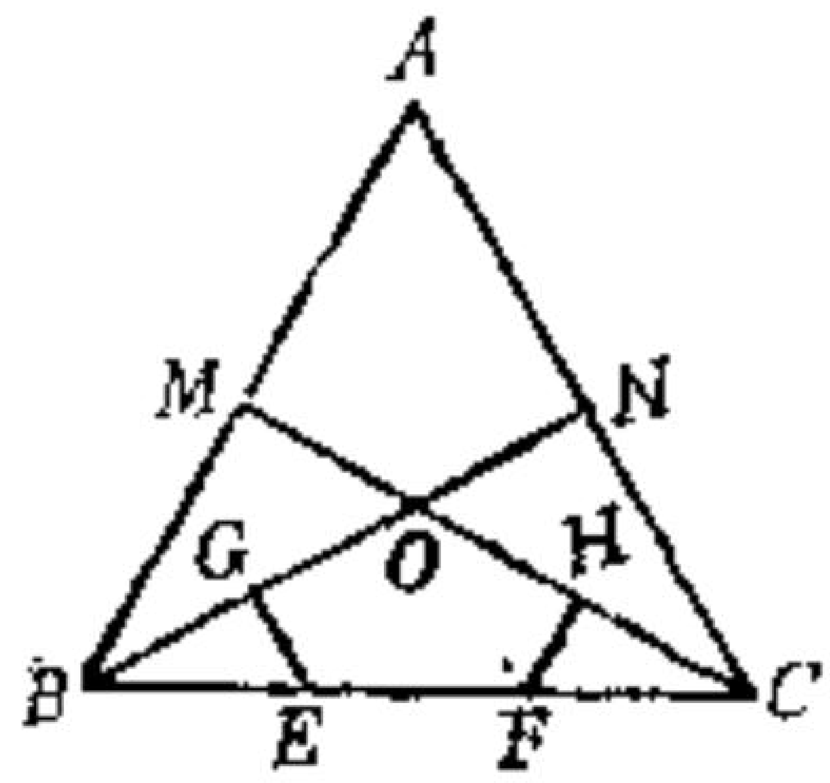


图2—19

20. 设I是$\triangle ABC$的内心，过I引线平行于BC而交AB、AC于E、F，求证 $EF=BE+CF$.

提要：$BE=EI$，$IF=CF$.

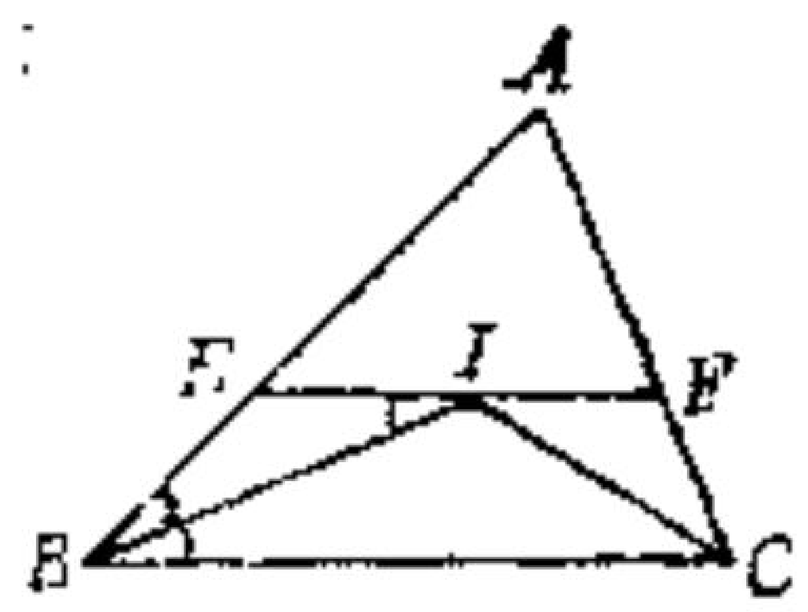


图2—20

21. 设I、I_1、I_2、I_3依次是$\triangle ABC$的内心及对着A、B、C的旁心，求证：

(1) $\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$;

(2) $\angle BI_1C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$;

(3) $\angle BI_2C=\angle BI_3C=\frac{1}{2}\angle A$.

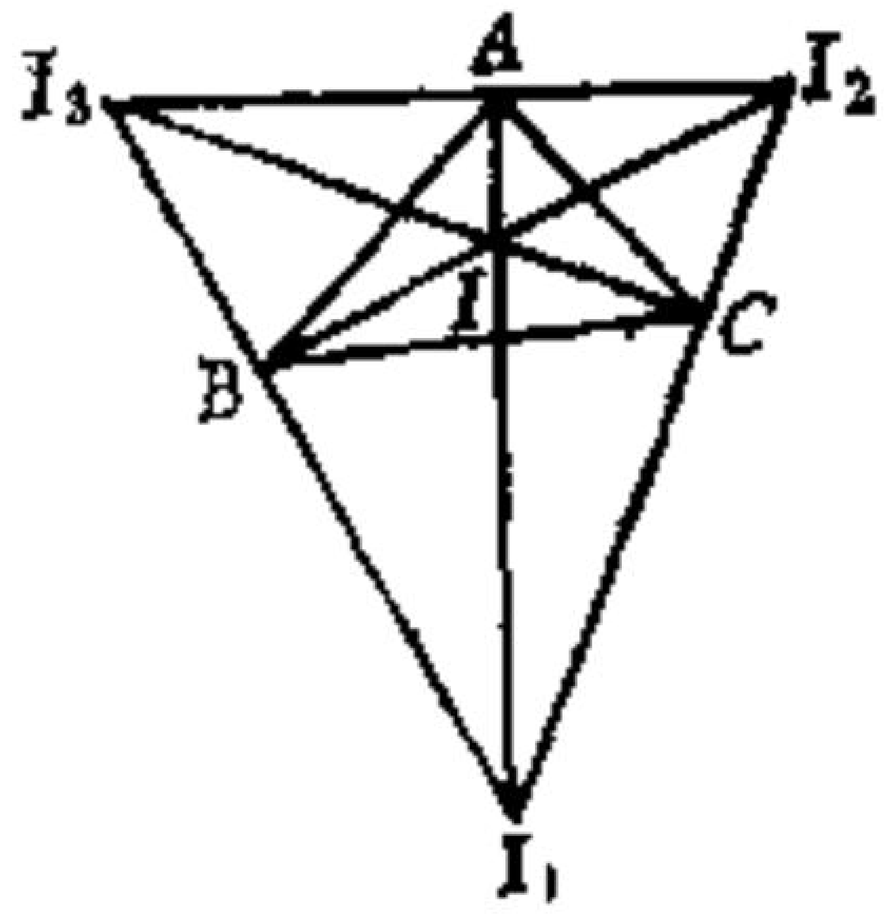


图2—21

提要：(1) $\angle BIC=(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A)+(\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle A)$
$=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$;

(2) $\angle BI_1C=180^\circ-\angle BIC$
$=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$.

(3) $\angle BI_2C=90^\circ-\angle BI_1C=\frac{1}{2}\angle A$.

22. 设O是$\triangle ABC$的外心，求证$\angle BOC$等于$2\angle A$或等于$360^\circ-2\angle A$.

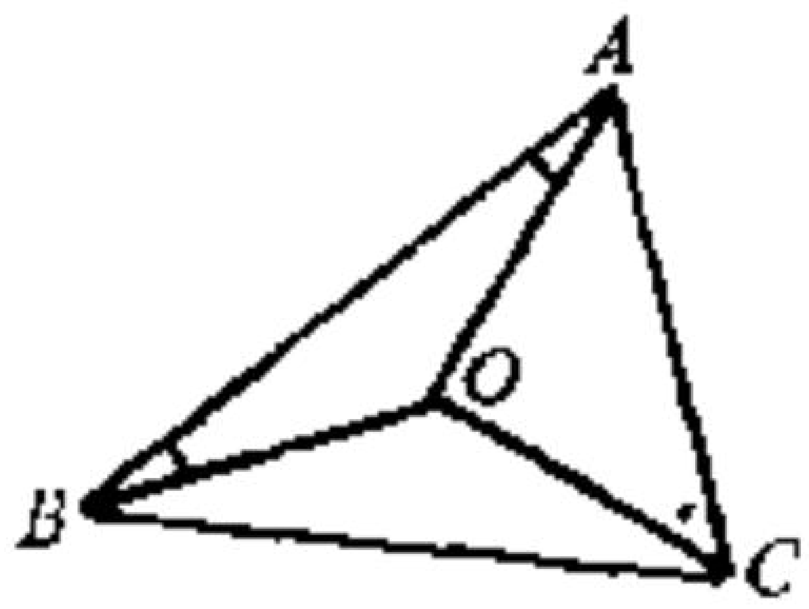


图2—22(a)

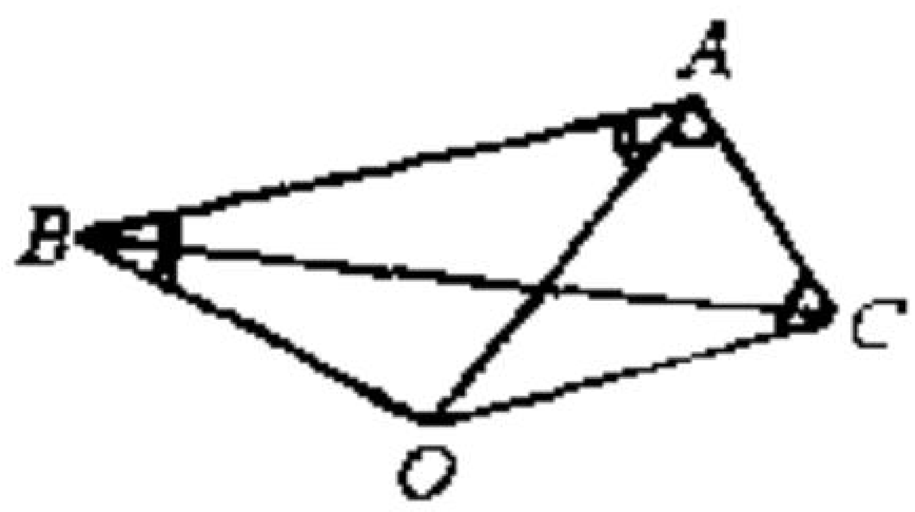


图2—22(b)

提要：(1) 当$\angle A$是锐角时

$\angle BOC=180^\circ-(\angle OBC+\angle OCB)$
$=180^\circ-[180^\circ-(\angle OBA+\angle OCA+\angle A)]$
$=2\angle A$.

(2) 当$\angle A$为直角时，$\angle BOC=180^\circ=2\angle A$.

(3) 当$\angle A$为钝角时，

$\angle BOC=[180^\circ-(\angle OBA+\angle OAB)]+$
$+[180^\circ-(\angle OCA+\angle OAC)]=360^\circ-2\angle A$.

23．设H是$\triangle ABC$的垂心，求证$\angle BHC$等于$180°-\angle A$或等于$\angle A$.

提要：(1) 当$\angle A=90°$时，垂心H与A点重合，有$\angle BHC=\angle A$；

(2) 当$\triangle ABC$为非直角三角形时，

$\because$ $\angle BHC=\angle EHF$，而$\angle AEH=\angle AFH=$直角，$\therefore$ $\angle BHC=180°-\angle A$.

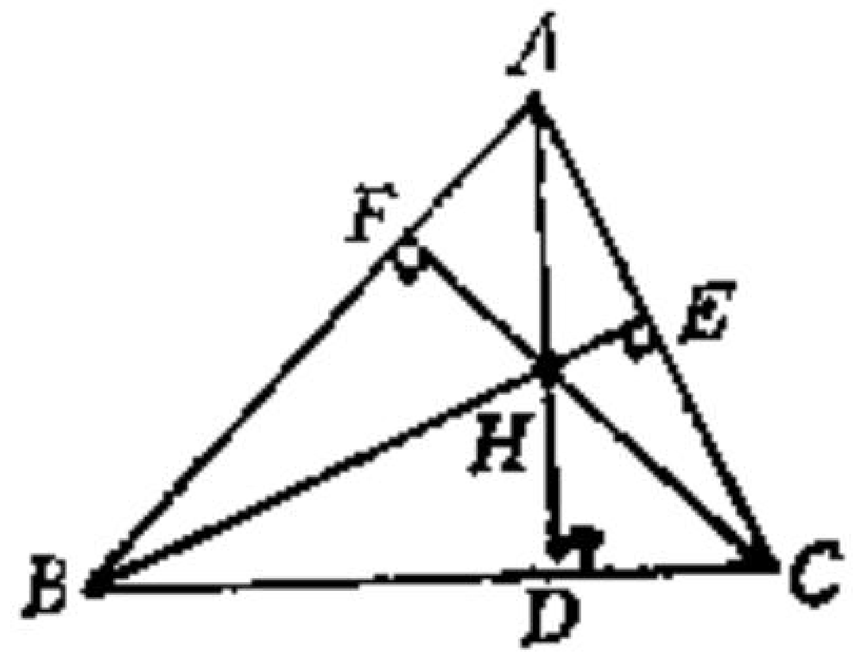


图2—23

24．设有四点，其中有一点是其余三点连成三角形的垂心，则其余三点都有同样的性质．

这样的四点合称为一垂心组．

提要：如上题图，设H是$\triangle ABC$的垂心

$\because$ $AH\perp BC$，$AB\perp CH$，$AC\perp BH$

$\therefore$ A为$\triangle HBC$的垂心．

习　题　三

1．一个线段的两端若在圆内，则整个线段全在圆内．

提要：$\because$ A、B在圆内，有$OA<\gamma$，$OB<\gamma$．作$OH\perp AB$于H，则$OH<OB<\gamma$，设$HB<HA$，P为AB上任一点，总有$HP<HA$，因而$OP<OA<\gamma$，$\therefore$ P点在圆内，故AB整个线段在圆内．

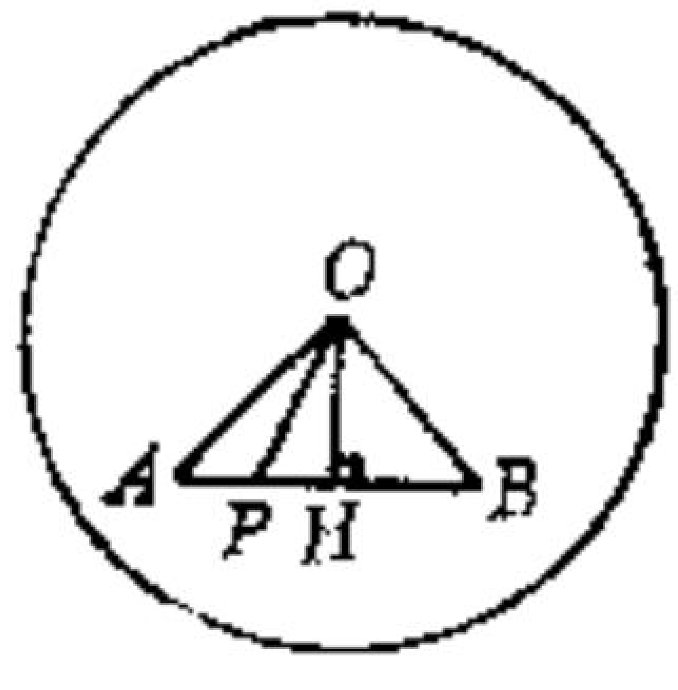


图3—1

2．设AB是$\odot O$的直径，P是半径OA上的点，C是

$\odot O$ 上任意点，求证 $PA\leqslant PC\leqslant PB$.

提要：由 $|CO-OP|\leqslant PC\leqslant PO+OC$，有 $AO-OP\leqslant PC\leqslant PO+OB$，

$\therefore$ $PA\leqslant PC\leqslant PB$.

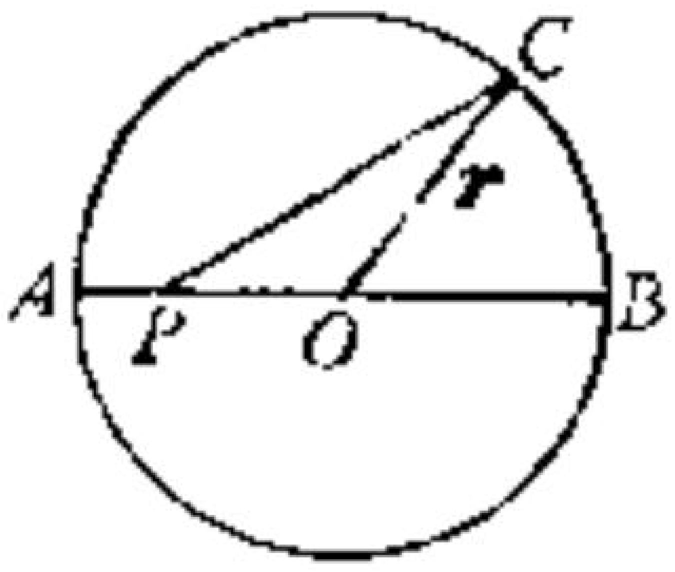


图3—2

3．设 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 外离，连心线 OO' 交 $\odot O$ 及 $\odot O'$ 于 A、B 及 C、D，四交点成 $\{ABCD\}$ 的顺序，今在 $\odot O$ 及 $\odot O'$ 上各任取一点 E 及 F，求证 $BC\leqslant EF\leqslant AD$.

提要：由定理10，

$$\begin{cases}EO+OO'+O'F\geqslant EF\\ OE+EF+FO'\geqslant OO'\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}AO+OO'+O'D\geqslant EF\\ EF\geqslant OO'-OB-O'C\end{cases}$$

$\Rightarrow AD\geqslant EF\geqslant BC$.

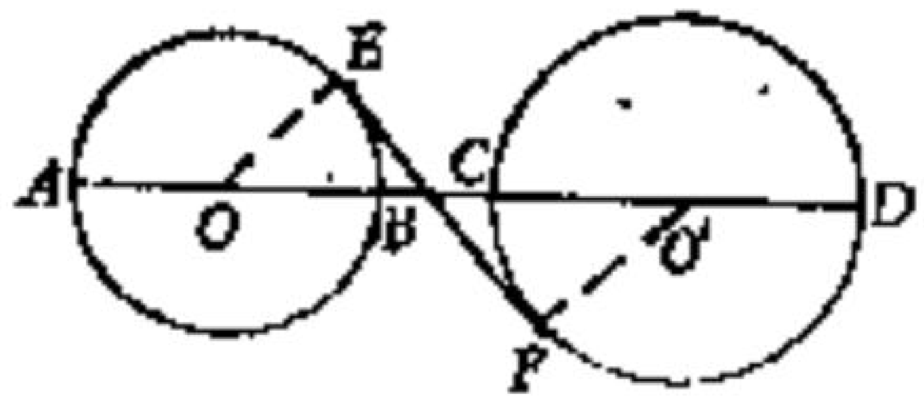


图3—3

4．设一直线上四点 A、B、C、D 排成 $\{ABCD\}$ 顺序，求证：

（1）直径各为 AB、CD 的两圆外离；

（2）直径各为 AC、BD 的两圆相交；

（3）直径各为 AD、BC 的两圆内含.

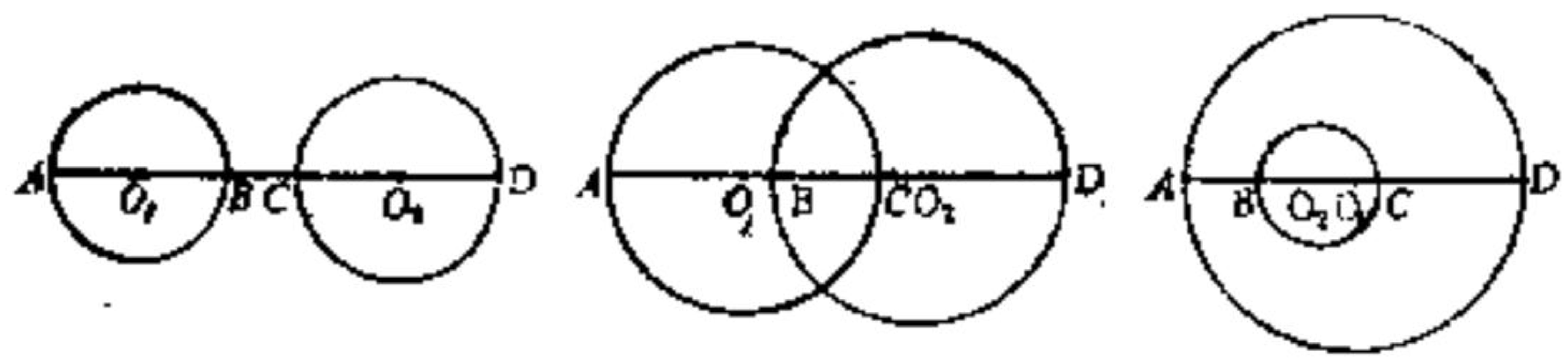


图3—4

提要 (1)：$O_1O_2>r_1+r_2$，　　相离

(2): $\gamma_1+\gamma_2=O_1C+O_2B>O_1B+BO_2=O_1O_2$;

$|\gamma_1-\gamma_2|=|O_1C-BO_2|<O_1O_2$.　　相交

(3): $|\gamma_1-\gamma_2|=O_1A-O_2B=AB+O_1O_2>O_1O_2$

内含.

5. 在圆上顺序取 A、B、C、D 四点，若 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{DA}$，则弦 $AC<BD$.

提要：∵ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}$ 大于半圆，

故 $\angle ADC$ 为钝角.

∵ $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}$，

∴ $\angle ADC>\angle DAB$，同理

$\angle ADC>\angle DCB$. 故有 $AC<BD$.

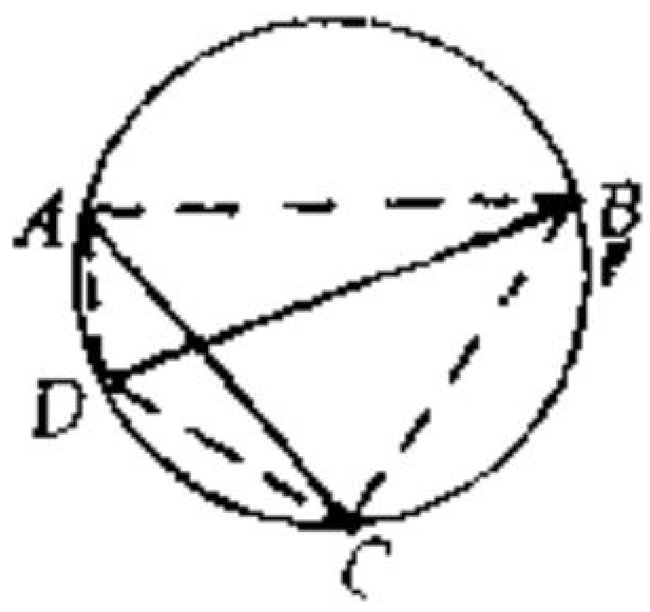


图3—5

7. 以等腰三角形的腰为直径所作的圆，必平分底边.

提要：

∵ $AD\perp BC$，　∴ $DB=DC$.

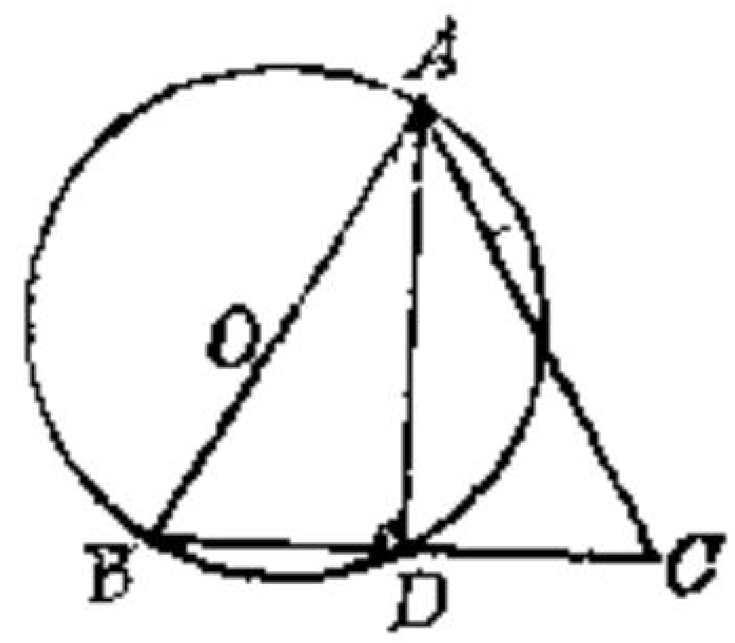


图3—7

8. 直角三角形的内切圆直径，等于勾股的和减去弦所得的差.

提要：

$2\gamma=CD+CE=CA+CB-AB$.

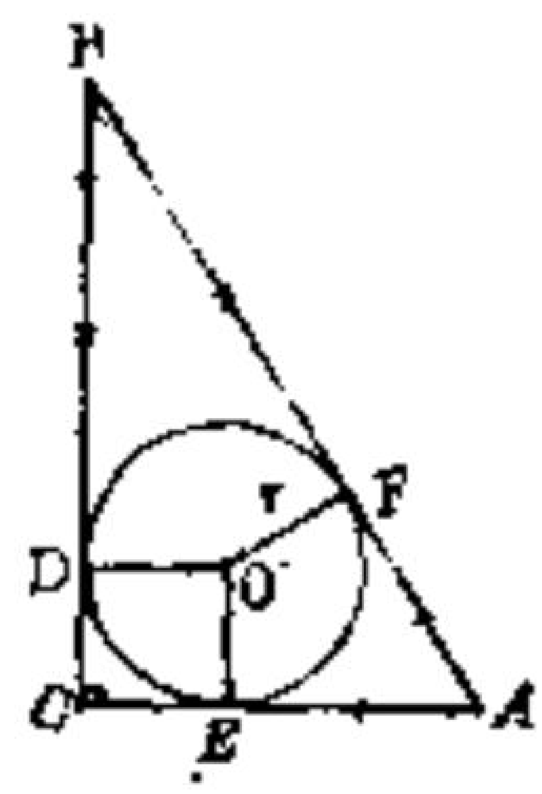


图3—8

9. 在半径为 γ 的圆中，有六个轮迴两两外切的等圆都

与原圆内切，试求这六圆的半径长，并证明这六圆同外切于另一个相等的圆．

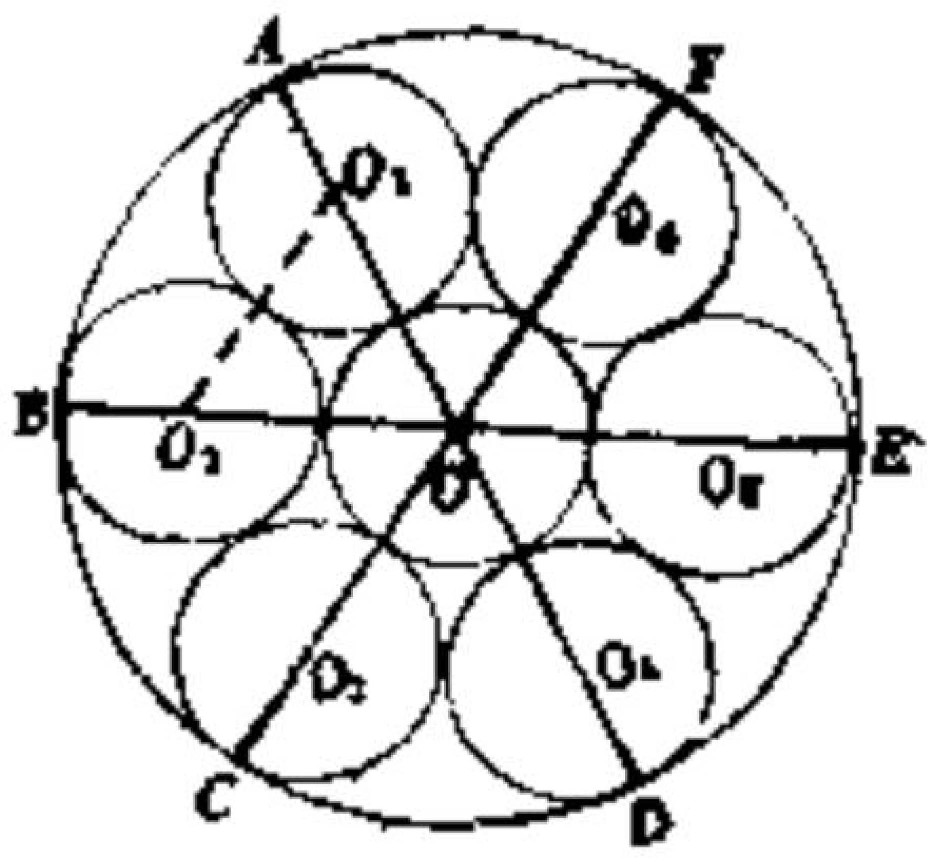


图3—9

提要：(1)设六等圆的半径为 x，

∵ $OO_1=OO_2=OO_3=\gamma-x$，

$O_1O_2=2x=O_2O_3$，

∴ $\triangle OO_1O_2\cong\triangle OO_2O_3$，可得 $\triangle OO_1O_2$ 为正三角形，有 $\gamma-x=2x$，

∴ $x=\gamma/3$．

(2)∵ $OO_i=\gamma-\gamma_i=2\gamma/3$，($i=1, 2, \cdots, 6$)，∴ $\odot O_i(\gamma/3)$与$\odot O(\gamma/3)$必外切．

10．自 P 点向 $\odot O$ 引切线 PA、PB，延长半径 OB 至 C，使 $BC=OB$，求证 $\angle APC=3\angle BPC$．

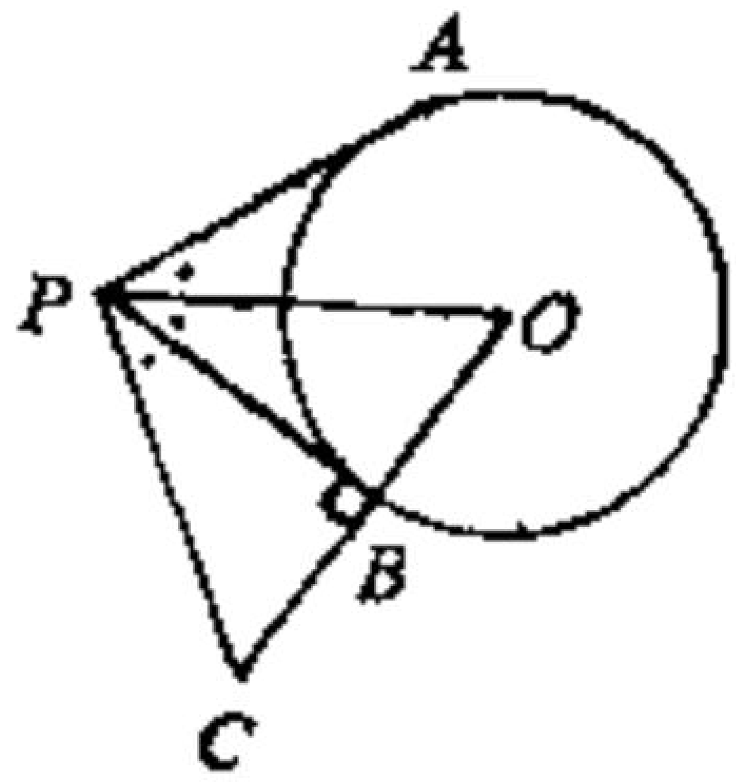


图3—10

提要：∵ $Rt\triangle PBC\cong Rt\triangle PBO$，

∴ $\angle CPB=\angle OPB=\angle OPA$．

11．AB 是 $\odot O$ 的直径，自 AB 的延长线上一点 C 引一割线，交 $\odot O$ 于 D、E，若 $CD=OA$，求证 $\angle ACE=\frac{1}{3}\angle AOE$．

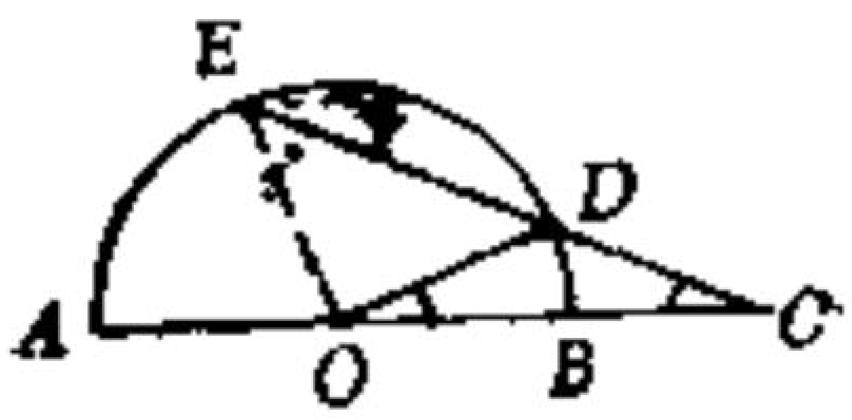


图3—11

提要：$\angle AOE=\angle E+\angle C$

$=3\angle C$．

12．设自两相交圆的一交圆点各引直径，则这两直径的他端与两圆的另一交点同在一直线上．

提要：$\angle PQA$、$\angle PQB$均为直角．

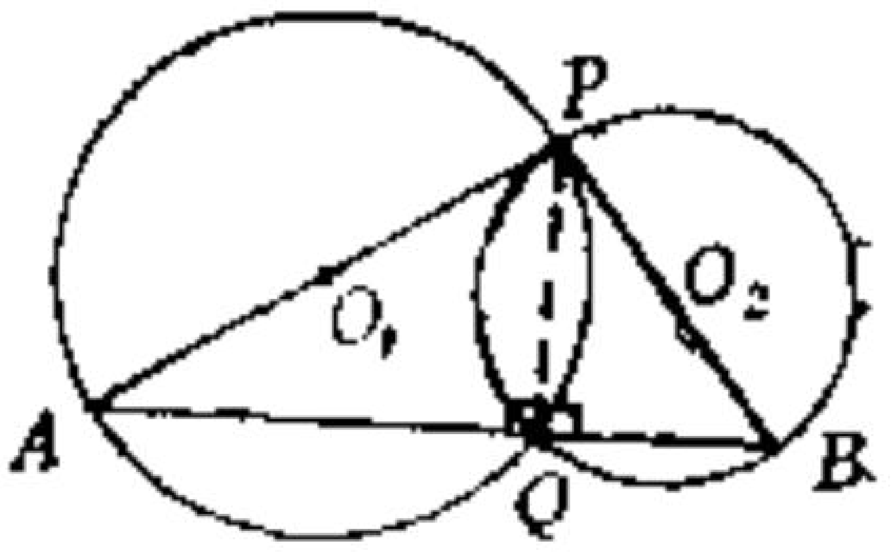


图3—12

13．圆中有两弦，过每弦的端点作本弦的垂线，求证所作四线交成的平行四边形的中心与圆心重合．

提要：AB、CD为圆中的两弦，$PQRS$为四线交成的平行四边形，过O作MN、IJ使分别垂直于PQ、RS与PS、QR，

$\because$ $CG=DH$，$AE=BF$，有$OM=ON$，$OI=OJ$，即点O与PQ、RS及PS、QR均等距离．$\therefore$ 圆心O为平行四边形$PQRS$的中心．

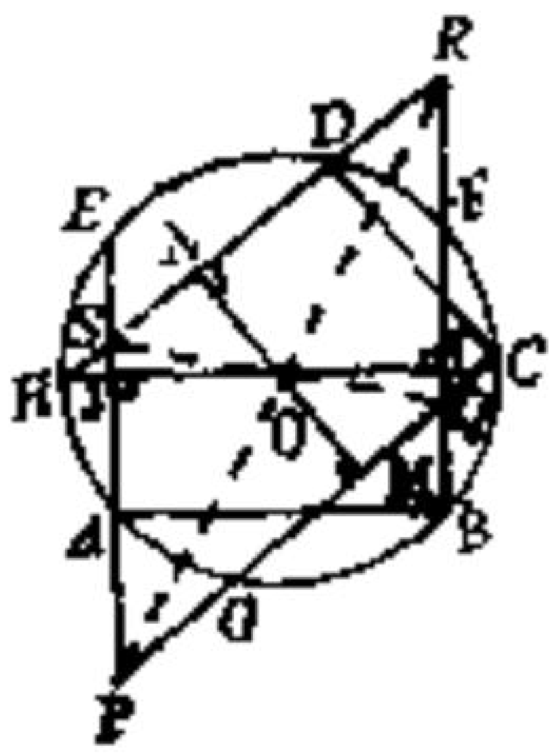


图3—13

14．设AB、CD是交于圆内且互相垂直的两弦，则$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$．反之，设$\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$，则$AB\perp CD$．

提要：(1)当$AB\perp CD$时，

$\angle EBC+\angle ECB=\angle EBD+\angle EDB=90°$，

$\therefore$ $\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}$．

(2)反之可得$AB\perp CD$．

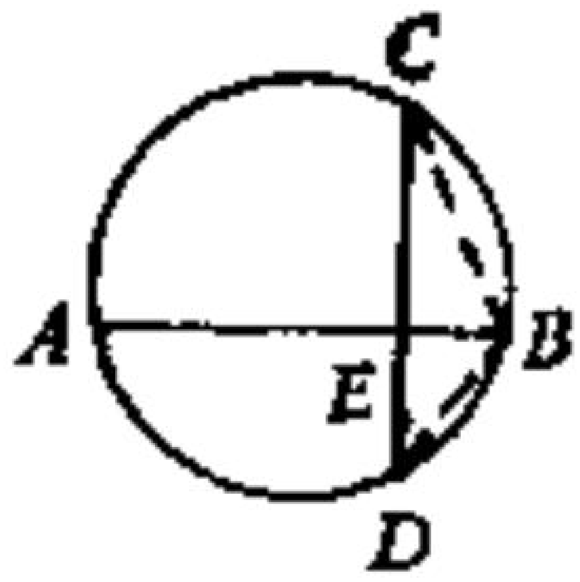


图3—14

15．从圆内挖去一个内接凸四边形，造成四个弓形，试证相对弓形的弧的中点连线互相垂直．

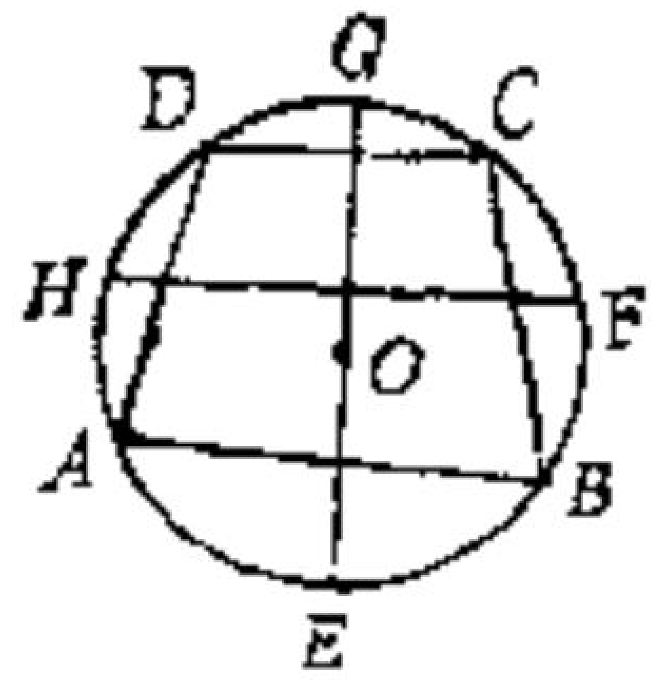


图3—15

提要：$\widehat{EH}+\widehat{FG}=\widehat{EF}+\widehat{GH}$.

16．从圆内挖去一个内接三角形，造成三个弓形，试证：连结它们的弧的中点所成三角形，以原三角形的内心为垂心．

提要：(1)设$\triangle ABC$为挖去的内接三角形，则AD、BE的交点I为$\triangle ABC$的内心．



图3—16

(2)$\because$ $\widehat{AF}+\widehat{DC}+\widehat{CE}=\widehat{FB}+\widehat{BD}+\widehat{AE}$

有$EF\perp AD$，可得I为$\triangle DEF$的垂心．

17．设两圆外切于T，一条外公切线切它们于A、B，求证：

$\angle ATB=90^\circ$．

提要：$\angle TAB+\angle TBA$

$$=\frac{1}{2}(\angle O_1+\angle O_2)=90^\circ.$$

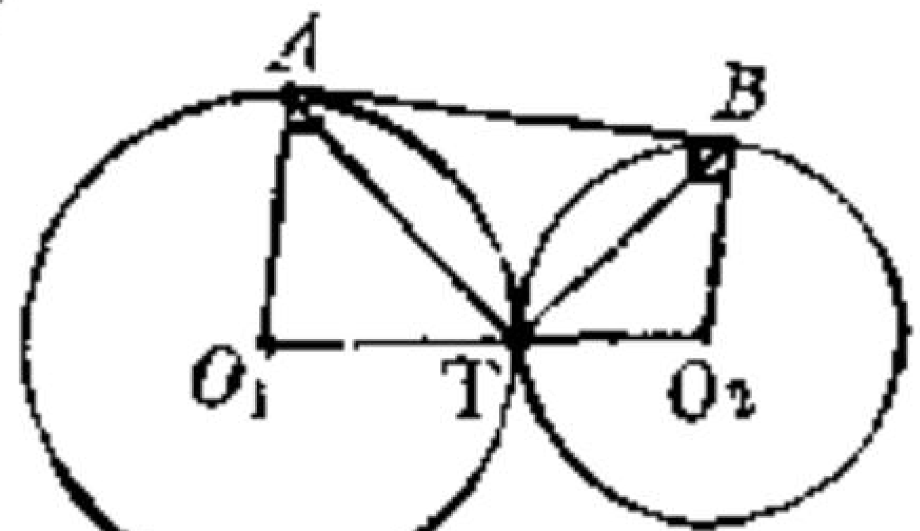


图3—17

18．承上题，设AC、BD各是两圆的直径，则AD与BC交于T点．

提要：$\angle ATB$、$\angle ATC$、$\angle BTD$均为直角，故A、T、D与C、T、B均分别共线，即AD、BC相交于T．

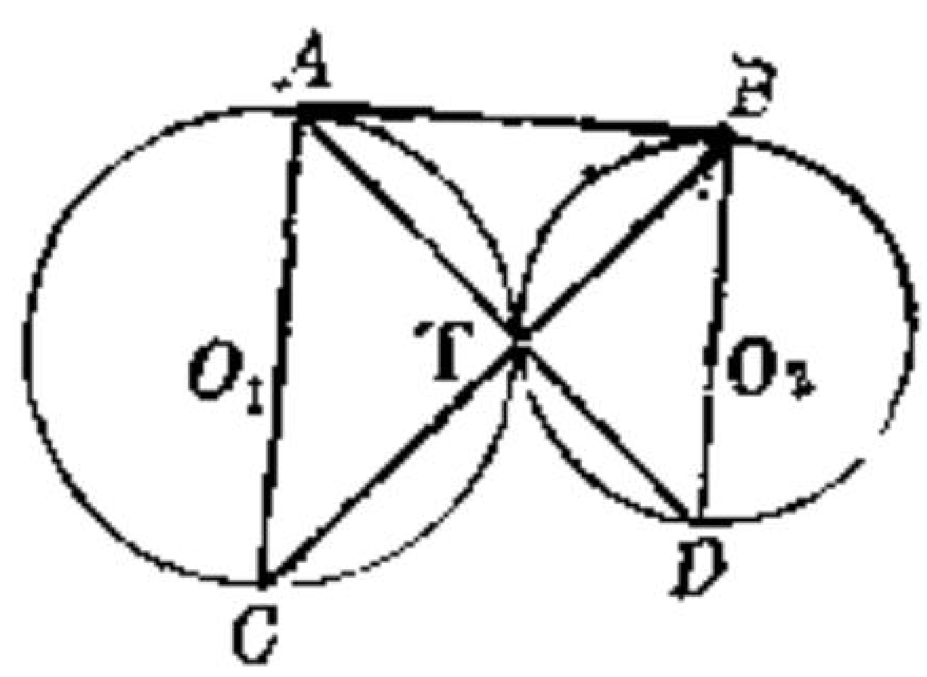


图3—18

19．有外切的两圆，又以它们的连心线（线段）为直径

作一圆，求证这三个圆有共同的外公切线.

提要：作$O_3C \perp AB$，则O_3C是直角梯形O_1O_2BA的中位线，

∴ $O_3C=(\gamma_1+\gamma_2)/2$，即$C$点在$\odot O_3$上，故$AB$是三圆的共同的外公切线.

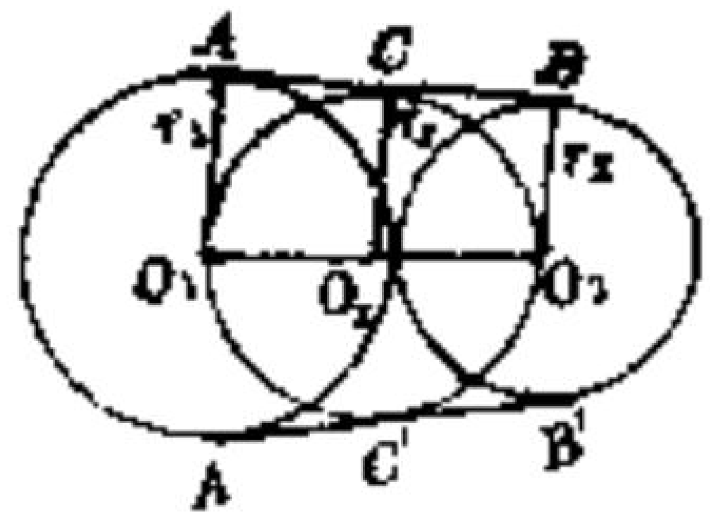


图3—19

20. 外离两圆的两内公切线所截取外公切线的线段，等于内公切线；内公切线被限于两外公切线间的线段，等于外公切线.

提要：（1）$2GH=AH-AG+GB-HB$

$=PH-RG+GQ-HS=PS+RQ=2RQ$，

∴ $GH=RQ$.

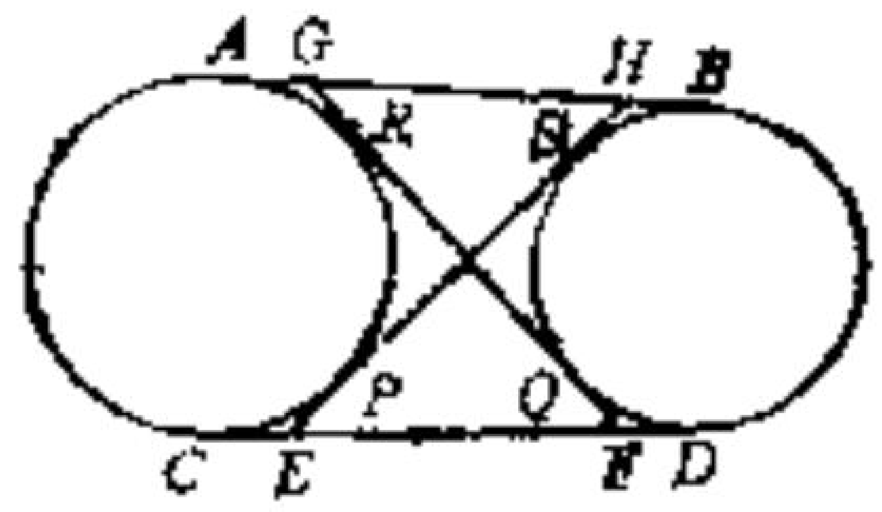


图3—20

（2）$2GF=GQ+QF+GR+RF=GB+FD+AG+CF=AB+CD=2AB$，

∴ $GF=AB$.

21. 把外离两圆的所有公切线作出后，求证：

（1）外公切线上的四个切点共圆；

（2）内公切线上的四个切点共圆；

（3）两圆心及每一外公切线与每一内公切线的交点，凡六点共圆；

（4）所得的三个圆同心.

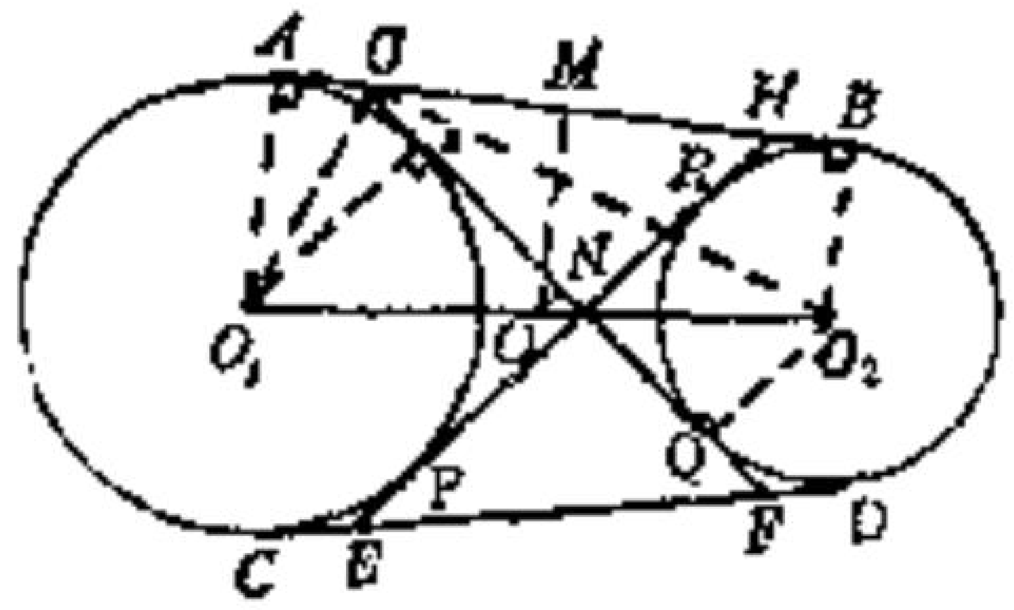


图3—21

提要：（1）$ABDC$为等腰梯形.

（2）$PQRS$为等腰梯形.

（3）$\angle O_1GF+\angle O_2GF=(\angle AGF+\angle BGF)/2=90°$，即$G$在以$O_1O_2$为直径的圆上.

（4）1° 作AB的中垂线MO交O_1O_2于O点，则O点为O_1O_2的中点，且O点为$\odot ABDC$的圆心.

2° 作SQ的中垂线，则NO亦过O_1O_2的中点，故O点亦为$\odot PQRS$的圆心.

3° 由于O_1O_2为$\odot EFGH$的直径，故此圆的圆心亦为O_1O_2的中点O.

22．外离两圆的四条公切线的中点同在一直线上.

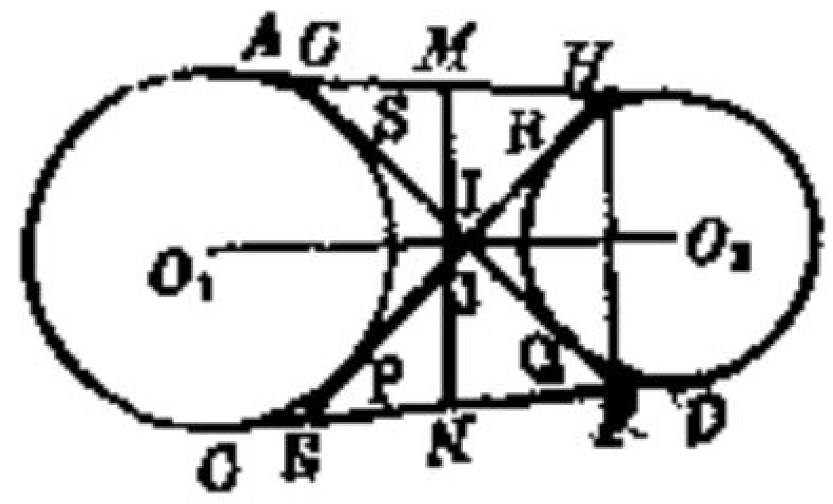


图3—22

提要，由上题可知，M为AB的中点，亦为GH的中点，同样，I为SQ的中点，亦为GF的中点.

$\therefore$ $MI//HF$，$MN//HF$，$JN//HF$，

故M、I、J、N同在一直线上.

23．自圆内接凸四边形的对角线交点向各边引垂线，求证顺次连结四垂足所成的四边形有一个内切圆.

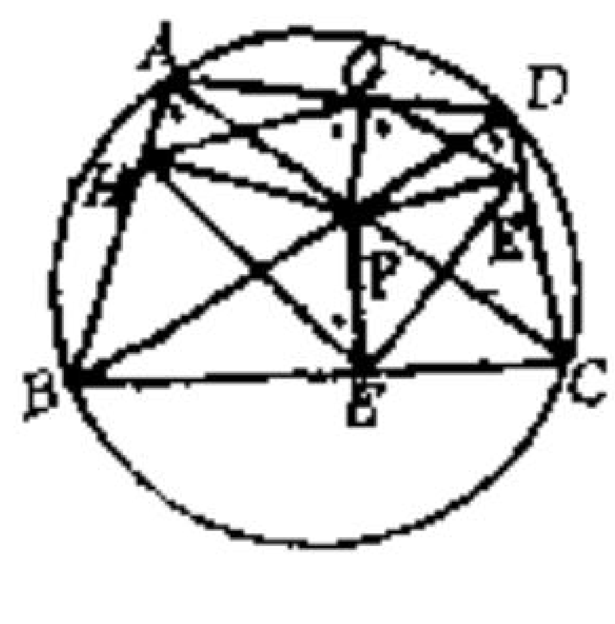


图3—23

提要：$\because$ $\angle HGP=\angle HAP=\angle FDP=\angle FGP$，有$GP$是$\angle FGH$的角的平分线.

同理可得PH、PE、PF是$\angle GHE$、$\angle HEF$、$\angle EFG$的分角线，故四边形$EFGH$有一个内切圆，其圆心即P点.

习题四

1．设M是线段AB的中点，O是直线AB上的任意点，求证：(1) $\overline{OM}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{OA}+\overline{OB})$，(2) $\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=-2\overline{AB}\cdot\overline{OM}$．



图4—1

提要：(1) ∵ $(\overline{AO}+\overline{OM})+(\overline{OM}+\overline{MB})=\overline{AM}+\overline{OB}$，

∴ $2\overline{OM}=\overline{OA}+\overline{OB}$．

(2) ∵ $\overline{OA}+\overline{OB}=2\overline{OM}$，$\overline{OA}-\overline{OB}=-\overline{AB}$，

∴ $\overline{OA}^2-\overline{OB}^2=-2\overline{AB}\cdot\overline{OM}$．

2．设A、B、P、Q是同在一直线上的四点，

令$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=p$，$\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}=q$，求证：$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\frac{p-q}{(1-p)(1-q)}$．

提要∵ $\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AP}-\overline{BP}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PB}-\overline{PA}}{\overline{PB}}=1-p$，

∴ $\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{1}{1-p}$ ①

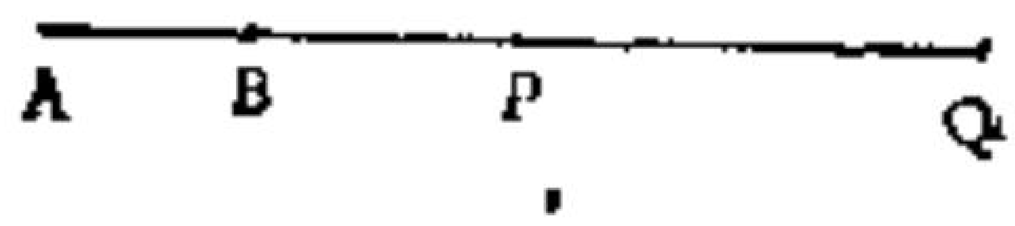


图4—2

又 $\frac{\overline{AB}}{\overline{QB}}=\frac{\overline{AQ}-\overline{BQ}}{\overline{QB}}$

$=\frac{\overline{QB}-\overline{QA}}{\overline{QB}}=1-q$，

∴ $\frac{\overline{QB}}{\overline{AB}}=\frac{1}{1-q}$． ②

两式相减得：$\frac{\overline{PB}-\overline{QB}}{\overline{AB}}=\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1-q}=\frac{p-q}{(1-p)(1-q)}$．

3．设A、B、C、D是同在一直线上的四点，且合于

$\frac{CA}{CB}=-\frac{DA}{DB}=k$，命 AB、CD 的中点各为 O、M，

求证：(1) $OA^2=OC\cdot OD$；(2) $\frac{MA}{MB}=k^2$；

(3) $\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

对于这样的 A、B、C、D 四点，我们常说 C、D 调和分隔 A、B（也说 A、B 调和分隔 C、D），或把这四点合称为调和点列.

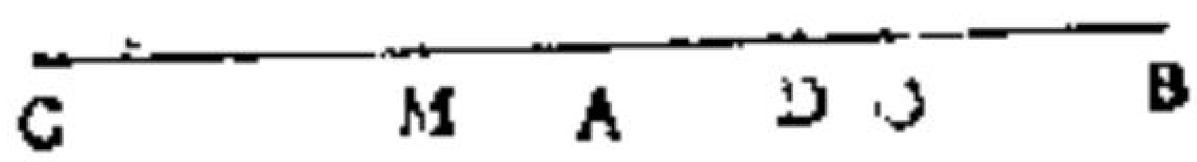


图4—3

提要(1)：由 $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$，

有 $\frac{\overline{OA}-\overline{OC}}{\overline{OB}-\overline{OC}}=-\frac{\overline{OA}-\overline{OD}}{\overline{OB}-\overline{OD}}$，

$\therefore\ \frac{\overline{OA}-\overline{OC}}{-\overline{OA}-\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}-\overline{OD}}{\overline{OA}+\overline{OD}}$，

化简得 $\overline{OA}^2=\overline{OC}\cdot\overline{OD}$.

(2) $\because$ M 是 CD 的中点，由(1)得

$\overline{MD}^2=\overline{MA}\cdot\overline{MB}$，

于是 $\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{MD}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{DM}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{DM}+\overline{MA}}{\overline{BM}+\overline{MD}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{BD}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=k$，

$\therefore\ \frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}\cdot\frac{\overline{MD}}{\overline{MB}}=k^2$，即 $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k^2$，

(3) 由证(2)知 $k=\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}}$，

$\therefore\ \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}+\overline{DB}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AM}+\overline{MC}}$，即 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}}$，

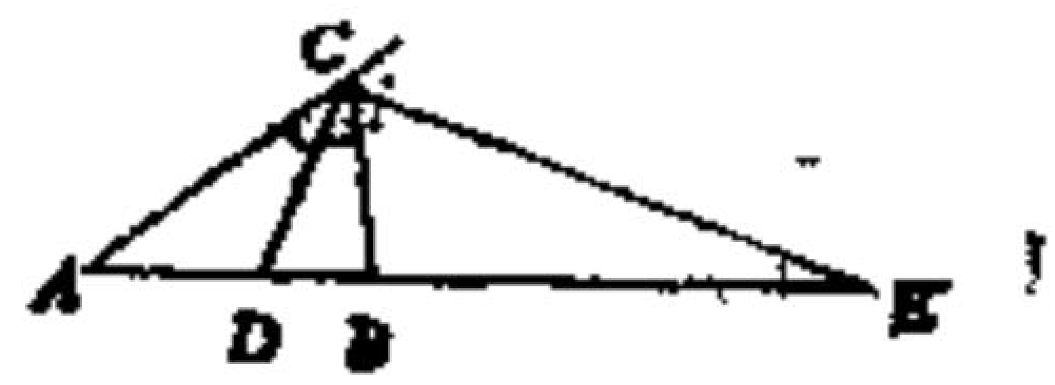
有 $\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\overline{AB}\cdot\overline{AM}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{\overline{AD}+\overline{AC}}{AC\cdot AD}=\frac{\overline{AD}+\overline{AM}+\overline{MC}}{AC\cdot AD}$$

$$=\frac{2\overline{AM}}{AC\cdot AD}=\frac{2\overline{AM}}{AB\cdot AM}=\frac{2}{AB}.$$

4．设三角形一角的内外平分线与对边所在直线相交，则两交点与该边的两端成调和点列．

提要：



$$\therefore \quad \frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=\frac{CA}{CB}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}},$$

$\therefore$ A、B、D、E 为调和点列，

图4—4

5．在$\triangle ABC$中，I是内心，I_1、I_2、I_3各是对着A、B、C的旁心，设直线AII_1、I_2AI_3交BC于E、F，求证：

(1) $\dfrac{IA}{IE}=\dfrac{I_1A}{I_1E}=\dfrac{AB+AC}{BC}$；

(2) $\dfrac{I_3A}{I_3F}=\dfrac{I_2A}{I_2F}=\dfrac{|AB-AC|}{BC}$

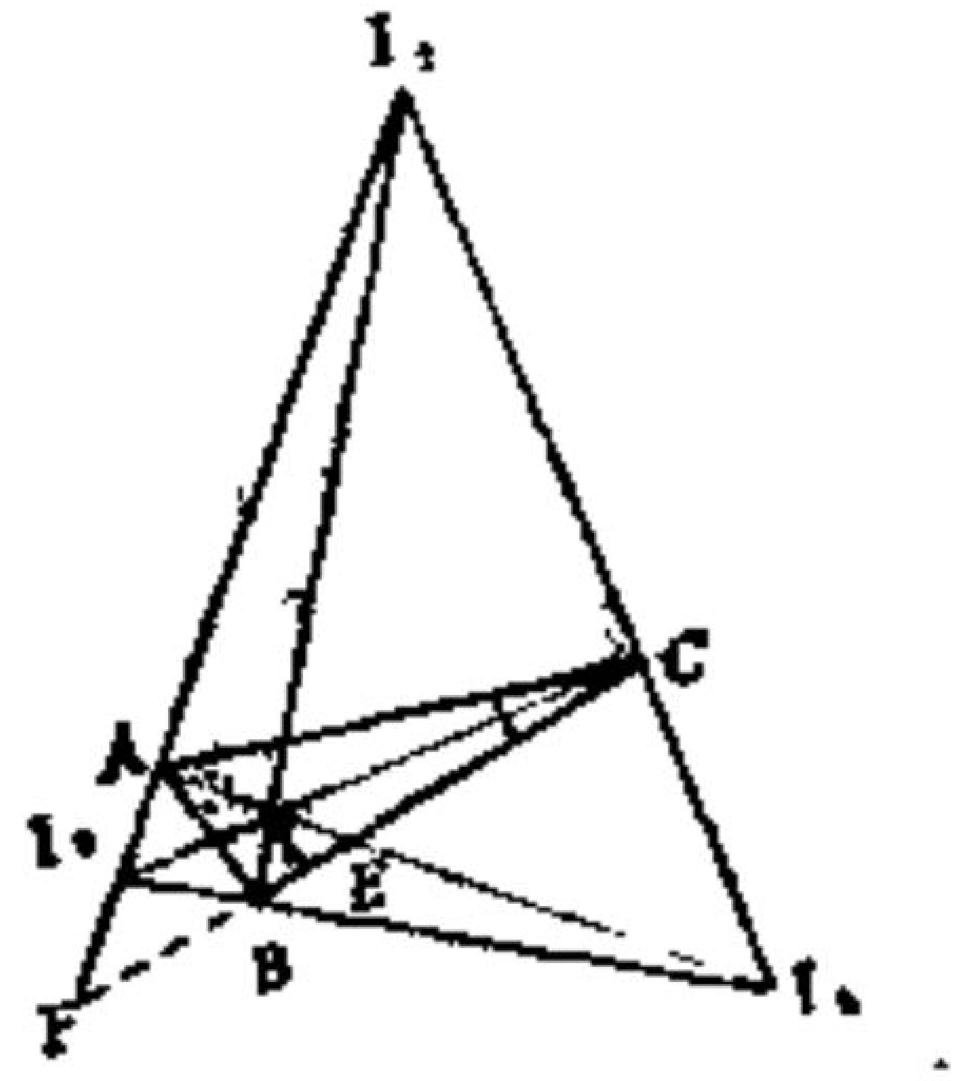


图4—5

提要(1)：$\because$ $\angle EAB=\angle EAC$，

$$\therefore \quad \frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC},$$

有$\dfrac{BC}{EC}=\dfrac{AB+AC}{AC}$．

由$\angle ICE=\angle ICA$，得

$$\frac{IA}{IE}=\frac{AC}{EC}=\frac{AB+AC}{AC}.$$

(2)：$\because$ AI_3是$\angle CAB$的外角平分线，

$$\therefore \quad \frac{FB}{FC}=\frac{AB}{AC}\text{、有}\frac{|FC-FB|}{FC}=\frac{|AC-AB|}{AC},$$

即 $\dfrac{BC}{FC}=\dfrac{|AB-AC|}{AC}$.

又 CI_2 是$\angle C$ 的外角平分线，

$\therefore\quad \dfrac{I_2A}{I_2F}=\dfrac{AC}{FC}=\dfrac{|AB-AC|}{AC}$.

6．证明§16定理112及定理113的推论，

推论：若自三角形一角顶点引出一半线内分对边所得两线段与两邻边成比例，则所引半线必是该角的平分线；若所引半线外分对边所得两线段与两邻边成比例，则所引半线必是该角的外角平分线。

提要：若 AM 不是$\angle BAC$的内角平分线，则作$\angle BAC$ 的内角平分线 AM'，于是

$\dfrac{M'B}{M'C}=\dfrac{AB}{AC}$，故点$M'$ 与点M重合，

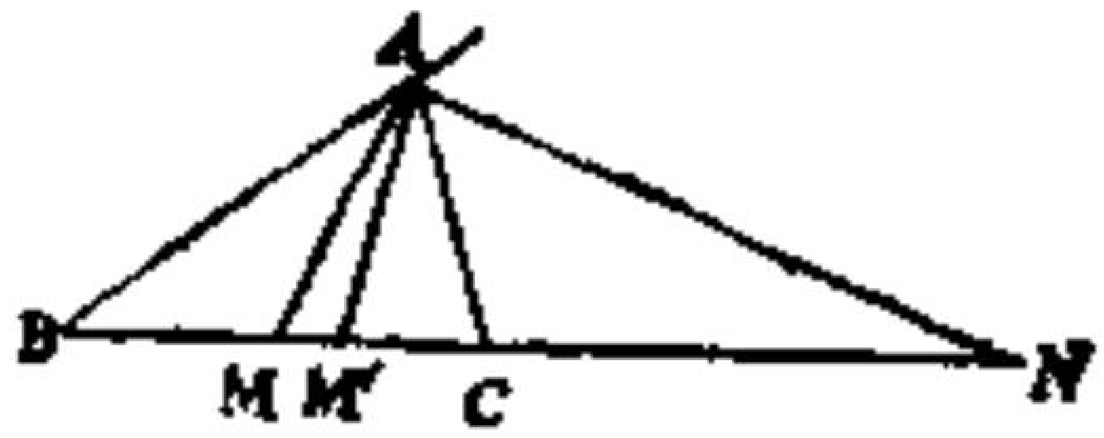


图4—6

7．通过梯形的对角线交点，作一条嵌于两腰间且平行于底边的线段，试用两底来表示这条线段的长度．

提要：(1) $\dfrac{QE}{a}=\dfrac{BQ}{BD}=\dfrac{CQ}{CA}=\dfrac{QF}{a}$.

即 $QE=QF$.

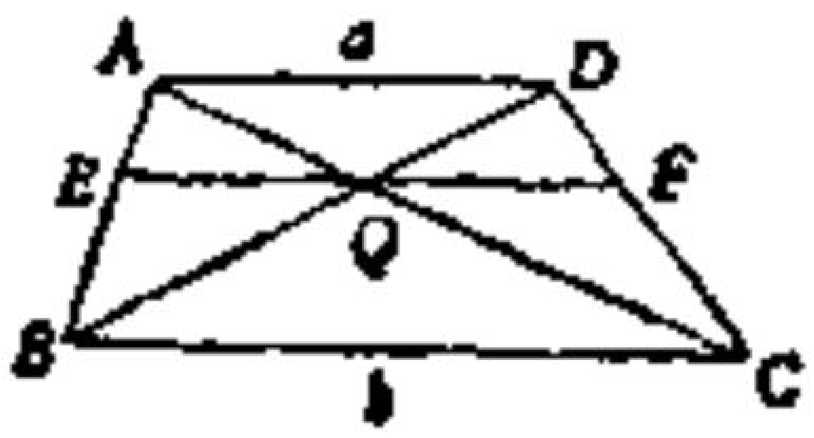


图4—7

(2) 由 $\dfrac{QE}{a}=\dfrac{BE}{BA}$，有$\dfrac{QE}{b}=\dfrac{AE}{BA}=\dfrac{BA-BE}{BA}$

$=1-\dfrac{QE}{a}$得 $QE=\dfrac{ab}{a+b}$，$\therefore\quad EF=\dfrac{2ab}{a+b}$.

8．设直线 $ABC \parallel A'B'C'$，且 $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$，则 AA'、BB'、CC' 三直线会于一点，或互相平行.

提要：(1) 设 AA'、BB' 相交于 D，连 CD 设交 $A'B'$ 于 C''，则有

$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$；于是 $\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$

故 C'、C'' 重合，

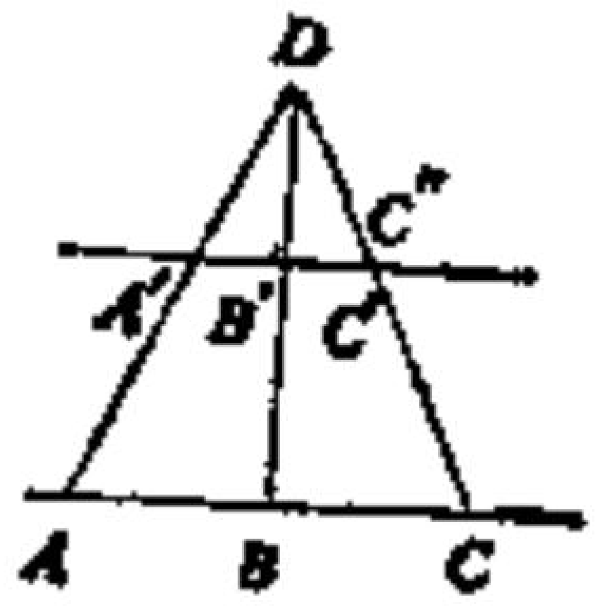


图4—8

(2) 设 $AA' \parallel BB'$，则有 $AB \mathrel{\underline{\parallel}} A'B'$.

$\because$ $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$，故有 $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}}=\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{A'C'}+\overline{C'B'}}$

$=\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=1$，$\therefore$ $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ 于是 $AA' \parallel CC'$，

$\therefore$ $AA' \parallel BB' \parallel CC'$.

9．梯形两底的中点，对角线交点，两腰延长线的交点，儿四点同在一直线上，

提要：(1) 由 $\triangle AQB \backsim \triangle CQD$，得 $\triangle AQM \backsim \triangle CQN$，

$\therefore$ $\angle AQM=\angle CQN$.

故 M、Q、N 三点共线.

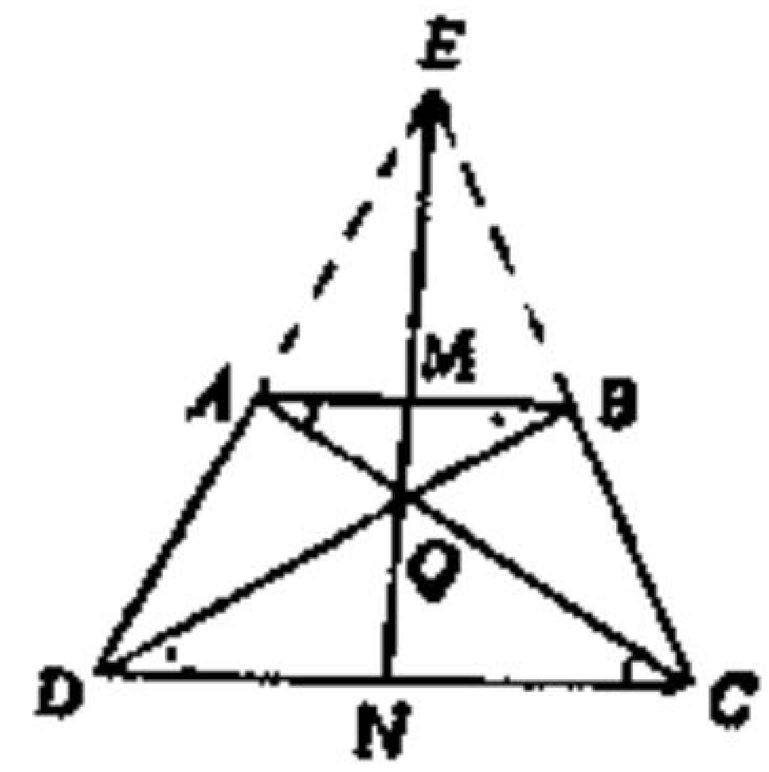


图4—9

(2) 连 EM、EN、同理可得 $\triangle EMB \backsim \triangle ENC$，有 E、M、N 三点共线.

10．在梯形两底之间作底边的一平行线，求证这直线被一腰和一对角线所截的线段，等于被他腰和他对角线所截的线段。

提要：∵ $\frac{ME}{AB}=\frac{MD}{AD}$，

$\frac{FN}{AB}=\frac{CN}{CB}$，$\frac{MD}{AD}=\frac{NC}{BC}$，

∴ $ME=FN$.

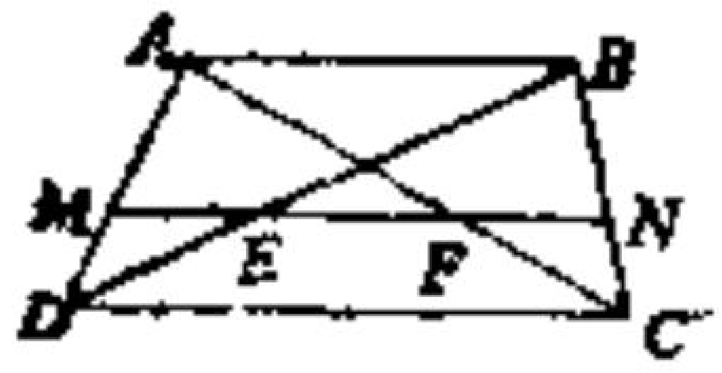


图4—10

11．三角形两边之积，等于第三边的高与外接圆直径之积．

提要：∵ $\triangle ABD\backsim\triangle AEC$，

有 $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$，∴ $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

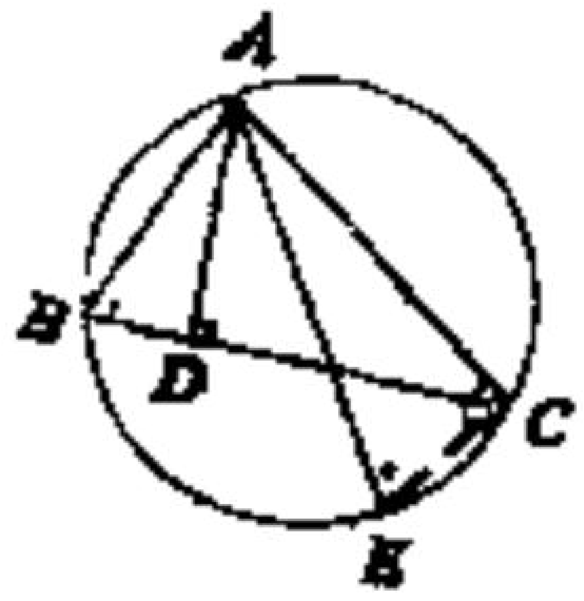


图4—11

12．圆上任一点到某切线的切点的距离，等于该点到某切线的距离与圆直径的比例中项．

提要：∵ $\triangle CAP\backsim\triangle ABP$，

有 $\frac{CP}{AP}=\frac{AP}{BP}$，∴ $AP^2=PB\cdot PC$.

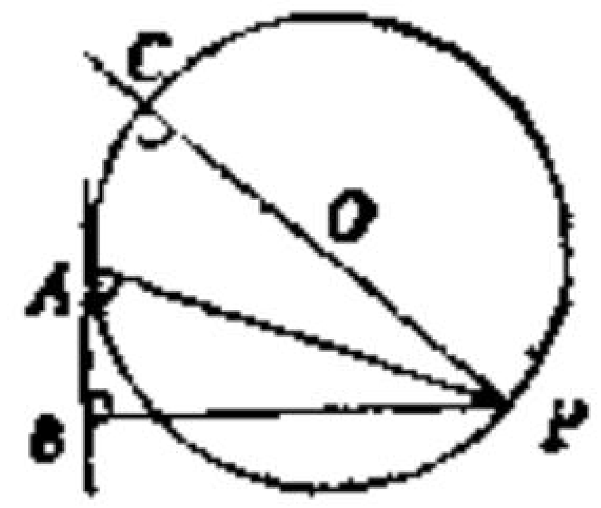


图4—12

13．圆上任一点到一弦（所在直线）的距离，等于该点到过弦端的两切线的距离的比例中项．

提要：∵ $\triangle PDE\backsim\triangle PFD$，

有 $\frac{PE}{PD}=\frac{PD}{PF}$，∴ $PD^2=PE\cdot PF$.

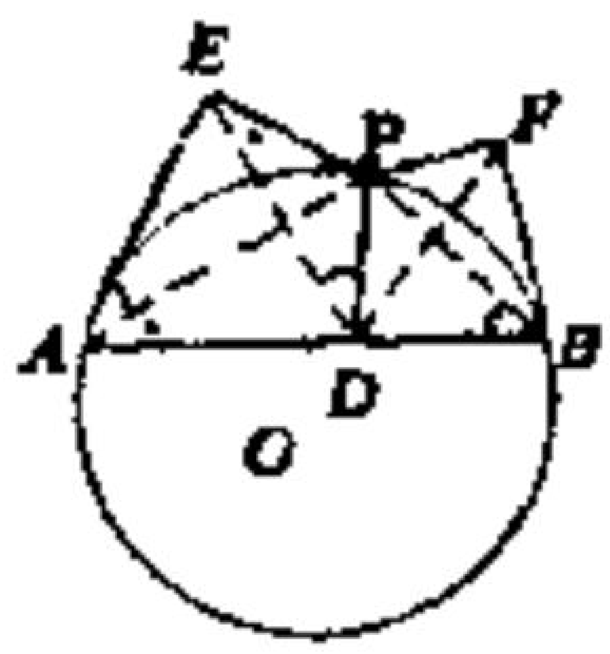


图4—13

14．若两圆外切，则它们的外公切线是两直径的比例中项．

提要：设 E 是 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 的切点，由习题三第18题知 A、E、C 与 B、E、D 分别共线。∵ $\triangle ABD \backsim \triangle BCA$

有 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{AB}$，∴ $AB^2=AD\cdot BC$.

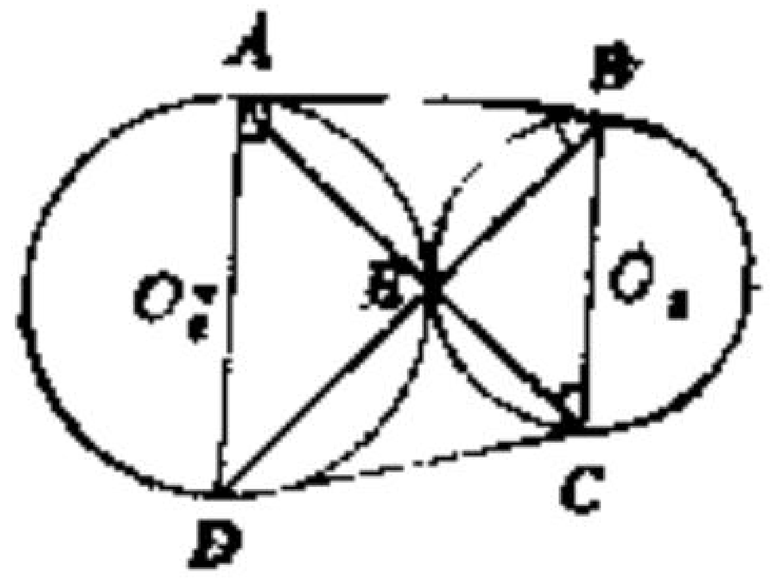


图4—14

15. 三角形的重心至三边的距离，与三边成反比例.

提要：∵ $GD\cdot BC=GE\cdot CA=GF\cdot AB=2S_{\triangle ABC}/3$

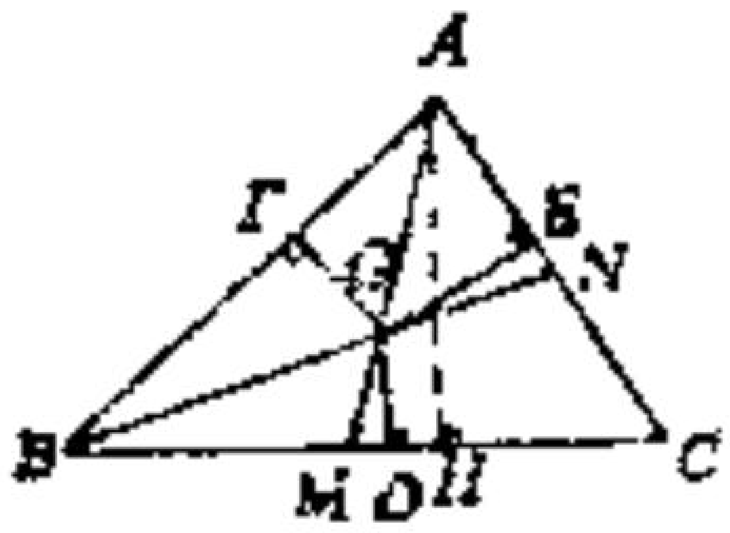


图4—15

∴ $GD:GE:GF=\dfrac{1}{BC}:\dfrac{1}{CA}:\dfrac{1}{AB}$.

16. 设直线 $PQ\perp MN$ 于 Q，则 $PM^2-PN^2=QM^2-QN^2$.

提要：$PM^2-QM^2=PN^2-QN^2$

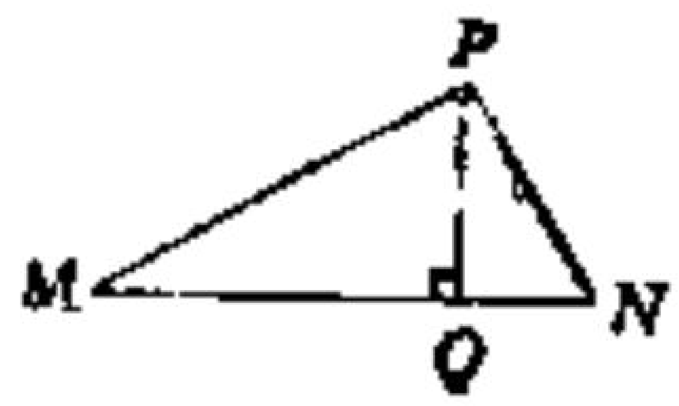


图4—16

17. 三角形任两边的平方差，二倍于第三边与其中线在此边上的射影之积.

提要：

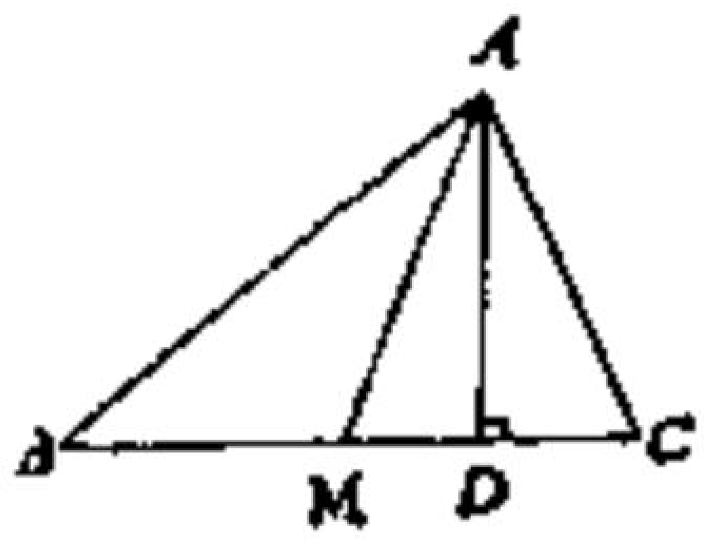


图4—17

$AB^2-AC^2=DB^2-DC^2$

$=(DB+DC)(DB-DC)$

$=BC[(BM+MD)-(MC-MD)]=2BC\cdot MD$.

18．若四边形的两对角线互相垂直，则一双对边的平方和，等于另一双对边的平方和．

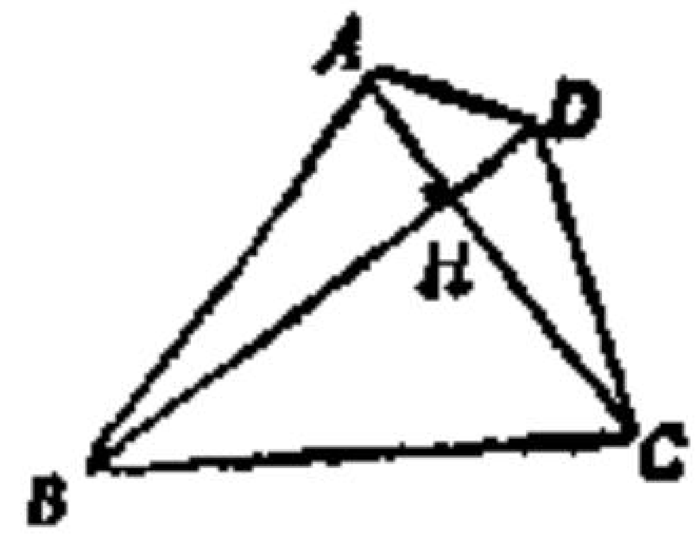


图4—18

提要：

$$AB^2-AD^2=CB^2-CD^2.$$

19．设H是$\triangle ABC$的垂心，则

$HA^2+BC^2=HB^2+CA^2=HC^2+AB^2$

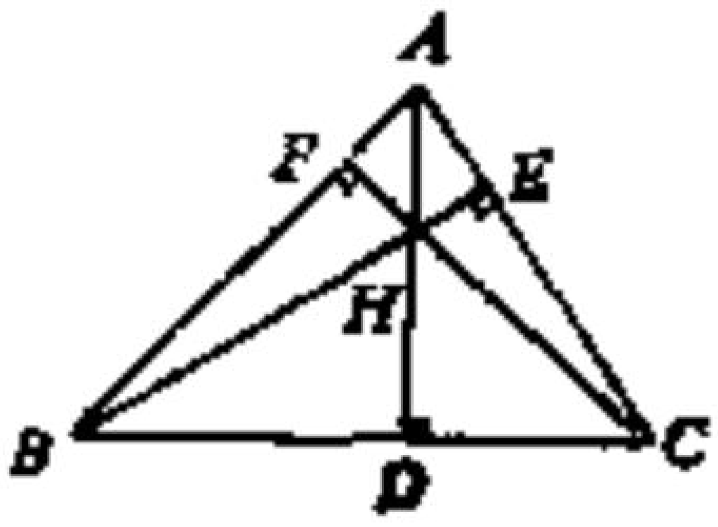


图4—19

提要：$\because\ BC^2-BF^2=CA^2-AF^2$，

$\therefore\ BC^2+AF^2=BF^2+CA^2$

即 $BC^2+(HA^2-HF^2)$

$=(HB^2-HF^2)+CA^2$

$\therefore\ HA^2+BC^2=HB^2+CA^2$

20．四边形对边中点连结线的平方和，等于两对角线的平方和之半．

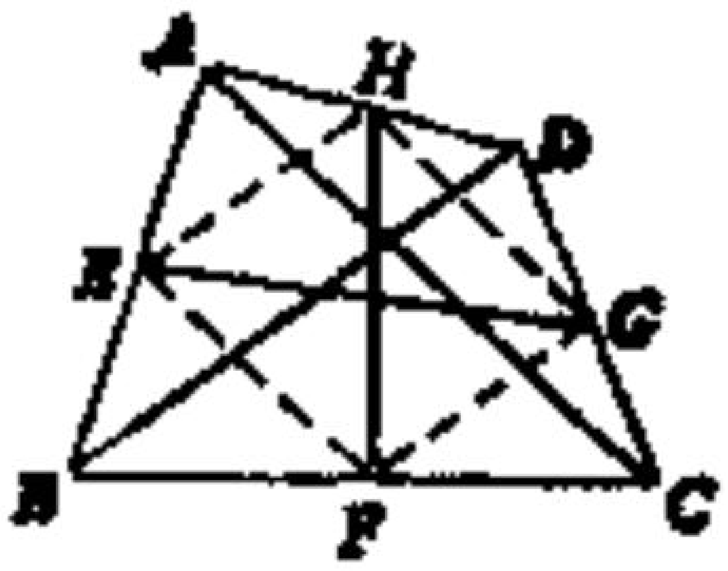


图4—20

提要：由习题二第15题，$EFGH$为平行四边形，由定理126有

$$EG^2+FH^2=2(EF^2+FG^2)$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BD\right)^2\right]$$

$$=(AC^2+BD^2)/2.$$

21．两相交圆的两交点，与两条外公切线的中点同在一直线上．

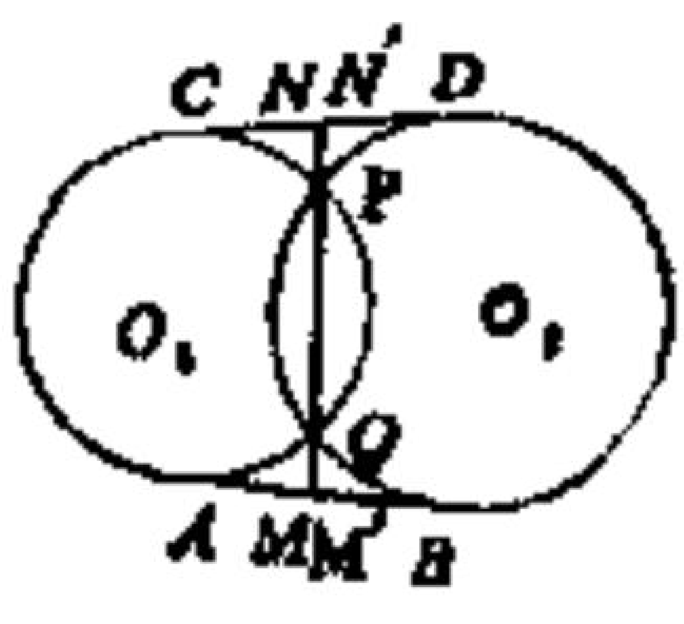


图4—21

提要：设M、N为AB、CD的中点，M'、N'为PQ与AB、CD的交点．由定理127有

$$M'A^2=M'P\cdot M'Q=M'B^2$$

故M'为AB的中点，M'与M重合．

22．设 AB、CD 是⊙O 的两弦，且前者把后者平分，过 C、D 分别引⊙O 的切线设交于 P，求证 PO 是 $\angle APB$ 的平分线．

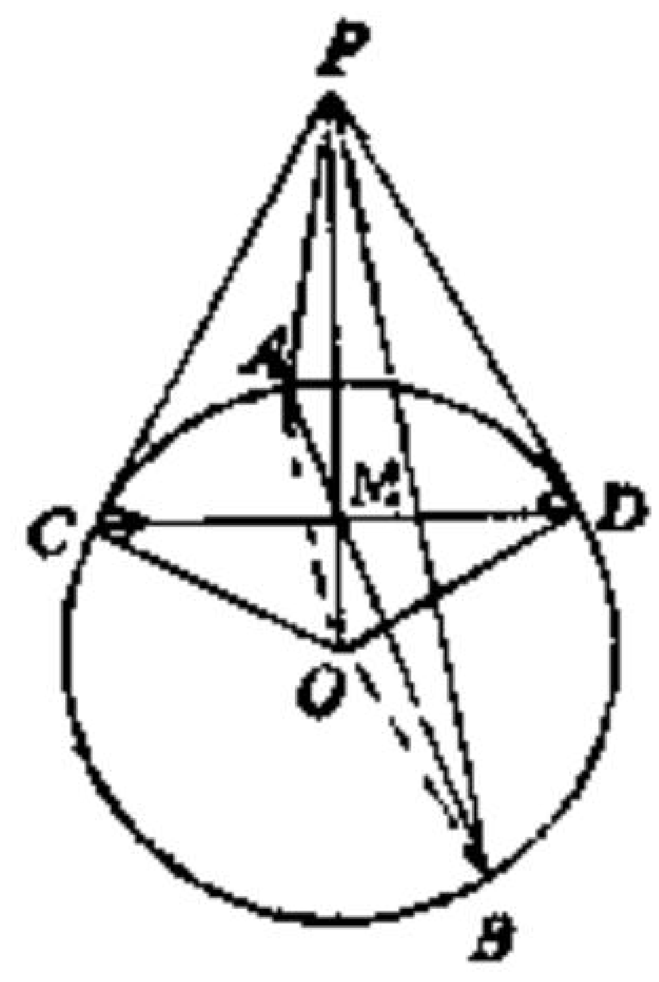


图4—22

提要：∵ P、C、O、D 与 A、C、B、D 均四点共圆，有

$MO\cdot MP=MC\cdot MD=MA\cdot MB$

故 P、A、O、B 四点共圆，

∵ $OA=OB$

∴ PO 是 $\angle APB$ 的平分线．

23．已知 $\triangle ABC$ 及一点 H，而 AH 与 BC，BH 与 CA，CH 与 AB 各交于 D、E、F．若 $HA\cdot HD=HB\cdot HE=HC\cdot HF$，则 H 必是 $\triangle ABC$ 的垂心．

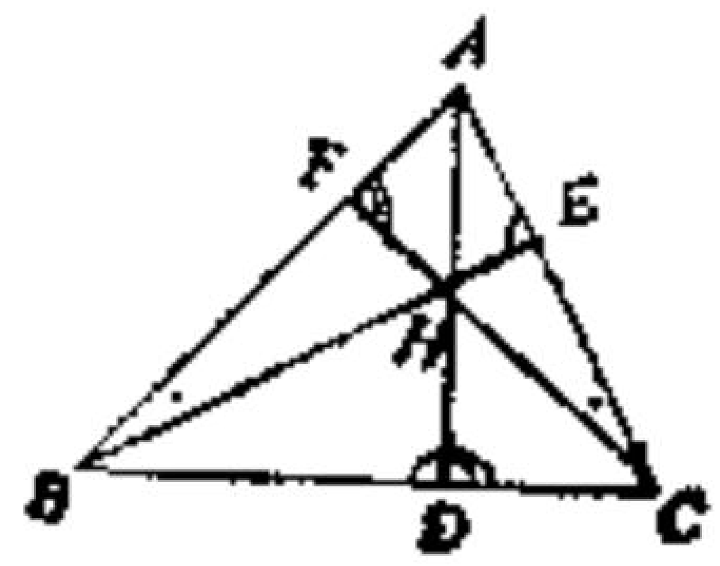


图4—23

提要：由定理129，A、F、D、C，B、C、E、F 及 A、B、D、E 均四点共圆，有 $\angle ABE=\angle ACF$，∴ $\angle AEB=\angle AFC$．于是 $\angle ADB=\angle ADC$　∴ $AD\perp BC$．

24．在 $\triangle ABC$ 中，设 A 角的内外平分线交直线 BC 于 E、F，又交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 M、N，求证：

（1）$AB\cdot AC=AE\cdot AM=AF\cdot AN$；

（2）$AE^2=AB\cdot AC-EB\cdot EC$；

（3）$AF^2=FB\cdot FC-AB\cdot AC$．

提要：(1) 由$\triangle ABE \backsim \triangle AMC$、$\triangle ANB \backsim \triangle ACF$，有

$$AB \cdot AC = AE \cdot AM = AF \cdot AN$$

(2) 由$AB \cdot AC = AE(AE+EM)$，

有 $AE^2 = AB \cdot AC - AE \cdot EM$

$= AB \cdot AC - EB \cdot EC$.

(3) 由$AB \cdot AC = AF(NF - AF)$，

有 $AF^2 = FB \cdot FC - AB \cdot AC$.

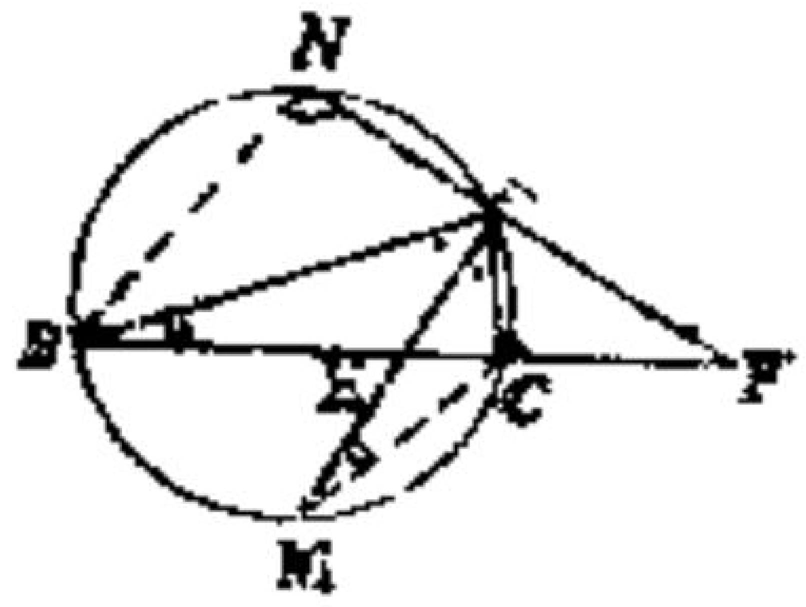


图4—24

25．证明§20定理132中的内外角平分线公式

(1) $t_1 = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)}$；

(2) $t_1' = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(s-b)(s-c)}$.

提要：(1) 由内角平分线及合比，

有 $\frac{BE}{c} = \frac{CE}{b} = \frac{BC}{b+c} = \frac{a}{b+c}$,

∴ $BE = \frac{ac}{b+c}$, $CE = \frac{ab}{b+c}$

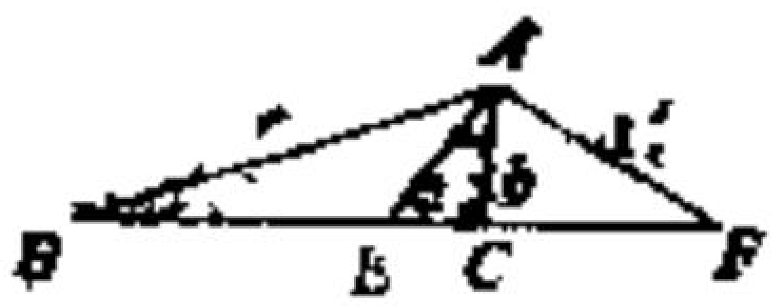


图4—25

由上题(2)，

$$t_1^2 = AE^2 = cb - \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} =$$

$$= \frac{bc}{(b+c)^2}[(b+c)^2 - a^2] = \frac{4bc}{(b+c)^2}s(s-a).$$

(2) 由外角平分线及分比，有 $\frac{FB}{c} = \frac{FC}{b} = \frac{a}{c-b}$,

∴ $FB = \frac{ac}{c-b}$, $FC = \frac{ab}{c-b}$. 由上题(3)，

$$t_1'^2 = AF^2 = \frac{ac}{c-b} \cdot \frac{ab}{c-b} - cb$$

$$= \frac{bc}{(c-b)^2}[a^2-(c-b)^2]$$

$$= \frac{4bc}{(c-b)^2}(s-b)(s-c)$$

26. 延长等腰三角形△ABC的底边至D，使$CD=BC$，求证：

$$AD^2=AB^2+2BC^2.$$

提要：

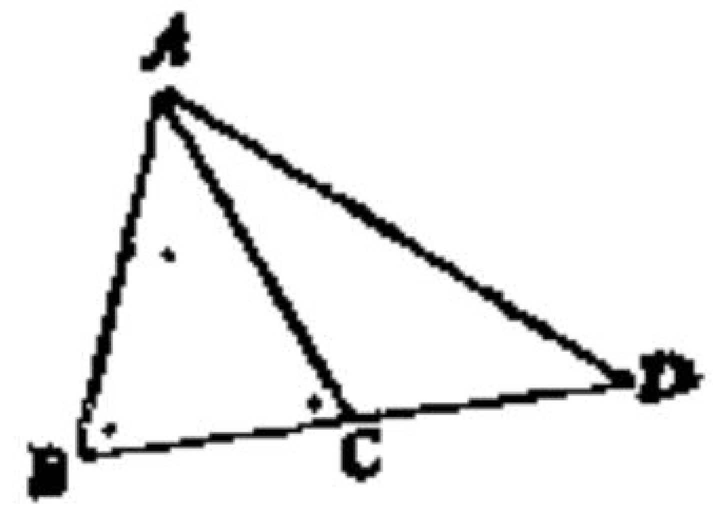


图4—26

∵ $AB^2+AD^2=\frac{1}{2}BD^2+2AC^2$，

∴ $AD^2=AB^2+(2BC)^2/2=AB^2+2BC^2$

27. 在直角△ABC中，设E、F是弦BC的三等分点，求证：$AE^2+AF^2=5BC^2/9$.

提要：∵ AE、AF是△ABF、△AEC、BF、EC上的中线，有

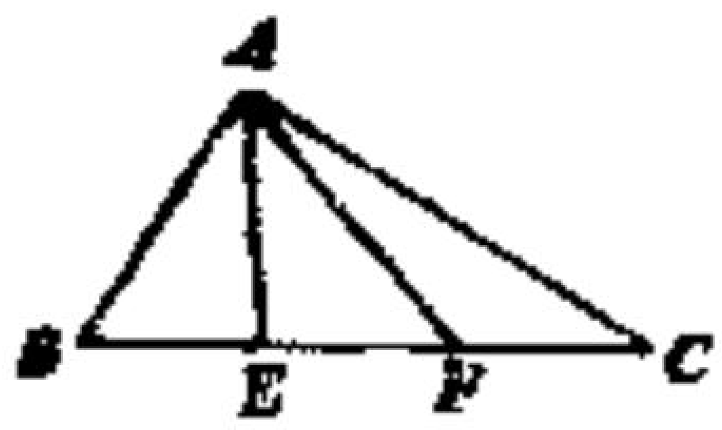


图4—27

$$AB^2+AF^2=\frac{1}{2}BF^2+2AE^2,$$

$$AE^2+AC^2=\frac{1}{2}EC^2+2AF^2,$$ 两式相加有

$$AE^2+AF^2=5\cdot BC^2/9.$$

28. 设a、b、c表示三角形的三边，s表半周，R表外接圆半径，求证：$R=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

提要：∵ △AHC∽△ABD，

∴ $\frac{AH}{AC}=\frac{AB}{AD}$，即$R=\frac{AD}{2}=\frac{bC}{2AH}$ ①

又 $AH^2=c^2-BH^2$ ②

$b^2=c^2+a^2-2a\cdot BH$，

∴ $BH=(a^2+c^2-b^2)/2a$.

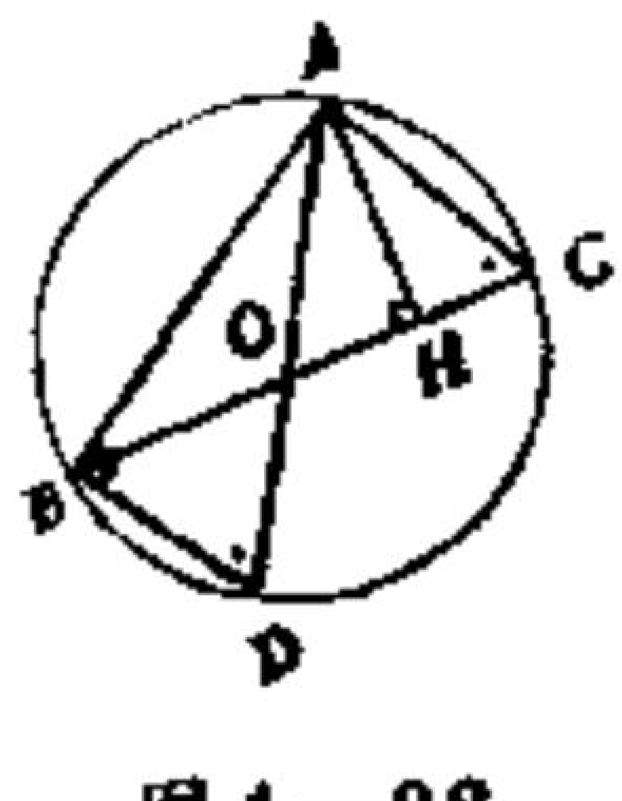


图4—28

把这个结果代入②与①，得

$$R^2=a^2b^2c^2/16s(s-a)(s-b)(s-c).$$

29．在§21定理133中，求证正五边形的边长公式

$$a_5=R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

提要：(1)设⊙$O(R)$是正十边形的外接圆，A_1、M是$\angle OA_1A_2$的分角线，则$\angle A_1OA_2=\angle MA_1A_2=\pi/5$，

$$\angle OA_1A_2=\angle OA_2A_1=\angle A_1MA_2=2\pi/5.$$

有$\triangle OA_1A_2\backsim\triangle A_1A_2M$及

$$A_1A_2=A_1M=OM$$

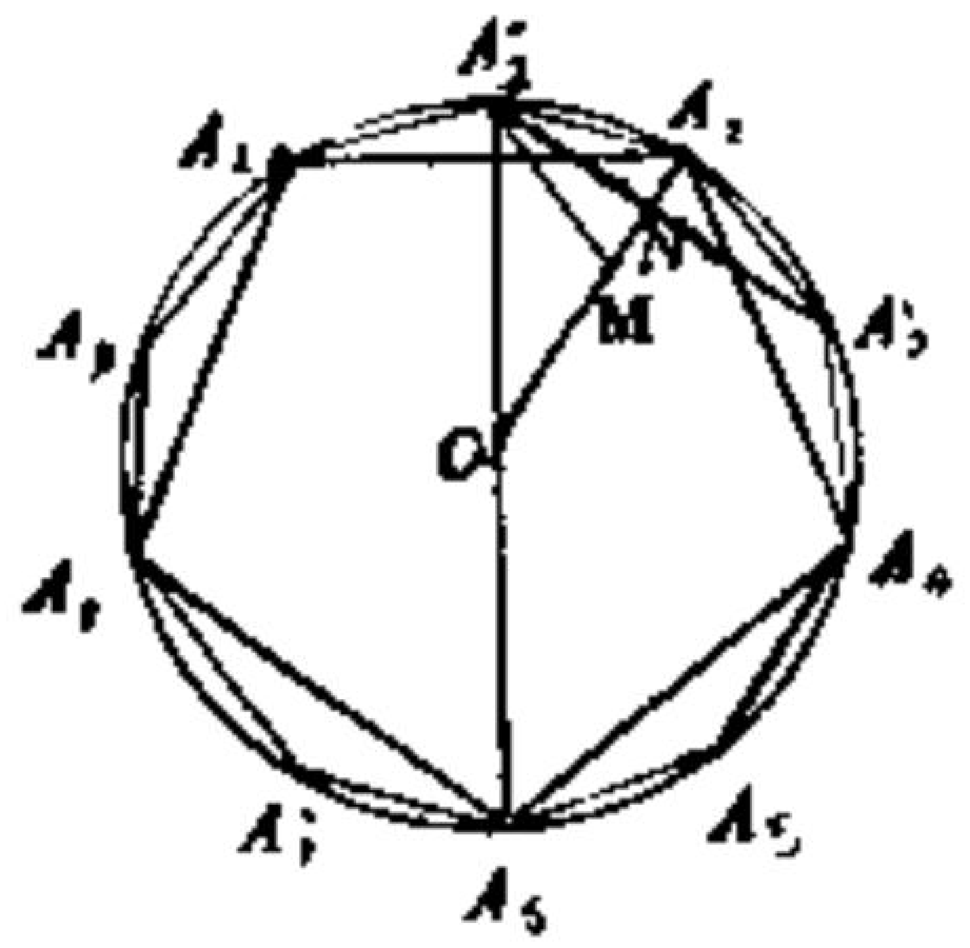


图4—29

$$\therefore\quad \frac{A_1A_2}{OA_1}=\frac{A_2M}{A_1A_2},$$

即 $\dfrac{a_{10}}{R}=\dfrac{R-a_{10}}{a_{10}}$， $\therefore\ a_{10}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R.$

(2) $\because\ OA_2\perp A_1A_3$于$A_1A_3$的中点$N$，

$$\therefore\quad A_1N^2=A_1A_2^2-NA_2^2=A_1A_2^2-\left(\frac{1}{2}MA_2\right)^2$$

$$=A_1A_2^2-\frac{1}{4}\left(OA_2-OM\right)^2$$

$$=A_1A_2^2-\frac{1}{4}\left(OA_2-A_1A_2\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}A_1A_2^2-\frac{1}{4}(OA_2^2-2OA_2\cdot A_1A_2)$$

即 $\dfrac{1}{4}a_5^2=\dfrac{3}{4}a_{10}^2-\dfrac{1}{4}(R^2-2R\cdot a_{10}).$

$\therefore\quad a_5^2=3a_{10}^2+2R\cdot a_{10}-R^2=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}R^2.$

30．圆内接正五边形边长的平方，等于同圆的内接正六

边形及正十边形边长的平方和.

提要：$R^2+\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}R^2=\left(1+\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)R^2$

$=\frac{5-\sqrt{5}}{2}R^2$

31. 已知边长，试求下列正多边形的边心距：

(1) 正五边形；(2) 正六边形；

(3) 正十边形；(4) 正十二边形.

提要：用 d_5，d_6，d_{10}，d_{12} 分别表示所求边心距，则：

(1) $d_5^2=R^2-\left(\frac{1}{2}a_5\right)^2=\frac{2}{5-\sqrt{5}}a_5^2-\frac{1}{4}a_5^2$

$=\frac{5+2\sqrt{5}}{20}a_5^2$,

$\therefore\quad d_5=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}a_5$.

(2) $d_6^2=R^2-\left(\frac{1}{2}a_6\right)^2=a_6^2-\frac{1}{4}a_6^2=\frac{3}{4}a_6^2$

(3) $d_{10}^2=R^2-\left(\frac{1}{2}a_{10}\right)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}a_{10}\right)^2$

$-\frac{1}{4}a_{10}^2=\frac{5+2\sqrt{5}}{4}a_{10}^2$.

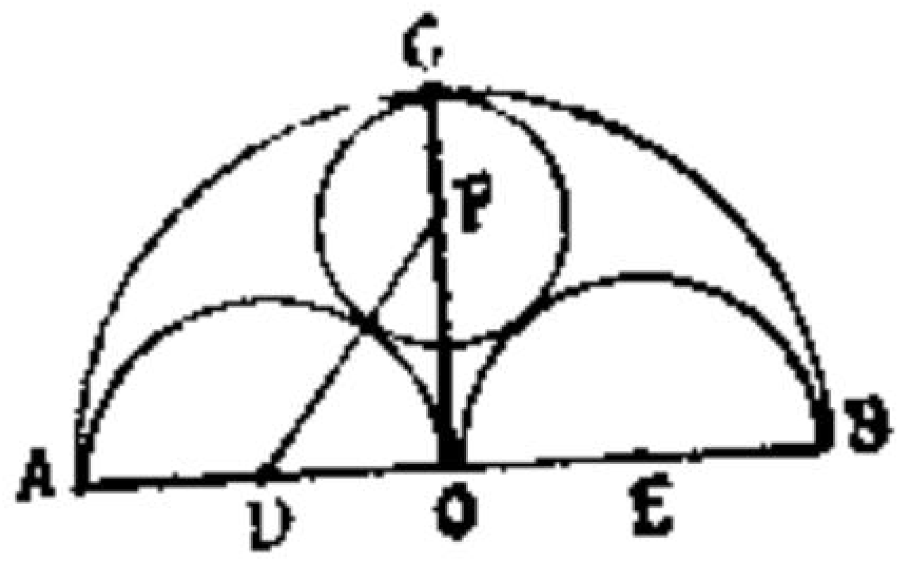
(4) $d_{12}^2=R^2-\left(\frac{1}{2}a_{12}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}a_{12}\right)^2$

$-\frac{1}{4}a_{12}^2=\frac{1}{4}(7+4\sqrt{3})a_{12}^2$

$=\left[\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})a_{12}\right]^2$.

32. 设 AB 是一半圆形的直径，O 是圆心，在此半圆形

内，以 AO、BO 为直径各作半圆，又在三个半圆之间的隙缝中作内切圆，求证这圆的直径等于 AB 的三分之一.


图4—32

提要：设内切圆的半径为 r，$AB=2R$. 有

$$(R/2+r)^2=(R-r)^2+(R/2)^2,$$

$\therefore\quad r=R/3$.

33. 将一线段随意分成若干小线段，以这些小线段为直径分别作半圆，求证：这些半圆周的和为定长.

证：设此线段总长为 a，小圆的半径分别为 r_1，r_2，…，γ_n，则 $a=2(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n)$，于是这些半圆周的和为 $\pi(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n)=\pi a/2$.

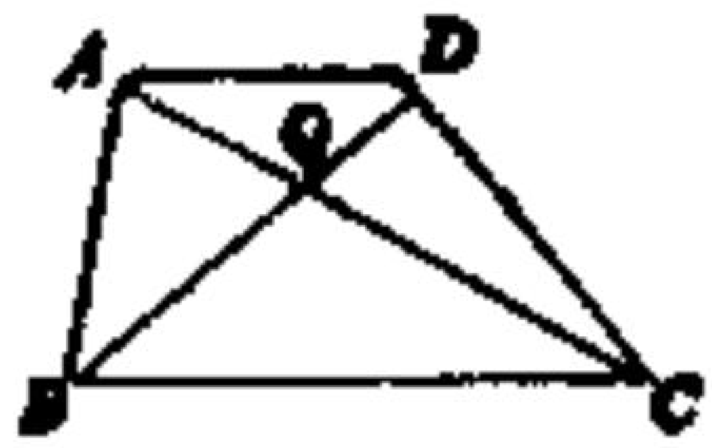
34. 在两圆中，等长的弧所对圆心角之比，等于两圆半径的反比.

证：设等长的弧为 l，在$\odot O_1(R)$与$\odot O_2(r)$中所对圆心角分别为 α、β，则 $\alpha R=l=\beta r$.

$$\therefore\quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{r}{R}.$$

习 题 五

1. 梯形的两对角线与两腰围成两个面积相等的三角形.


图5—1

提要：$\because\quad S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}$，

$\therefore\quad S_{\triangle ABQ}=S_{CLQ}$.

2. 以梯形的腰为底，他腰中点为顶作三角形，求证：所作三角形的面积．等于梯形面积的一半.

提要：作BC的中点F，$BH\perp EF$，

∴ $S_{\triangle EBC}=S_{\triangle EFB}+S_{\triangle EFC}$

$$=\frac{1}{2}EF(BG+GH)=\frac{1}{2}EF\cdot BH$$

而由定理138，有 梯形$S_{ABCD}=EF\cdot BH$

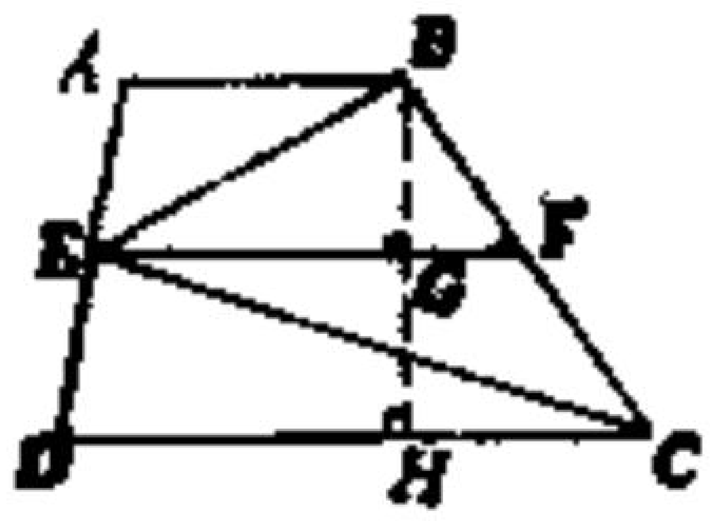


图5—2

3．设梯形的两对角线与两底所围成的两个三角形的面积为p^2及q^2，试证梯形的面积为$(p+q)^2$.

提要：由题1知，$\triangle QAD$与$\triangle QBC$有相等面积，令为x，由定理140推论2°，有



图5—3

$$\frac{S_{\triangle ADQ}}{S_{\triangle ABQ}}=\frac{DQ}{BQ},\qquad \frac{S_{\triangle CDQ}}{S_{\triangle CBQ}}=\frac{DQ}{BQ}.$$

于是，$\frac{x}{p^2}=\frac{q^2}{x}$， ∴ $x=pq$.

得 梯形$S_{ABCD}=p^2+2x+q^2=p^2+2pq+q^2=(p+q)^2$.

4 将三角形的重心与三顶点相连，这三条连结线必三等分三角形的面积.

提要：∵ $h_1=h/3$，

∴ $S_{\triangle GBC}=S_{\triangle ABC}/3$.

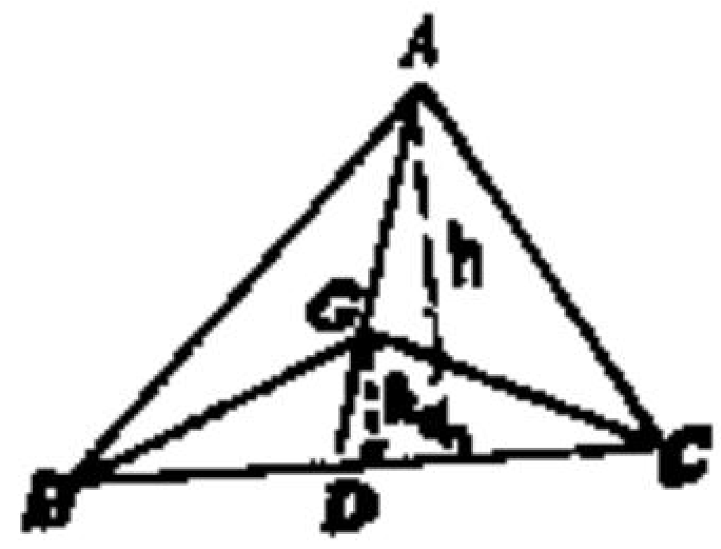


图5—4

5．在平行四边形一对角线上任取一点，过此点作两直线分别与两邻边平行，这两直线把平行四边形分为四个小平行四边形，其中不含该对角线的两形必等积.

提要：$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBD}$，

$S_{\triangle GPD}=S_{\triangle FPD}$，$S_{\triangle EPB}=S_{\triangle HPB}$.

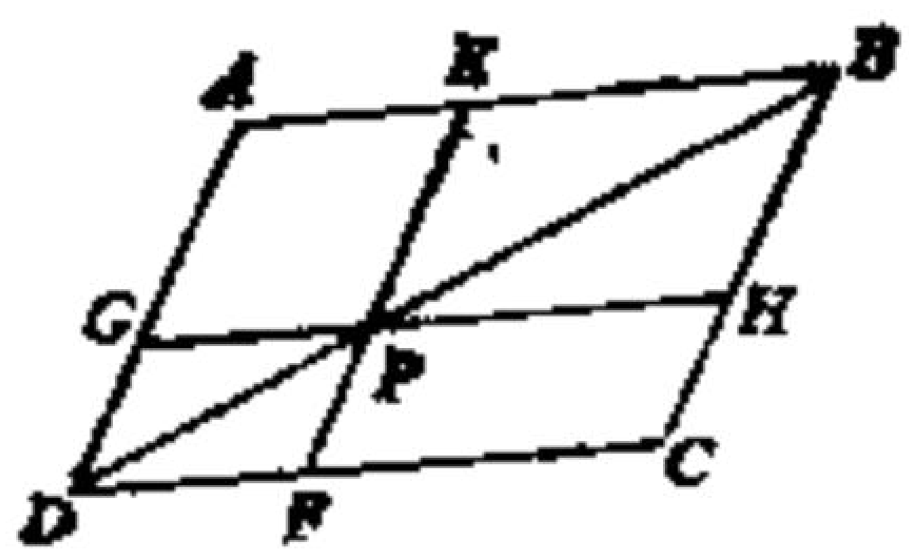


图5—5

6．顺次连结简单四边形各边中点所成四边形的面积，

等于原四边形面积的一半．

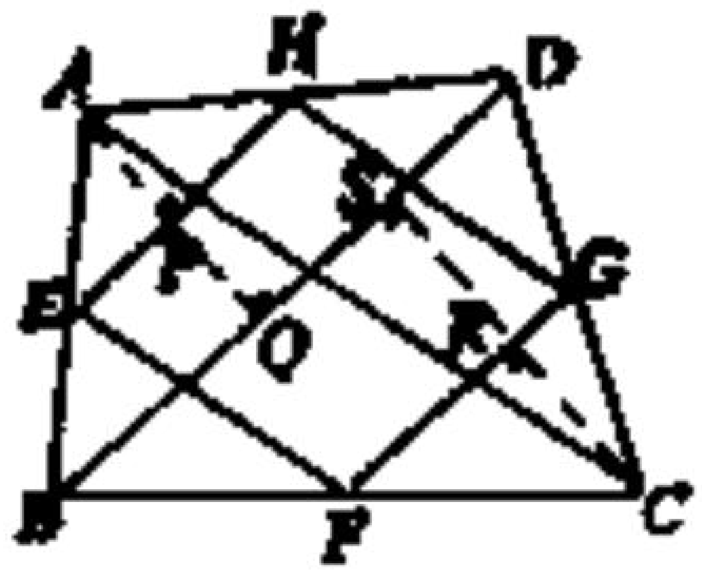


图5—6

提要：∵ $EFGH$ 为平行四边形，且其高为 $PQ+RS=(AQ+CS)/2$，

∴ $S_{\square EFGH}=BD(AQ+CS)/4$，

又 四边形$S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$

$=BD(AQ+CS)/2$．

7．设A、B、P、Q 是任意四点，O 是 PQ 的中点，求证：（1）若 P、Q 同在 AB 的一侧，则

$S_{\triangle OAB}=(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle QAB})/2$；

（2）若 P、Q 分在 AB 的两侧，则

$S_{\triangle OAB}=|S_{\triangle PAB}-S_{\triangle QAB}|/2$．

提要（1）：

∵ $OH=(PE+QF)/2$，

∴ $S_{\triangle OAB}=AB(PE+QF)/4$．

又 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle QAB}=AB(PE+QF)/2$．

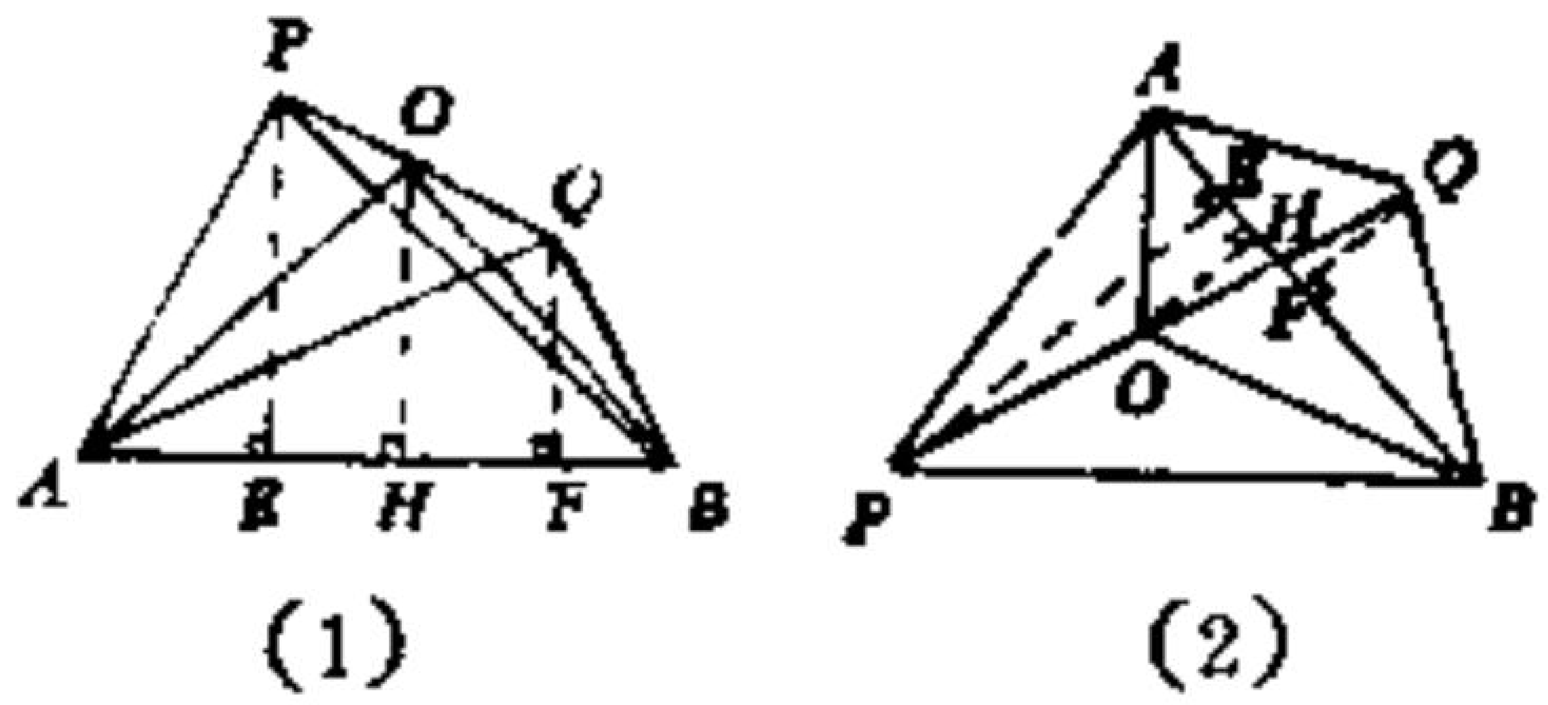


图5—7

8．以直角△ABC 的两腰 AB、AC 各为一边向外作正方形 $ABDE$、$ACFG$，又引 DH、$FK\perp BC$ 于 H、K，求证：

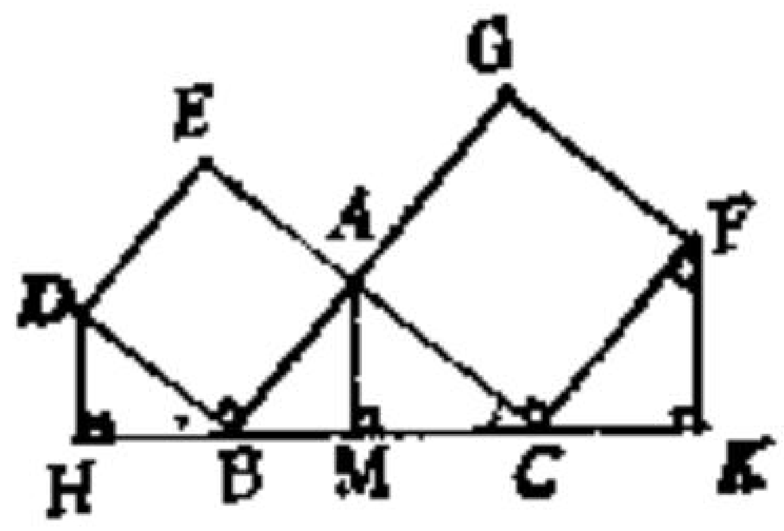


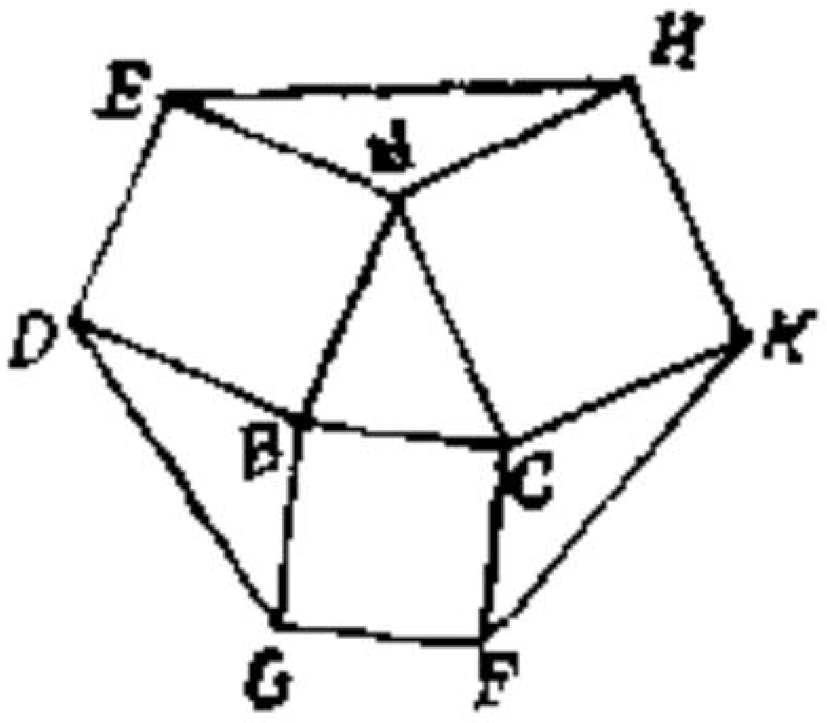
图5—8

$S_{\triangle BDH}+S_{\triangle CFK}=S_{\triangle ABC}$．

提要：$S_{\triangle BDH}=S_{\triangle ABM}$，

$S_{\triangle CFK}=S_{\triangle ACM}$

9．在△ABC的外边作正方形$ABDE$、$BCFG$、$CAHK$，求证：$S_{\triangle AEH} = S_{\triangle BDG} = S_{\triangle CFK}$.


图5—9

提要：∵ $\angle BAC$与$\angle EAH$互补，由定理141得

$$\frac{S_{\triangle AHE}}{S_{\triangle ACB}} = \frac{AH \cdot AE}{AC \cdot AB} = 1,$$

∴ $S_{\triangle AEH} = S_{\triangle ABC}$.

10．设以直角三角形的三边为对应边作相似的凸多边形，则立于弦的多边形的面积，等于立于勾及股的多边形的面积之和.

提要：设直角△ABC的三边AB、AC、BC依次为勾、股、弦，对应于三边的相似凸多边形的面积依次为S_1、S_2、S_3，由定理143，有

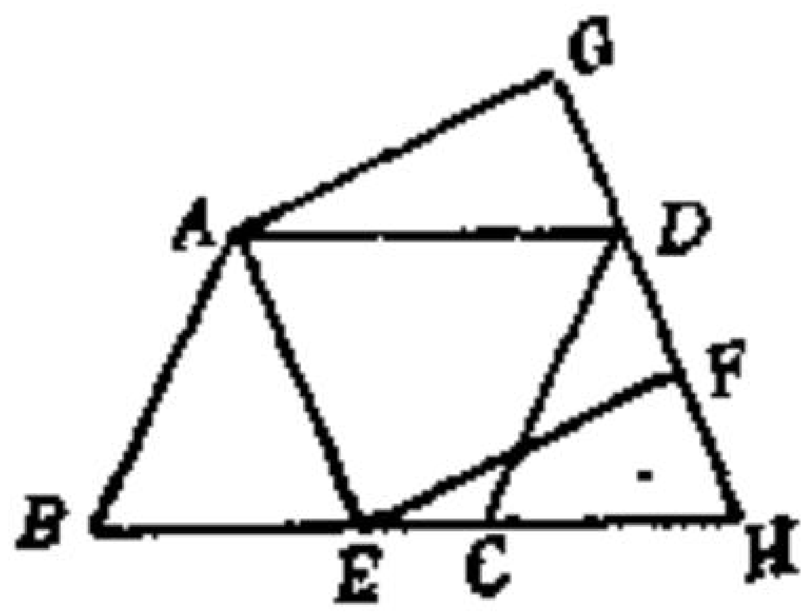
$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{AB^2}{BC^2},\quad \frac{S_2}{S_3} = \frac{AC^2}{BC^2},\quad \therefore \frac{S_1}{S_3} + \frac{S_2}{S_3} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = 1.$$

11．已知▱$ABCD$，作直线$AE//DF$，设前者交BC于E，又作$EF//AG$，设二者交DF于F、G，

求证：

$S_{▱AEFG} = S_{▱ABCD}$.

证：$S_{▱AEFG} = S_{▱AEHD} = S_{▱ABCD}$.

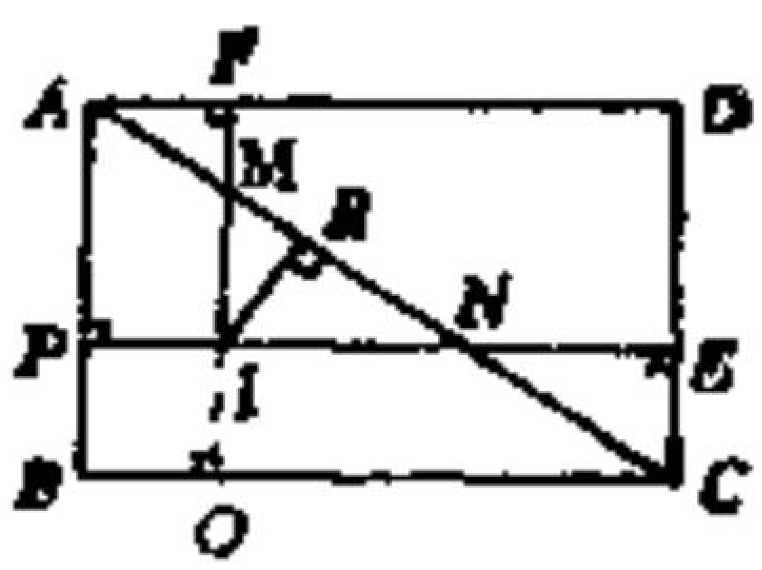

图5—11

12．在矩形$ABCD$中，设I是△ABC的内心，引$IE \perp CD$于E，$IF \perp DA$于F，求证

$S_{□IEDF} = S_{□ABCD}/2$

提要：$S_{\triangle AFM} = S_{\triangle MRI}$，

$S_{\triangle NRI} = S_{\triangle NCE}$.


图5—12

13. 在凸四边形 $ABCD$ 中，E 是对角线 BD 的中点，过 E 引 EF 平行于 AC 而设交 BC 于 F，求证 AF 平分四边形.

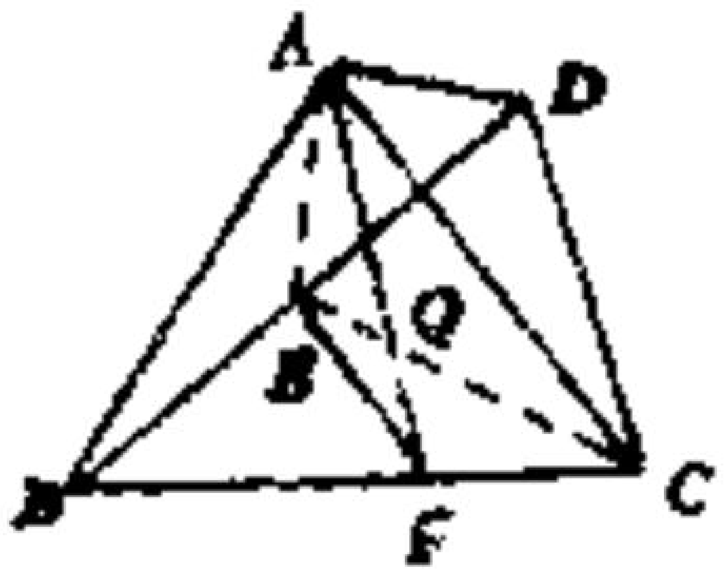


图5—13

提要：∵ $S_{\triangle QEA}=S_{\triangle QCF}$，

∴ $S_{\triangle ABF}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle CBE}$

$=(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD})/2$.

14. 在凸四边形 $ABCD$ 中，设 E、F、G、H 各是四边 AB、BC、CD、DA 的中点，I、J 各是两对角线 AC、BD 的中点，引直线 $IO//BD$ 及 $JO//AC$，求证：

$$S_{◇OHAE}=S_{◇OEBF}=S_{◇OFCG}=S_{◇OGDH}$$

提要：∵ $OI//BD//EH$，$IE//CB$，$IH//CD$，

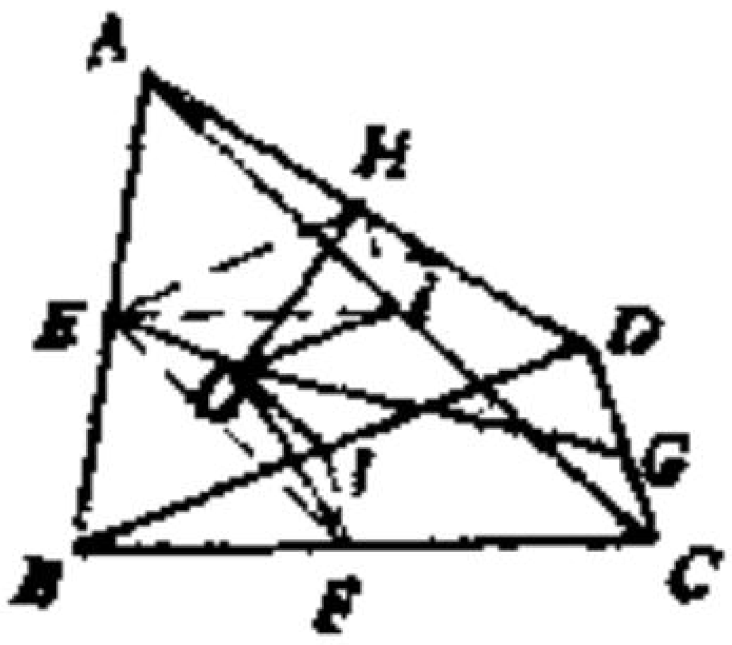


图5—14

∴ $S_{◇OHAE}=S_{\triangle OHE}+S_{\triangle AHE}$

$=S_{\triangle IHE}+S_{\triangle AHE}$

$=S_{\triangle AEI}+S_{\triangle AIH}$

$=(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD})/4$

$=S_{◇ABCD}/4$.

15. 在△ABC 中，$AC:AB=1:2$，设 A 角的内、外平分线交直线 BC 于 E、F，求证：

$$S_{\triangle ACE}:S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AEF}=1:2:3:4$$

提要：由定理140推论2°.

$S_{\triangle ACE}:S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AEF}$

$=CE:BE:BC:EF=1:2:3:4$.

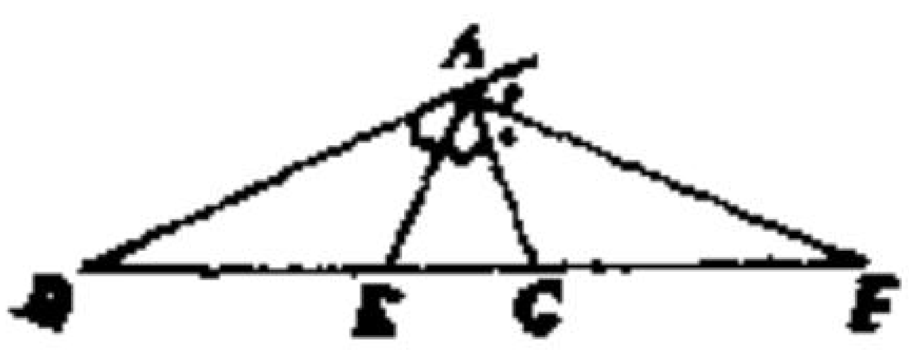


图5—15

16. 设 D、E、F 各是△ABC 的 BC、CA、AB 三边上的

点，且 $DE//AB$，$DF//CA$，求证：

$$S_{\triangle AEF}=\sqrt{S_{\triangle BFD}\cdot S_{\triangle CDE}}$$

提要：

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BDF}}=\frac{AF}{BF}=\frac{CD}{BD}=\frac{CE}{AE}=\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle AEF}}.$$

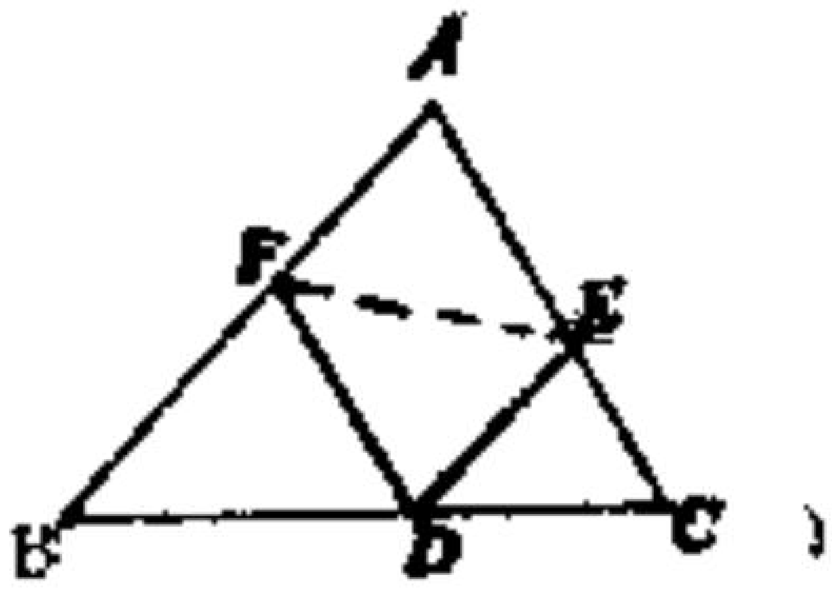


图5—16

17．问沙田一段，有三斜，其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里，里法三百步，欲知为田几何．

解 $a=15$ 里，$b=14$ 里，$c=13$ 里，且 1 里$=300$ 步，1 顷$=24000$方步，由秦九韶公式得：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[(13\times15)^2-\left(\frac{15^2+13^2-14^2}{2}\right)^2\right]}=84\text{里}^2$$

$$=7560000\text{步}^2=315\text{顷}.$$

18．设一扇形的顶角为 2 弪，则这扇形与以它的半径为边长的正方形等积．

提要：扇形面积$=2\times\gamma^2/2=\gamma^2$．

19．设 AB 是半圆形的直径，C、D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的三等分点，求证：AC、AD 两弦与 $\overset{\frown}{CD}$ 所围成的图形的面积，等于半圆形面积的三分之一．

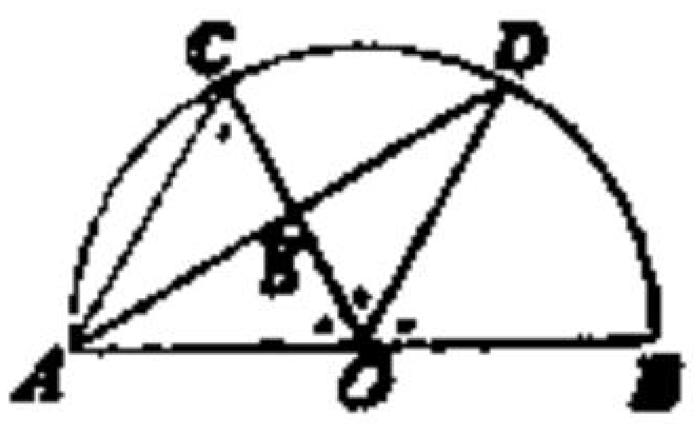


图5—19

提要：$S_{\triangle EAC}=S_{\triangle EDO}$，扇形 OCD 的面积等于半圆形面积的1/3．

20．以直角扇形 OAB 的 AB 弦为直径作不过 O 点的半

圆，求证这半圆与扇形的弧所围成的镰刀形的面积，等于$\triangle OAB$的面积．

提要：$\because$ $AB=\sqrt{2}\gamma$，$AM=\frac{1}{2}\sqrt{2}\gamma$

$\therefore$ $S_3=$半圆面积$-$（扇形面积$-S_1$）

$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\gamma^2+S_1$

$=S_1$．

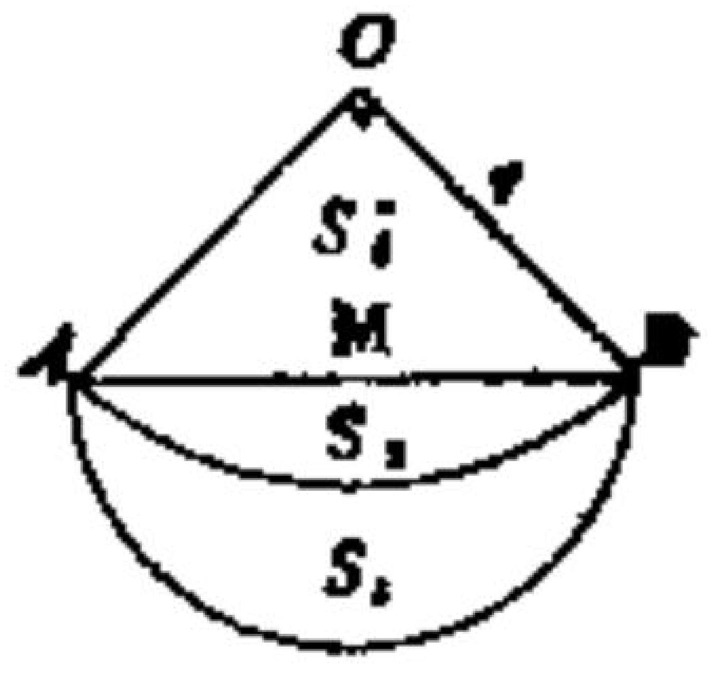


图5—20

21．设以直角$\triangle ABC$的勾AB及股AC各为直径向外边作半圆，又以弦BC为直径作半圆BAC，求证：这三个半圆所围成两个镰刀形的面积和，等于直角$\triangle ABC$的面积．

（Hippocrates定理）



图5—21

证：$S_1+S_2=$半圆$_{AB}+$半圆$_{AC}+S_3-$半圆$_{BC}=S_3$

这里，半圆$_{AB}$表示以AB为直径的半圆的面积．

复习题一

1．凸多边形的内角不能有多于三个锐角．

提要：若锐角可多于三个，例如说有四个，则相应地，有四个外角均大于90°，这与定理41的推论矛盾．故不能多于三个．

2．平行四边形各外角的平分线交成一个矩形，这矩形的对角线等于平行四边形两邻边的和。

提要：(1) $\angle IDC+\angle JCD=180^\circ$.

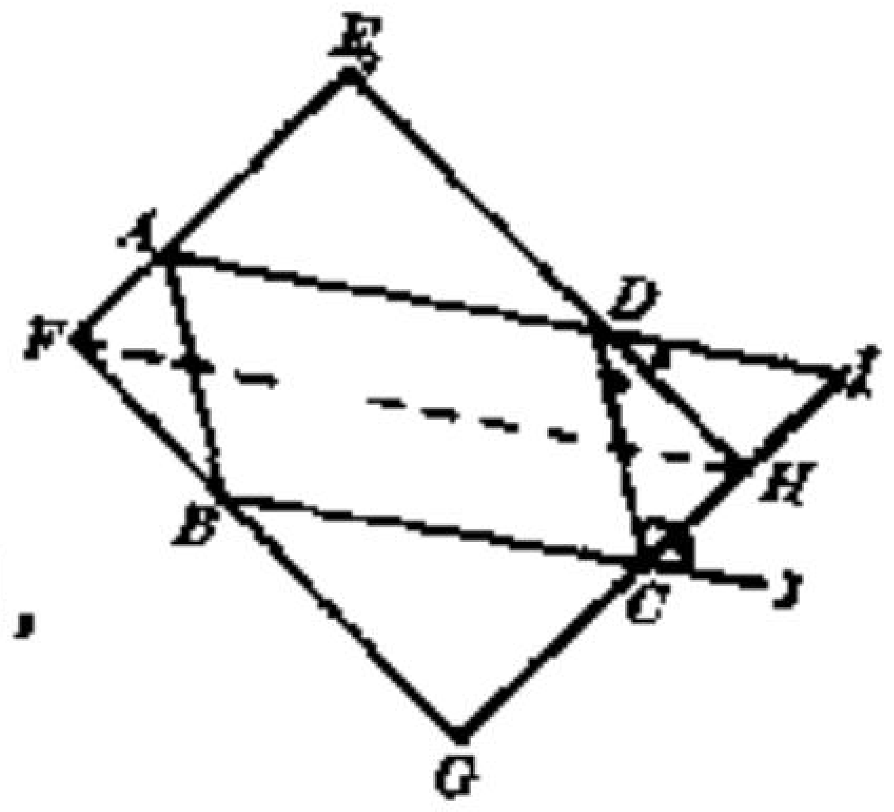
故$\angle DHC=90^\circ$.

有 $EFGH$ 为矩形；

(2) $\triangle DHC\cong\triangle DHI\cong\triangle BFA$,

有 $AFHI$ 为平行四边形，

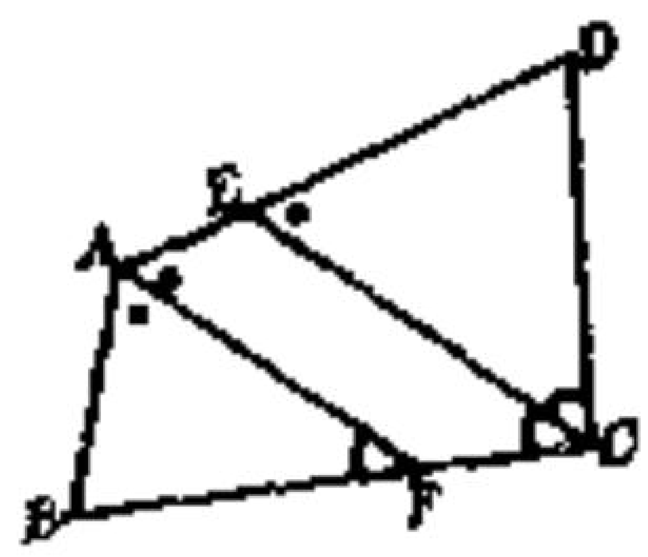
故 $FH=AI=AD+DI=AD+DC$.

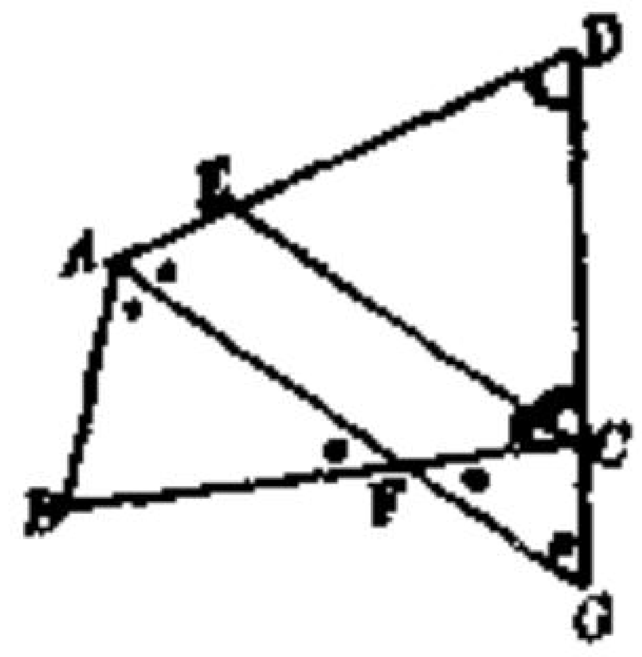


图复——2

3．凸四边形中，若一双对角的平分线或平行或重合，则他双对角相等，逆过来说，若一双对角相等，则他双对角的平分线或平行或重合，

提要：(1) $\angle BAF+\angle BFA=\angle DCE+\angle DEC$





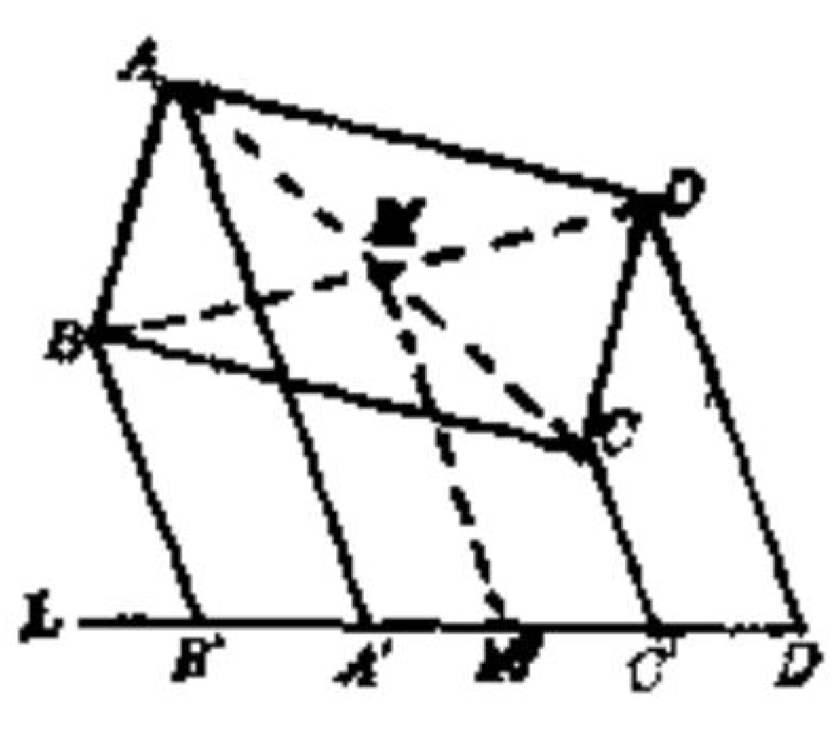
图复——3(1)　　图复——3(2)

(2) 由 $\angle AFB=\angle AGD$, $\angle BCE+\angle ECD=\angle CFG+\angle CGF$. 可得$\angle AGD=\angle ECD$, 故 $AF\parallel CE$.

4．过▱$ABCD$ 的顶点分别作 $AA'\parallel BB'\parallel CC'\parallel DD'$．设这四直线交某一直线于 A'、B'、C'、D'．求证：$AA'+CC'=BB'+DD'$

提要，$AA'+CC'=2MM'$

$BB'+DD'=2MM'$.



图复——4

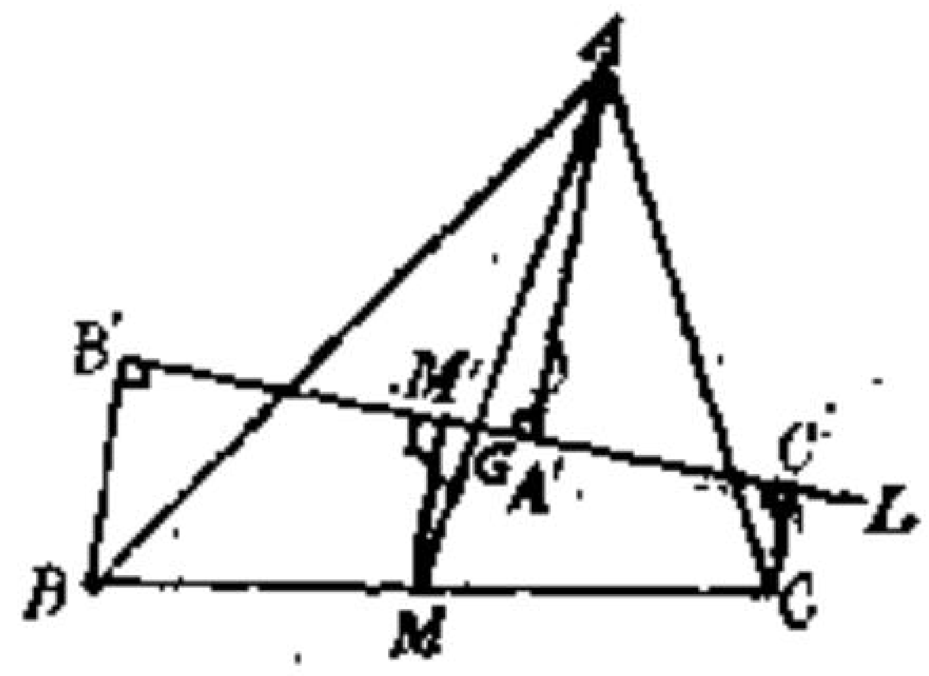
5．设通过三角形的重心作一直线，则在此直线同侧的

两顶点与此直线的距离和，等于第三顶点与此直线的距离.

提要：$BB'+CC'=2MM'$

由$\triangle AA'G\backsim\triangle MM'G$

有$AA'=2MM'$.



图复——5

6．过$\triangle ABC$的顶点及重心G分别作$AA'\parallel BB'\parallel CC'\parallel GG'$，设四直线交某一直线于$A'$、$B'$、$C'$、$G'$.

求证：$AA'+BB'+CC'=3GG'$.

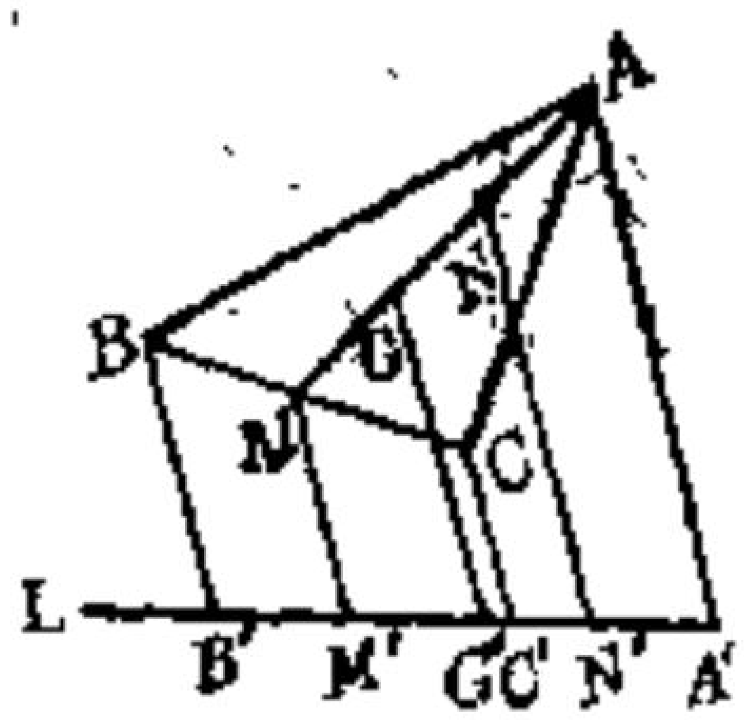
提要：M、N为BC及AG的中点，

有$BB'+CC'=2MM'$

$AA'+GC'=2NN'$

$2MM'+2NN'=4GG'$

三式相加并消去MM'，NN' 即可.



图复——6

7．正多边形的边心距，不小于外接圆半径的一半.

提要：AB为正多边形的一边，OA为外接圆半径，M为OA的中点，OD为边心距.

∵ $\triangle MOD$为等腰三角形，

∴ $\angle MDO=\angle MOD=\pi/n$.

故$\angle OMD-\angle MDO=(\pi-2\pi/n)-\pi/n$

$=\pi(1-3/n)\geqslant0$

当$n=3$时等号成立，

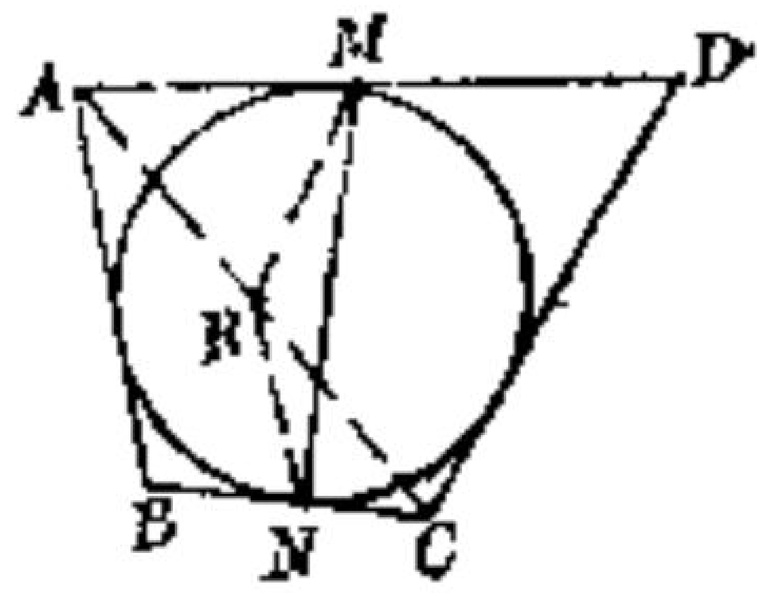
∴ $OD\geqslant OM$ 即 $OD\geqslant\gamma/2$;



图复——7

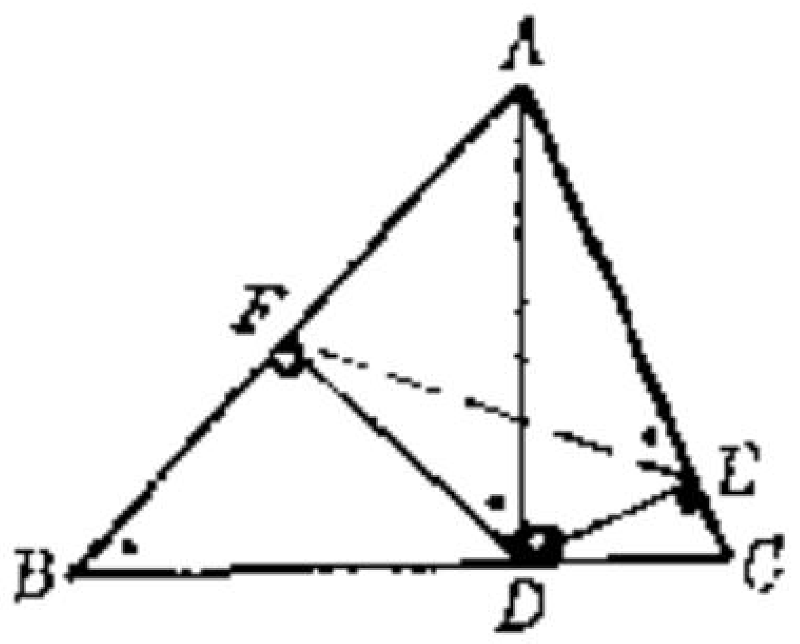
8．有内切圆的四边形，它的任一双对边中点的连线不大于周长的四分之一.

提要：M、N、R 为 AD、BC、AC 的中点，则 $MN<RM+RN=\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}AB=(AB+BC+CD+DA)/4$. 当四边形 $ABCD$ 为正方形或菱形时，有等号成立.

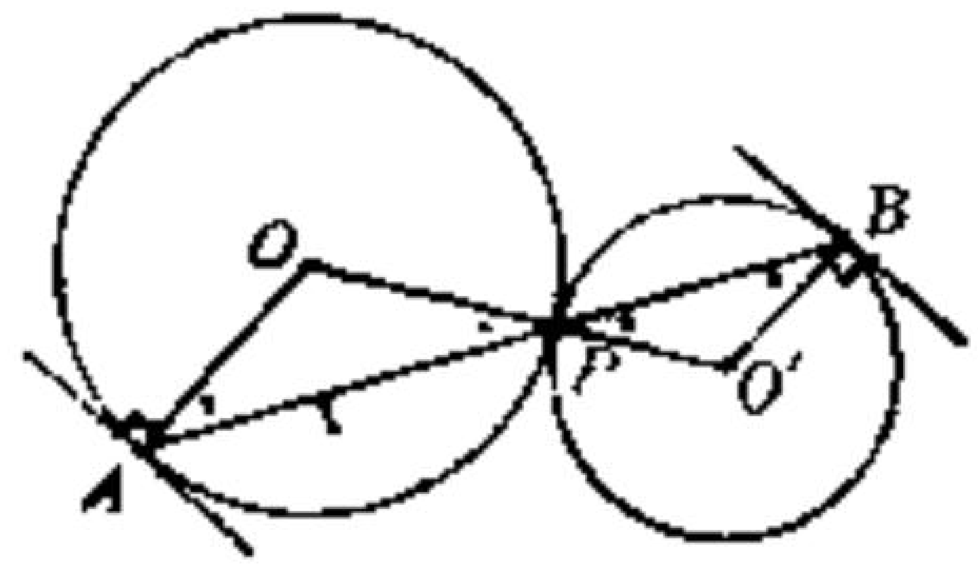


图复——8

9. 在$\triangle ABC$中，引 $AD\perp BC$ 于 D，$DE\perp AC$ 于 E，$DF\perp AB$ 于 F，求证：B、C、E、F 四点共圆.



图复——9

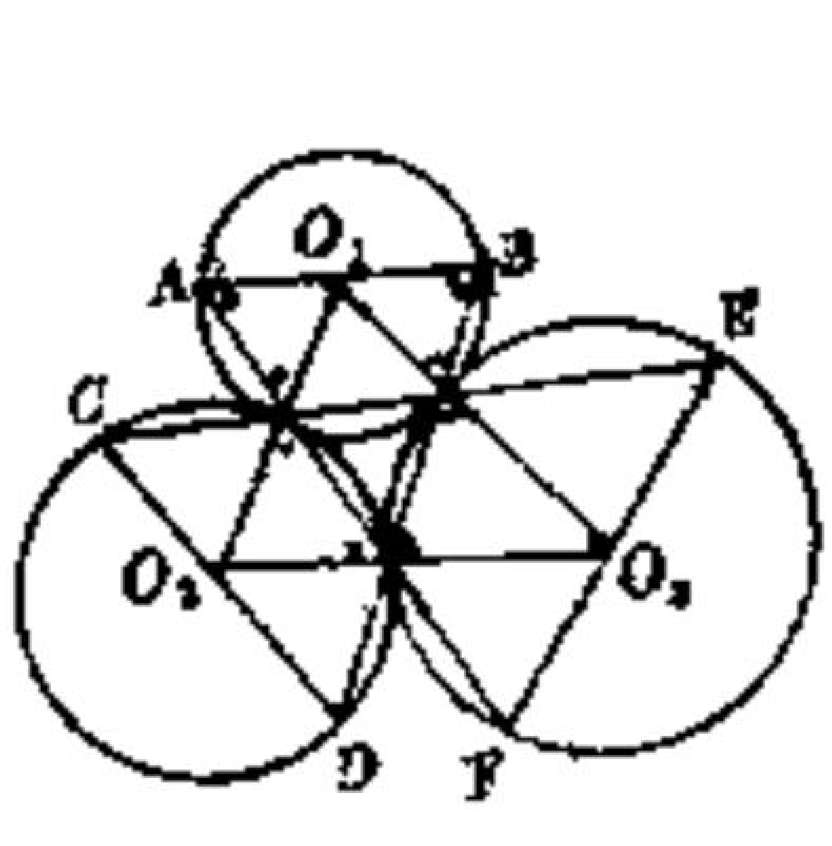


图复——10

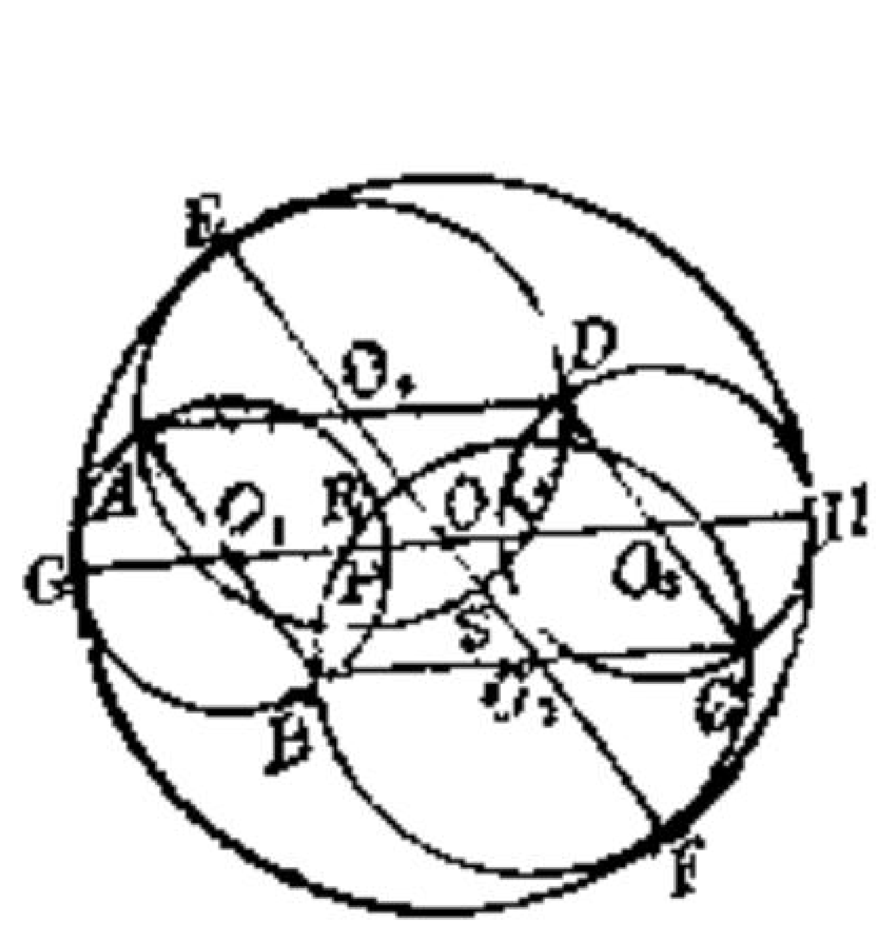
10. 设两圆相切于 P 点，过 P 作一直线交两圆于 A、B，则过这两交点各作所在圆的切线必互相平行.

11. 设三圆两两相切，通过每两切点作直线分别与各圆相交，求证：每圆上两交点各为一直径的两端.

提要：$O_1A\parallel O_2O_3$，$O_1B\parallel O_2O_3$.



图复——11



图复——12

12. 以平行四边形各边分别为直径作圆，求证：所作四圆

有两个公切圆．当平行四边形是菱形时，两公切圆中有什么变态？

提要：(1) 设O是平行四边形两对角线的交点，则O_1、O、O_3；O_2、O、O_4均共线．

$$\because \quad OG = OO_1 + O_1G = \frac{1}{2}(BC + AB)$$

$$\text{且} \quad OG = OH = OE = OF = \frac{1}{2}(BC + AB)$$

$$(2)\ OR = O_2R - O_2O = \frac{1}{2}|BC - AB|$$

$$\text{且} \quad OP = OG = OR = OS = \frac{1}{2}|BC - AB|$$

故所作四圆有两个公切圆．

(3) 当平行四边形为菱形时，$|BC - AB| = 0$，故第二个公切圆变为点圆．

13．设$\triangle ABC$的内切圆及对着A、B、C的旁切圆分别切BC、CA、AB于X、Y、Z；X_1、Y_1、Z_1；X_2、Y_2、Z_2；X_3、Y_3、Z_3．令$BC=a$、$CA=b$、$AB=c$，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$．

求证：(1) $AY = AZ = BZ_3 = BX_3 = CX_2 = CY_2 = s - a$；

(2) $BZ = BX = CX_1 = CY_1 = AY_3 = AZ_3 = s - b$；

(3) $CX = CY = AY_2 = AZ_2 = BZ_1 = BX_1 = s - c$；

(4) $AY_1 = AZ_1 = BZ_2 = BX_2 = CX_3 = CY_3 = s$；

(5) $XX_1 = |b - c|$、$YY_2 = |c - a|$、$ZZ_3 = |a - b|$；

(6) $X_2X_3 = b + c$、$Y_3Y_1 = c + a$、$Z_1Z_2 = a + b$；

(7) $YY_1 = ZZ_1 = Y_2Y_3 = Z_2Z_3 = a$；

$ZZ_2 = XX_2 = Z_3Z_1 = X_3X_1 = b$；

$XX_3 = YY_3 = X_1X_2 = Y_1Y_2 = c$．

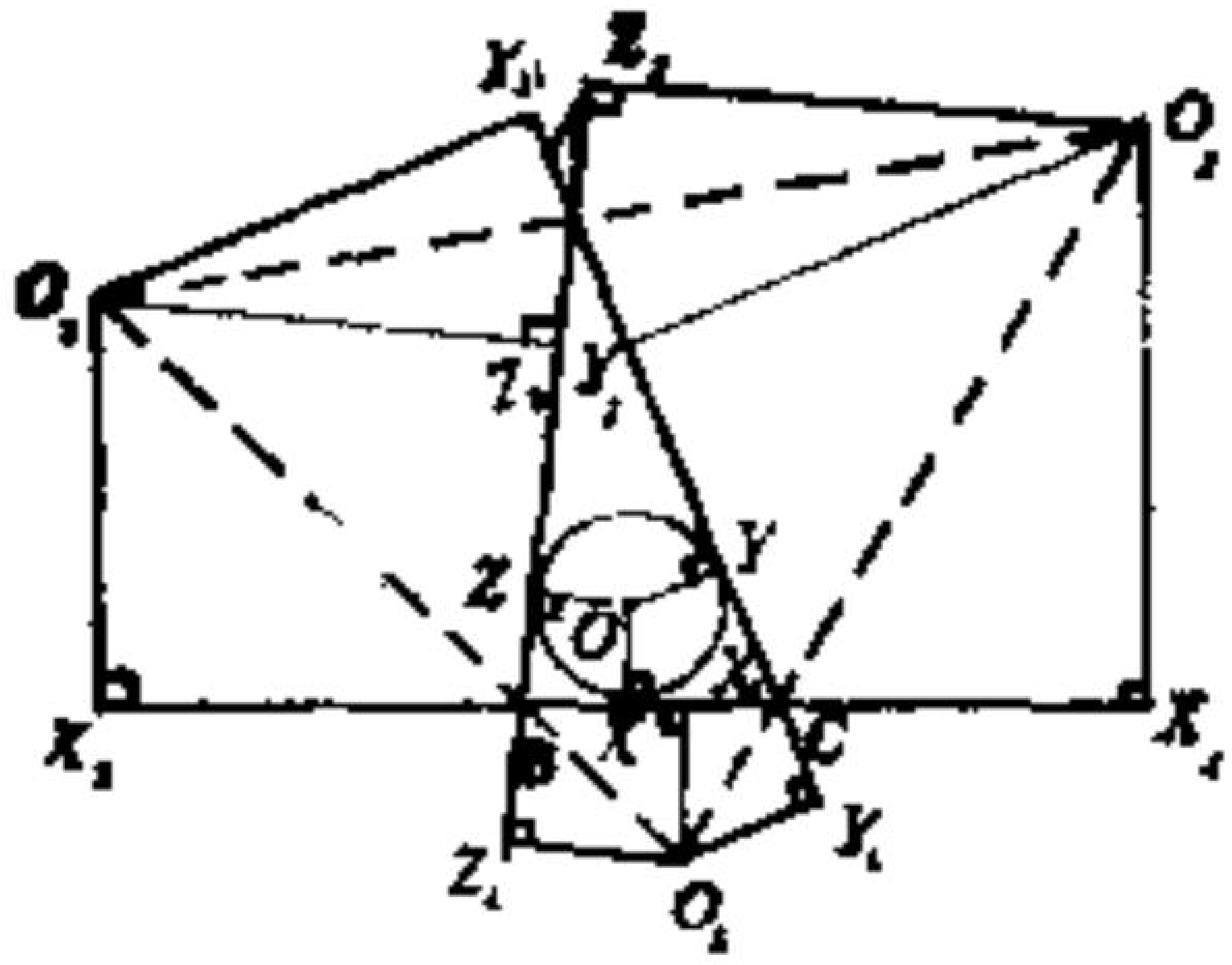
提要：(1)

$\because \quad AB+BC+CA=AB+AZ_2+BC+CX_2=BZ_2+BX_2=2BX_2$

$\therefore \quad BX_2=s$

故 $CX_2=BX_2-BC=s-a$，

(5) $XX_1=BX-BX_1=(s-b)-(s-c)=|b-c|$.



图复——13

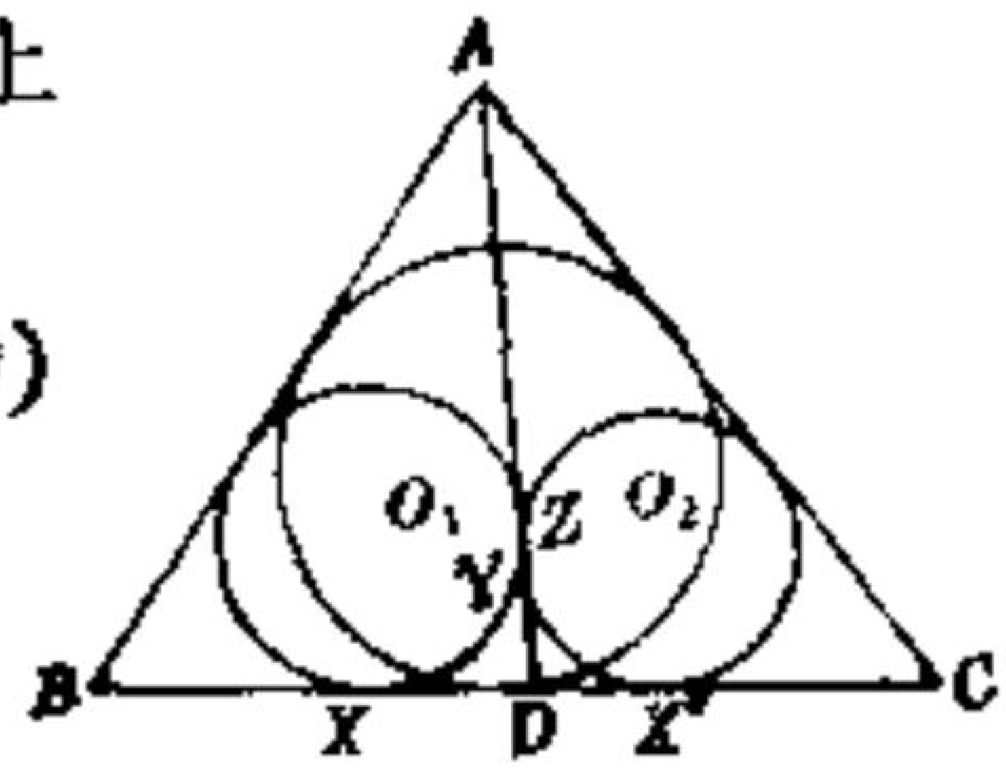
(6) $X_2X_3=X_3B+BX_2=s-a+s=2s-a=b+c$.

14．设D是$\triangle ABC$的内切圆与BC的切点，求证：$\triangle ABD$与$\triangle ACD$的内切圆相切，

提要：设$\odot O_1$、$\odot O_2$分别切BC于X、X'，切AD于Y、Z，由上题(1)、(2)、(3)有$BD=s-b$，$CD=s-c$且$AY=\frac{1}{2}(c+BD+AD)-BD$

$AZ=\frac{1}{2}(b+CD+AD)-CD$

故 $AY=AZ$.



图复——14

15．设四边形$ABCD$有内切圆，则$\triangle ABC$与$\triangle CDA$的内切圆相切；$\triangle BCD$与$\triangle DAB$的内切圆也相切.

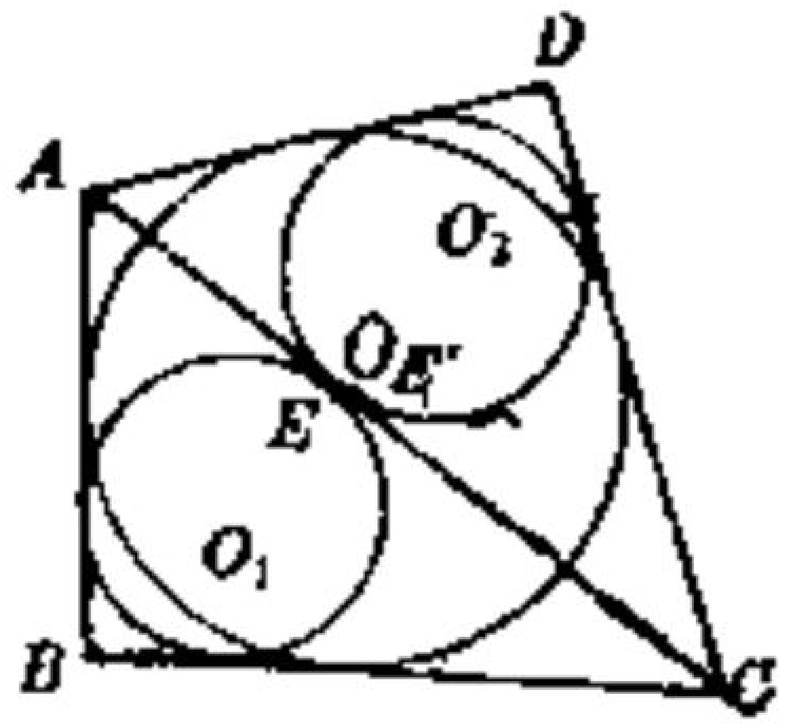
提示：设△ABC与△CDA的内切圆与AC的切点分别为E、E'．由第13题有：

$$AE=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)-BC$$

$$AE'=\frac{1}{2}(AC+CD+DA)-CD$$

由 $AB+CD=BC+DA$

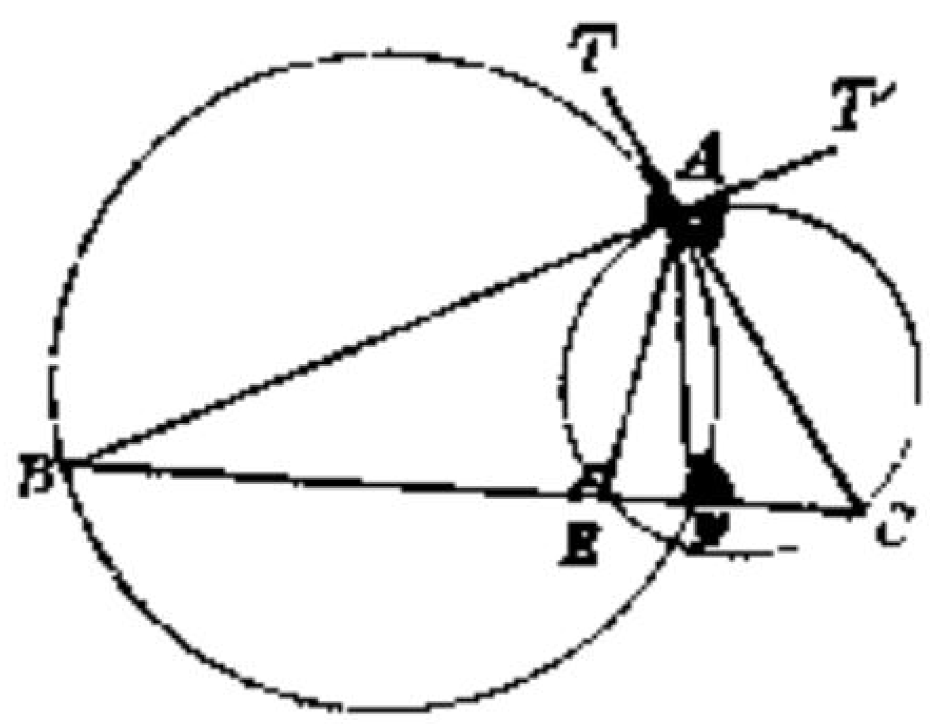
得 $AE=AE'$.



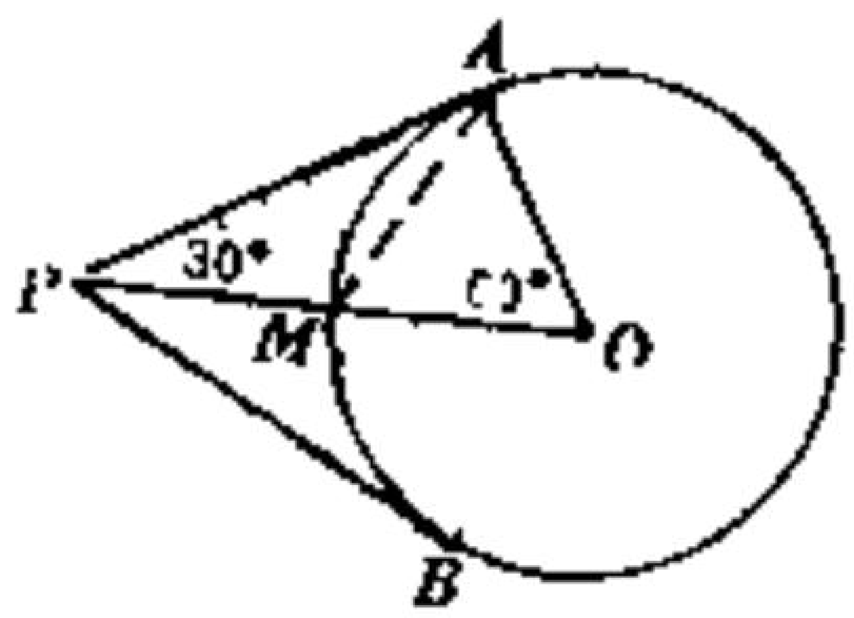
图复一—15

16．在△ABC中，设以AB为弦且切于AC的圆及以AC为弦且切于AB的圆交BC于E及F．则$AE=AF$.

提要：由$\angle TAB=\angle AFB$，$\angle T'AC=\angle AEC$．得$\angle AFB=\angle AEC$ 故△AEF为等腰三角形.



图复一—16



图复一—17

17．若圆外一点对圆的视角为60°，则该点与圆心所连线段必被圆周平分.

18．设I为△ABC的内心或旁心，AI交外接圆于P，则$PI=PB=PC$.

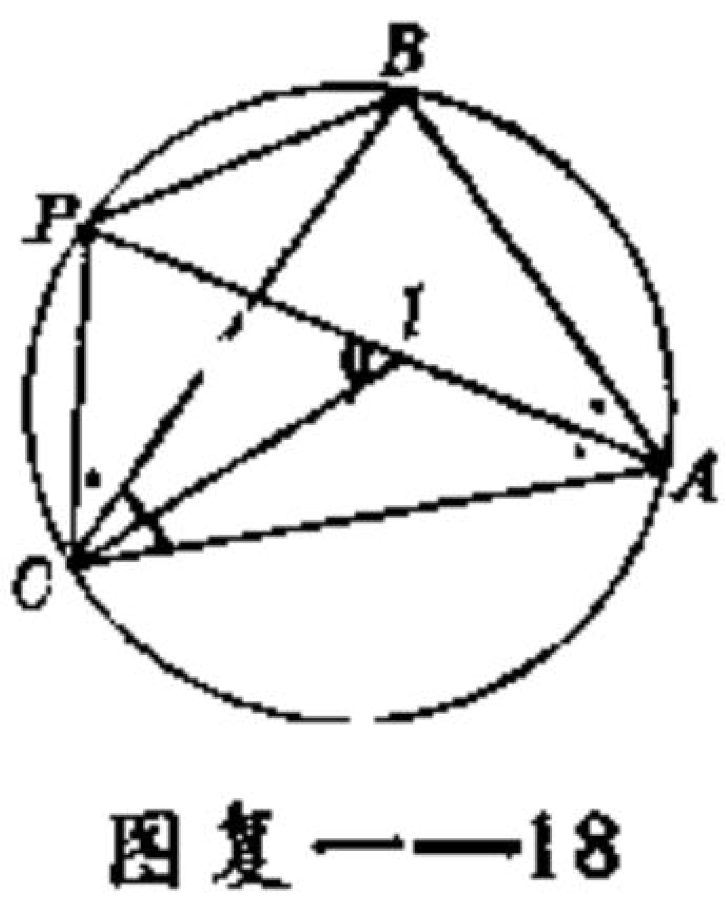
提要：

$\because\ \angle PIC=\angle IAC+\angle ICA$

$\qquad=\angle PCB+\angle ICB$

$\therefore\ PI=PC$.

I为旁心时可类似处理.



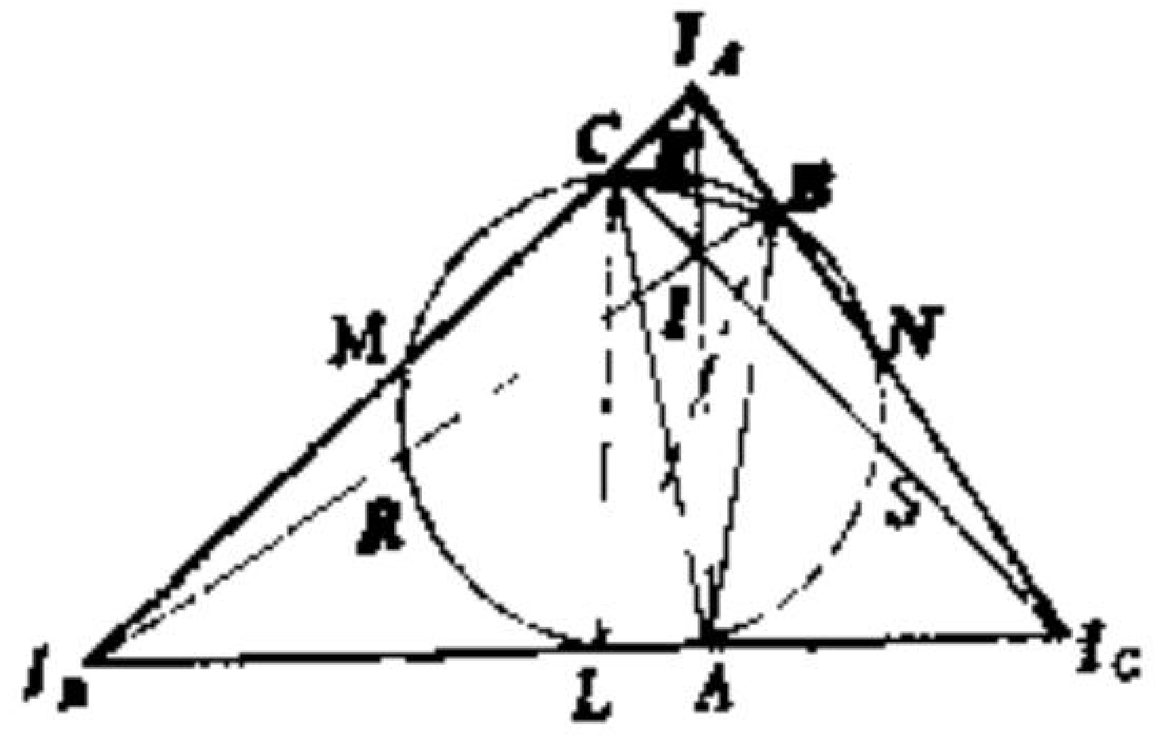
图复一—18

19．三角形的内心与旁心，或旁心与旁心所连线段，必被外接圆平分。

提要：I_BAI_C 交⊙ABC 于 L．由上题

$LI_B = IB = IC = II$

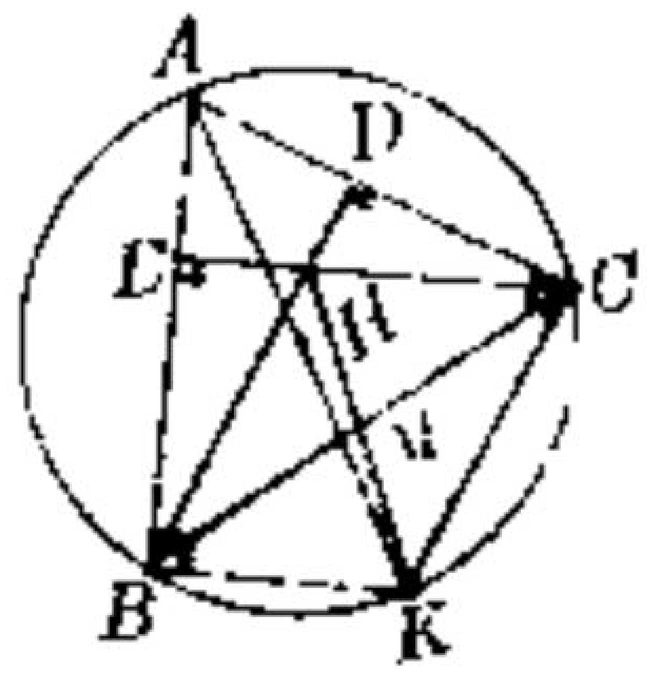
故 I_BI_C 被 L 平分．



图复——19

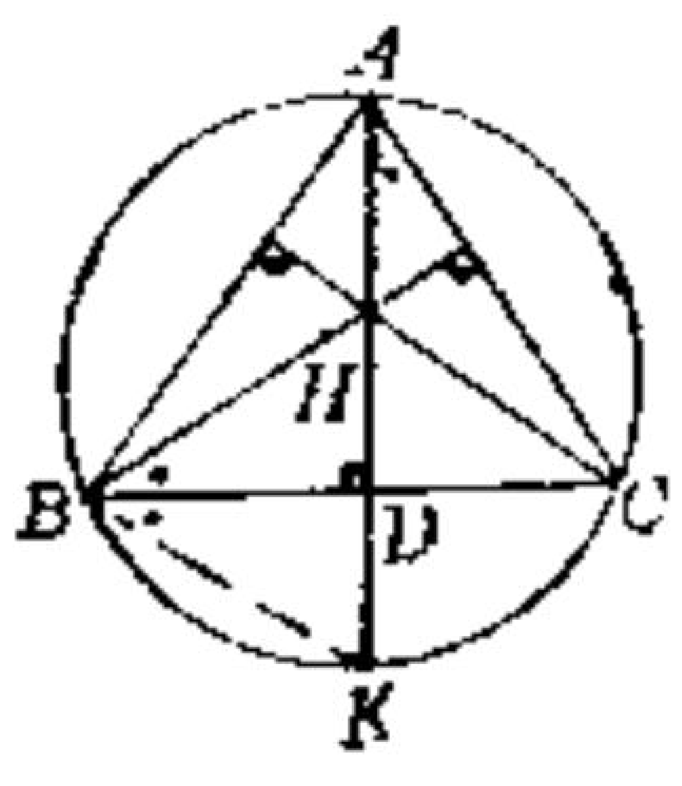
20．H 是△ABC 的垂心，AK 是外接圆的直径．试证：HK 与 BC 互相平分．

提要：BD、KC 均垂直于 AC；CE、KB 均垂直于 AB，故 $BKCH$ 为平行四边形．

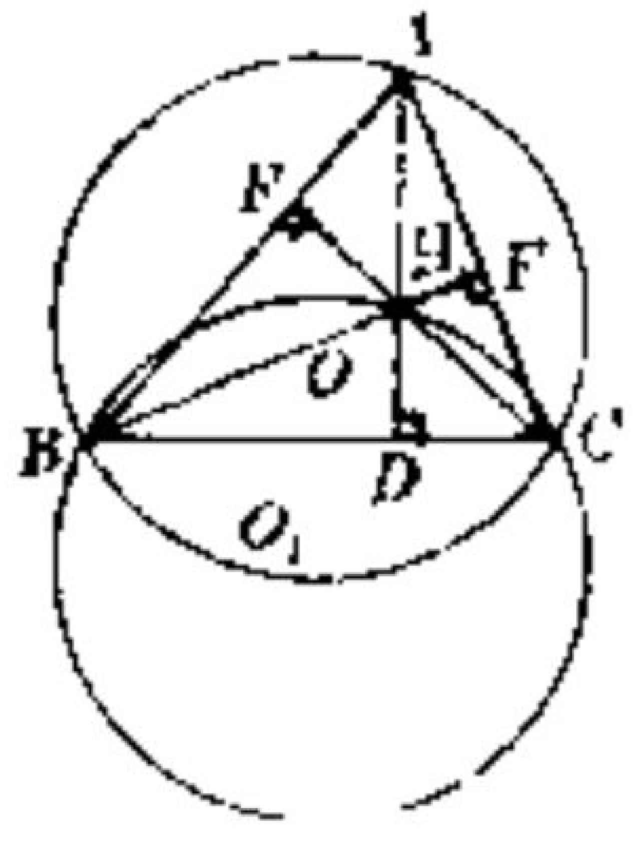


图复——20

21．设 H 是△ABC 的垂心，AH 交 BC 于 D 而交外接圆于 K，求证：$DH = DK$．



图复——21



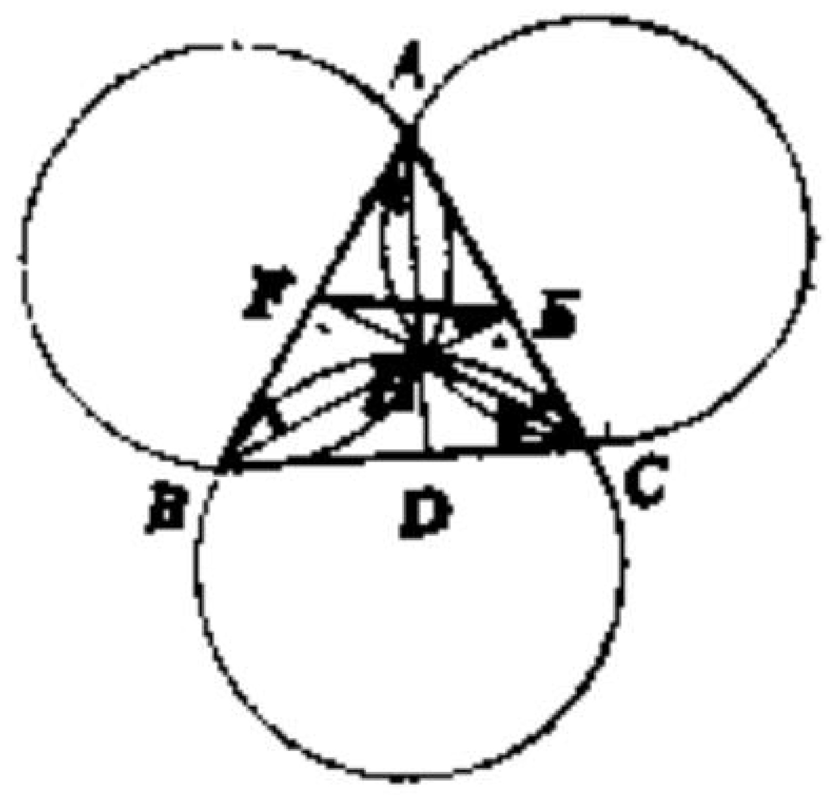
图复——22

22．设 H 是△ABC 的垂心，则⊙HBC、⊙HAB、⊙HCA、⊙ABC 均相等．

提要：∵ $\angle BHC + \angle BAC = 180°$

由定理86得⊙HBC = ⊙ABC．

23 设三等圆会于一点，则这点和其他三个交点必构成一垂心组.



图复——23

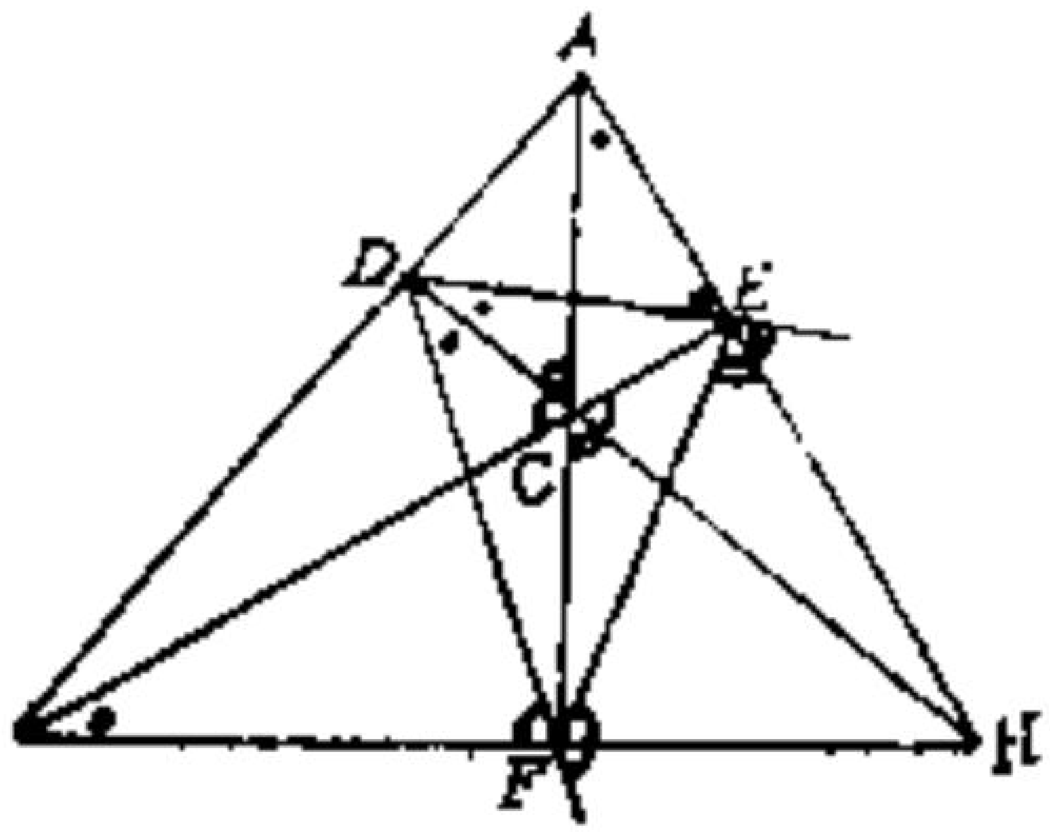
提要：∵ $\angle ABH=\angle ACH$，有 B、C、E、F 四点共圆，由 $\angle BAH=\angle BCH=\angle BEF$，有 A、F、H、E 四点共圆.

∴ $\angle BFC=\angle BEC=\angle AFH=90^\circ$

故 $CF\perp AB$，可得 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

24．三角形的垂心是垂三角形的内心或旁心，视乎原三角形是锐角的或钝角的而定，普遍地说，垂心组的四点是它的垂三角形的内心和旁心.

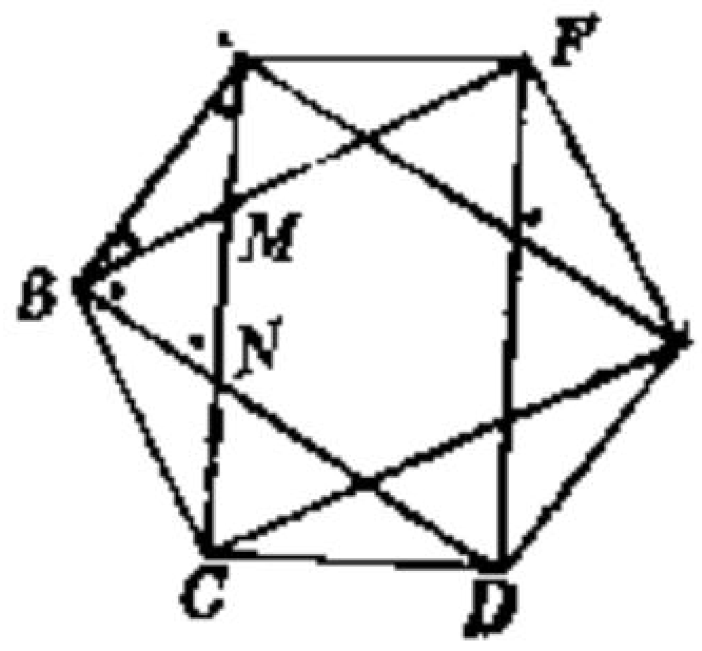
三角形（非直角的）三个高线足连成的三角形，叫做原三角形的垂三角形，垂心组中任三点连成的三角形，有共同的垂三角形，我们仍把它叫做垂心组的垂三角形.



图复——24

提要：当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，由 C、F、H、E；C、F、B、D；C、D、A、E 四点共圆，可得 H 为 $\triangle DEF$ 的旁心

25．正六边形中，六条短对角线分别相交，试证每条均被三等分.



图复——25

提要：正六边形的六角之和为 $(6-2)\times180^\circ=720^\circ$，故每一内角为 120°．又 $\triangle BDF$ 为正三角形

∴ $\angle MAB=\angle MBA=30^\circ$，

$\angle MBN=\angle MNB=60^\circ$，

故 AC 被 M、N三等分

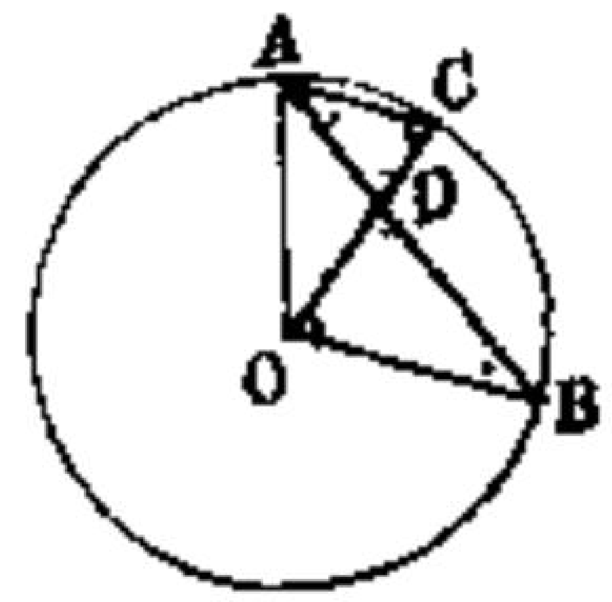
26．在一圆中，108°的圆心角所夹的弦等于半径与内接正十边形的边长之和．

提要：$\angle AOC=\angle OAB=\angle OBA=36°$

$\angle OAC=\angle OCA=\angle ADC=\angle BDO$

$=\angle BOD=72°$

$\therefore\ AC=AD\quad BO=BD$．



图复一—26

27．试证，可用下列各组正多边形来铺满平面，但每组正多边形有相等的边长；

（1）正方形与正八边形；

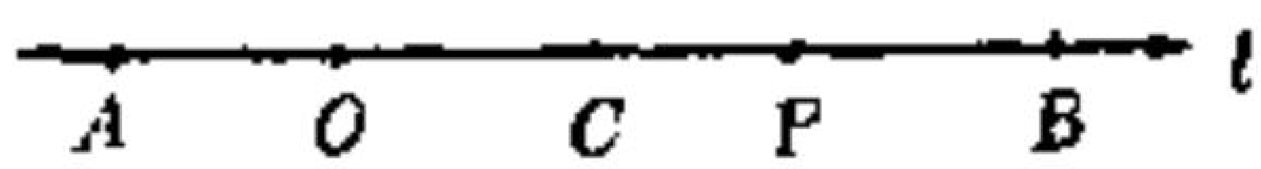
（2）正三角形与正十二边形；

（3）正五边形与正十边形．

提要（1）：正八边形每个内角$=(8-2)\times180°\div8=135°$，其外角为45°．因此，当两个正八边形挨边排紧时，其两个外角和恰为90°，故可用边长相同的正方形恰好补满．

28．设 A、B、C、P 是一直线上的任意四点，则

$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=0$（Euler 定理）



图复一—28

解：$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}$

$=\overline{AP}\cdot\overline{CB}-(\overline{OB}-\overline{OP})\cdot\overline{AC}-\overline{CP}\cdot\overline{AB}$

$=(AO+OP)(OB-OC)-(OB-OP)(AO+OC)$

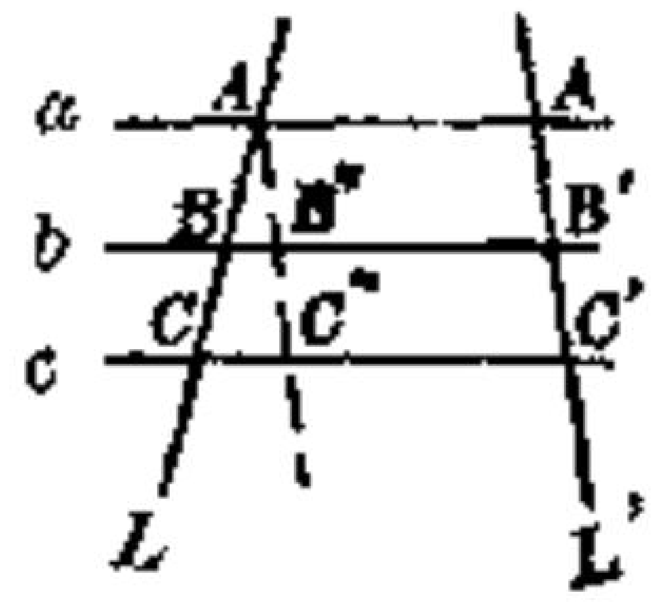
$-(OP-OC)(AO+OB)$

乘开相消后，其和为 0．

29．设三条互相平行的直线 a、b、c 各交两截线 L 及 L' 于 A、B、C 及 A'、B'、C'．

求证：$\overline{AA'}\cdot\overline{BC}+\overline{BB'}\cdot\overline{CA}+\overline{CC'}\cdot\overline{AB}=0$

提要：作 $AC''//L'$



有 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{BB''}}{\overline{CC''}}=\dfrac{\overline{BB'}-\overline{AA'}}{\overline{CC'}-\overline{AA'}}$

$\therefore\quad \overline{AB}(\overline{CC'}-\overline{AA'})=\overline{AC}(\overline{BB'}-\overline{AA'})$

展开并整理即可.

图复一—29

30．设 A、B、C、P 是一直线上任意四点，则
$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$

本题称斯蒂瓦特（stewart）定理.



图复一—30

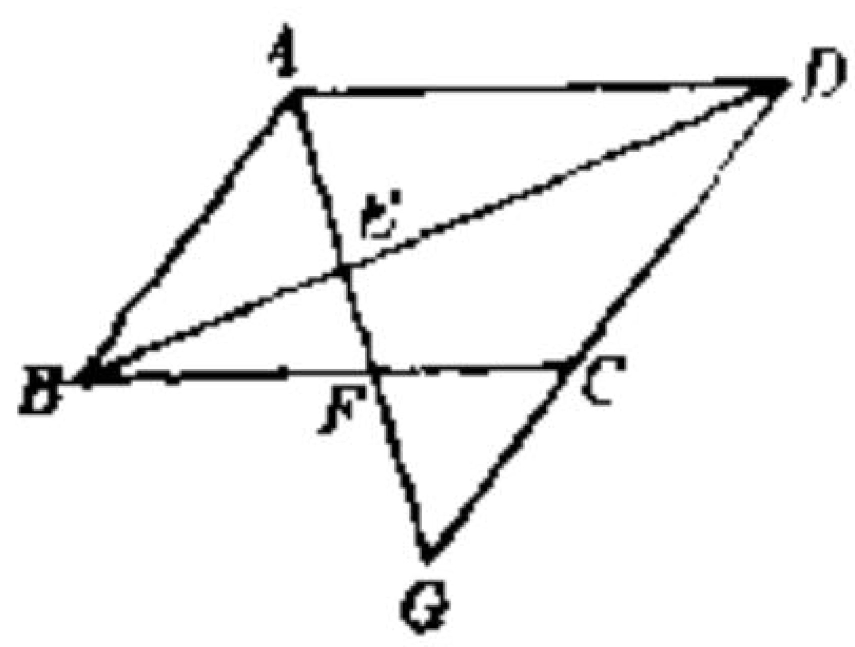
提要：$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$

$\overline{PA}^2(\overline{BP}-\overline{CP})+\overline{PB}^2(\overline{CP}-\overline{AP})+\overline{PC}^2(\overline{AP}-\overline{BP})$
$+(\overline{BP}-\overline{PC})(\overline{CP}-\overline{AP})(\overline{AP}-\overline{BP})$

展开整理得其和为零.

31．已知▱$ABCD$，过 A 引一直线设交 BD、BC、CD 于 E、F、G. 求证：

$\overline{AE}\cdot\overline{AF}=\overline{AG}\cdot\overline{EF}$



提要：$\triangle ADE\backsim\triangle FBE$，
$\triangle ADG\backsim\triangle FBA$

$\therefore\quad \dfrac{AE}{FE}=\dfrac{AD}{FB}=\dfrac{AG}{FA}$

图复一—31

即 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AF}}$

32．在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，P 是直线 BC 上的任意

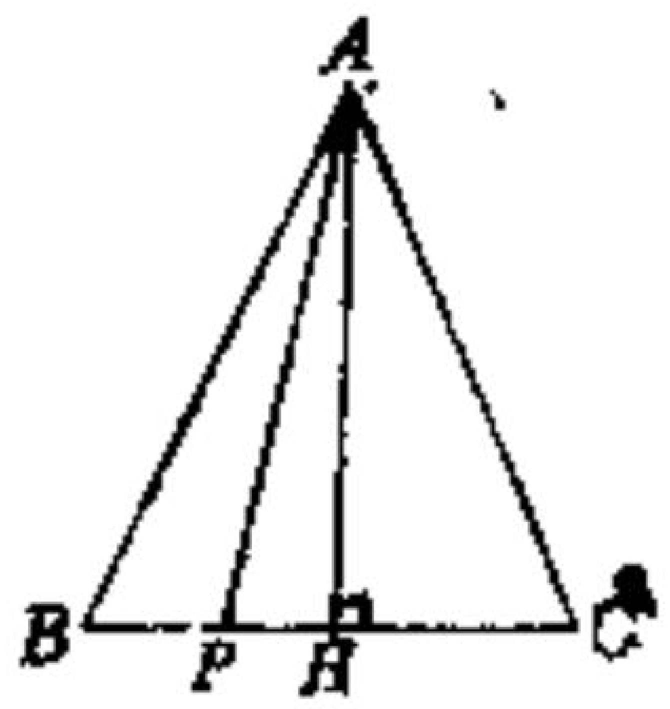
点，求证：$AP^2=AB^2+\overline{PB}\cdot\overline{PC}$

提要：$AP^2=AH^2+PH^2$

$=AB^2-BH^2+PH^2$

$=AB^2+(PH+BH)(PH-BH)$

$=AB^2+\overline{PB}\cdot\overline{PC}$



图复——32

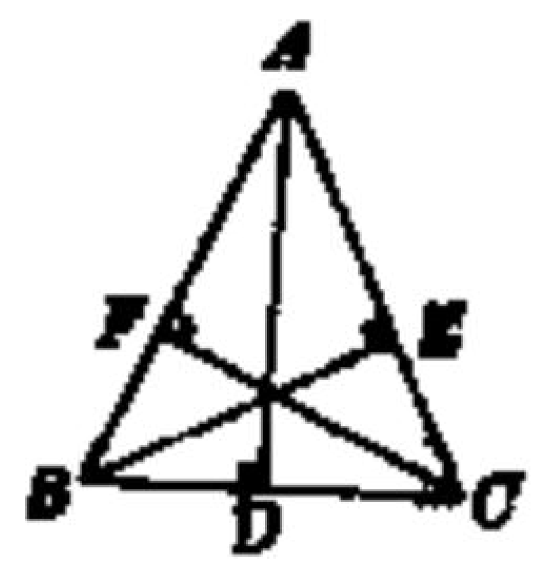
33．设 BE、CF 是 $\triangle ABC$ 的高，则 $BC^2=\overline{BA}\cdot\overline{BF}+\overline{CA}\cdot\overline{CE}$．

提要：由 $\triangle BAD\backsim\triangle BCF$

$\triangle CAD\backsim\triangle CBE$

有 $\overline{BA}\cdot\overline{BF}=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$

$\overline{CA}\cdot\overline{CE}=\overline{CD}\cdot\overline{CB}$



图复——33

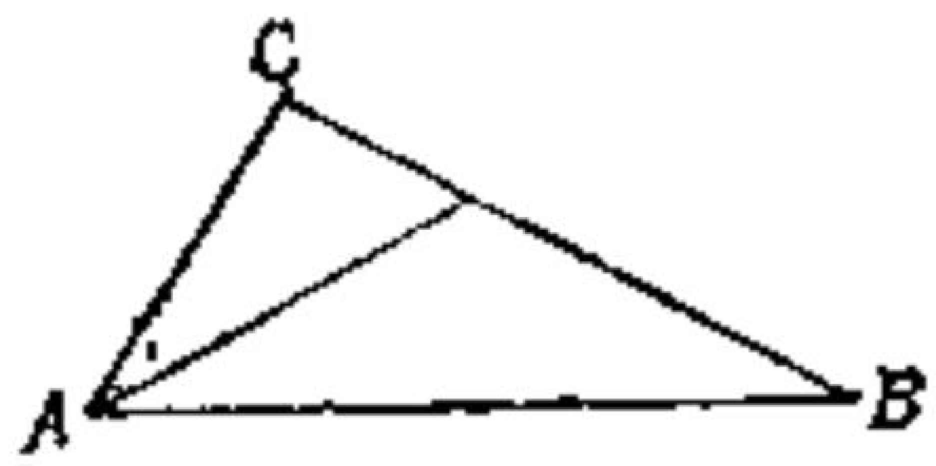
34．在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle BAC=2\angle ABC$，则 $BC^2=CA^2+CA\cdot AB$；逆过来说，若 $BC^2=CA^2+CA\cdot AB$，则 $\angle BAC=2\angle ABC$．

提要：(1) $\triangle DAC\backsim\triangle ABC$

有 $CA^2=CB\cdot CD$，

$AB\cdot AC=DA\cdot BC$

两式相加得 $CA^2+CA\cdot AB=BC^2$．



图复——34

(2) 当 $BC^2=CA^2+CA\cdot AB$ 时，作 $\triangle DAC\backsim\triangle ABC$，有 $CA^2+AB\cdot AC=CB(CD+DA)$ 比较两式有 $DA=DB$

$\therefore\ \angle BAC=2\angle ABC$．

35．若三角形一边的高线和中线将对角三等分，则这角

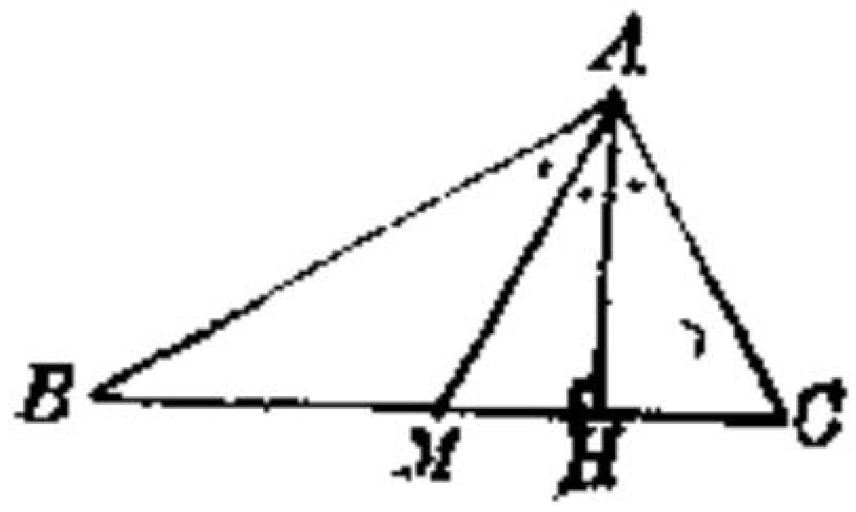
必是直角.

提要：$AM=AC$，

$HM=HC=\frac{1}{2}BM$.

∵ AM 是$\triangle BAH$的内角平分线

∴ $\frac{AB}{AH}=\frac{BM}{MH}=\frac{2}{1}$，即 $AH=\frac{1}{2}AB$



图复一—35

故$\angle BAH=60^\circ$，因而$\angle BAC$为直角.

36、直角三角形中，弦的立方大于勾股的立方和.

提要：令 a、b 为勾、股，c 为弦，有 $c>a$，$c>b$，由 $a^2+b^2=c^2$ 则 $a^2c+b^2c=c^3$

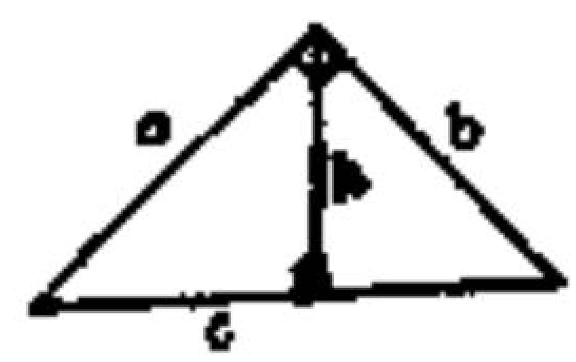
∴ $c^3>a^3+b^3$.

37．直角三角形的勾股平方之倒数和，等于弦的高的平方之倒数.

提要：由 $ab=ch$

有 $a^2b^2=h^2c^2=h^2(a^2+b^2)$

∴ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$



图复一—37

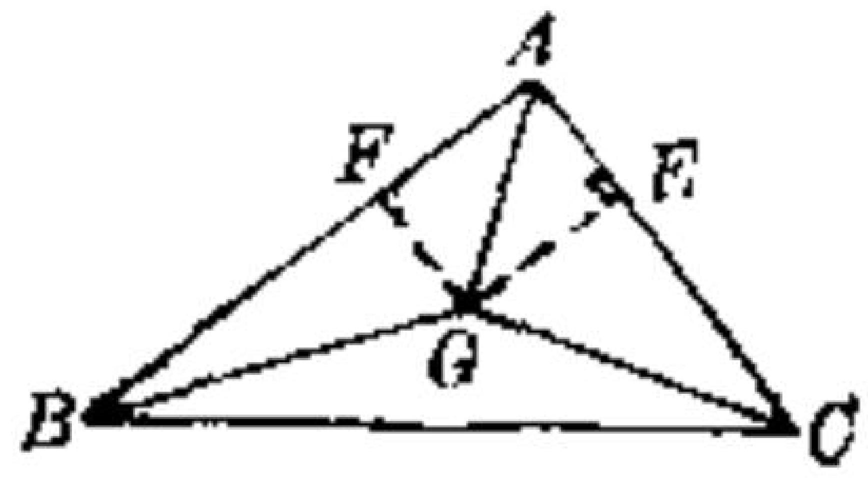
38．设 AD 是直角$\triangle ABC$ 的弦之高，E、F 是 D 在 AB AC 上的射影，则 $AD^3=BC\cdot BE\cdot CF$.

提要：$AD^4=DC^2\cdot BD^2=CF\cdot CA\cdot BE\cdot BA$

$=AD\cdot BC\cdot BE\cdot CF$

39．在直角$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，G 是重心，求证：$GB^2+GC^2=5GA^2$.

提要：$AE=\frac{1}{3}AC$，$AF=\frac{1}{3}AB$



图复——39

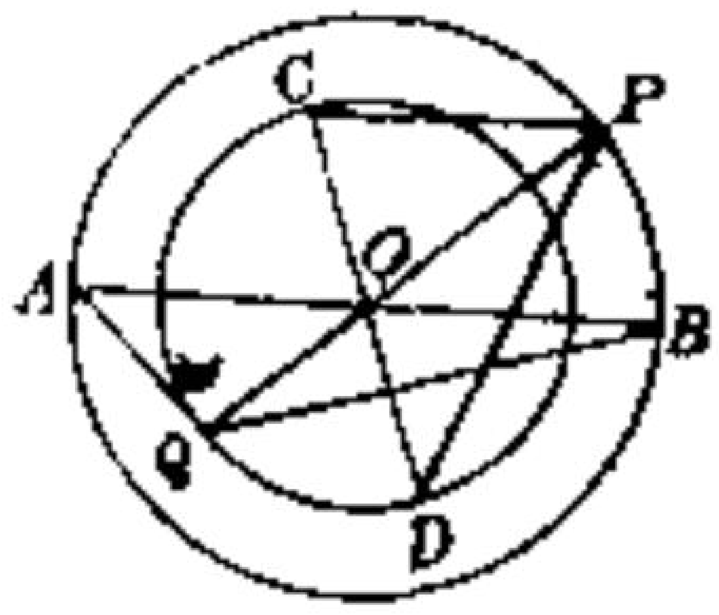
$$GB^2=\frac{4}{9}AB^2+\frac{1}{9}AC^2$$

$$GC^2=\frac{1}{9}AB^2+\frac{4}{9}AC^2$$

又 $GA^2=\frac{1}{9}AB^2+\frac{1}{9}AC^2$.

40．有两同心圆，设 AB 是外圆的直径，P 是外圆上的点，CD 是内圆的直径，Q 是内圆上的点．求证：$AQ^2+BQ^2=CP^2+DP^2$.

提要：由定理131有



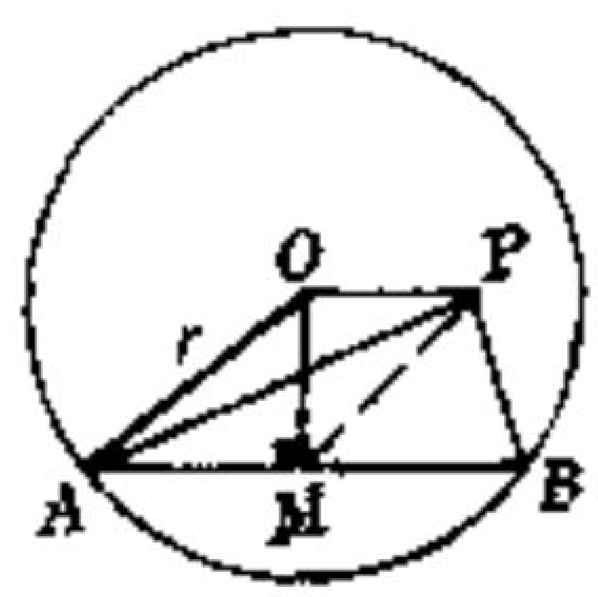
图复——40

$$AQ^2+BQ^2=\frac{1}{2}AB^2+2\cdot OQ^2$$
$$2(OA^2+OQ^2)$$

$$CP^2+DP^2=\frac{1}{2}CD^2+2\cdot OP^2$$
$$=2(OC^2+OP^2).$$

41．设 AB 是⊙$O(r)$的一弦，P 是合于 $OP//AB$ 的一点，求证：$PA^2+PB^2=2(PO^2+r^2)$.

提要：$PA^2+PB^2=2(PM^2+AM^2)$
$=2[(PO^2+OM^2)+(r^2-OM^2)]$
$=2(PO^2+r^2)$.

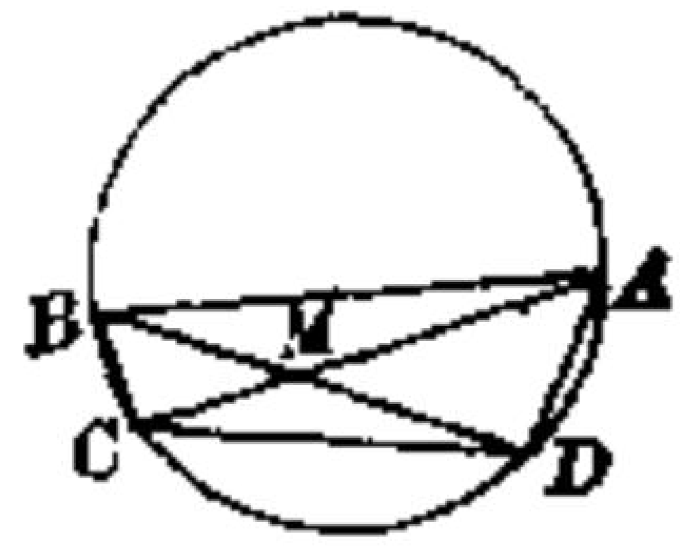


图复——41

42．在圆内接四边形 $ABCD$ 中，若 AC 平分 BD，则 $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2AC^2$.

提要：$AB^2+DA^2=2(AM^2+BM^2)$

$BC^2+CD^2=2(CM^2+BM^2)$



图复一—42

两式相加之和为：

$2(AM^2+CM^2+2BM^2)$

$=2(AM^2+CM^2+2\cdot MB\cdot MD)$

$=2(AM^2+CM^2+2\cdot MC\cdot MA)=2AC^2$.

43．设 a、b、c 表三角形的三边，m_1、m_2、m_3 表三中线，求证：

(1) $m_1{}^2+m_2{}^2+m_3{}^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$；

(2) $m_1{}^4+m_2{}^4+m_3{}^4=\frac{9}{16}(a^4+b^4+c^4)$.

提要(1)：$b^2+c^2=\frac{1}{2}a^2+2m_1{}^2$,

$c^2+a^2=\frac{1}{2}b^2+2m_2{}^2$,

$a^2+b^2=\frac{1}{2}c^2+2m_3{}^2$.

以上三式二倍后相加得（1）式.

(2)：$\because$ $4m_1{}^2=2b^2+2c^2-a^2$

$4m_2{}^2=2c^2+2a^2-b^2$

$4m_3{}^2=2a^2+2b^2-c^2$

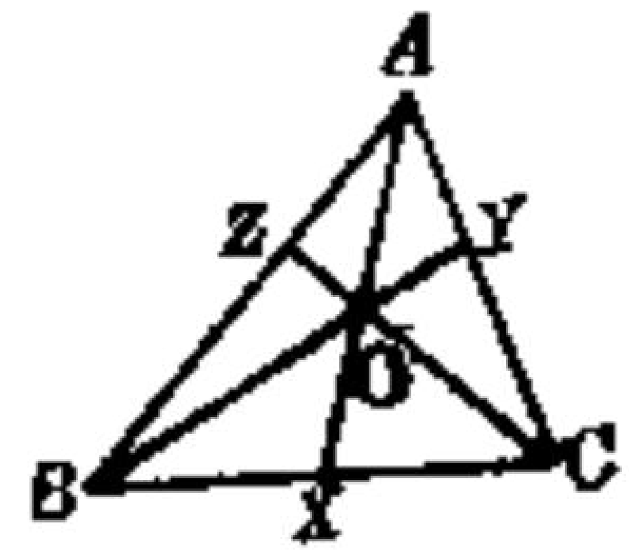
以上三式平方后相加得（2）式.

44．已知△ABC 及一任意点 O，设 AO 与 BC、BO 与 CA、CO 与 AB 各交于 X、Y、Z.

求证：$\frac{\overline{OX}}{\overline{AX}}+\frac{\overline{OY}}{\overline{BY}}+\frac{\overline{OZ}}{\overline{CZ}}=1$

提要：$\frac{\overline{OX}}{\overline{AX}}=\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}$，

$\frac{\overline{OY}}{\overline{BY}}=\frac{\triangle OCA}{\triangle ABC}$，$\frac{\overline{OZ}}{\overline{CZ}}=\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}$



图复——44

三式相加等于1.

45．设 h_1、h_2、h_3 表三角形的三高，r、r_1、r_2、r_3 分别表内切圆及三个旁切圆的半径，求证：

(1) $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$；(2) $\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}=\frac{1}{r_1}$；

(3) $\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}=\frac{1}{r_2}$；(4) $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r_3}$；

(5) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$.

提要：(1) 令 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$\triangle$表三角形面积，有 $\triangle=rs=\frac{1}{2}ah_1$

$\therefore \frac{1}{h_1}=\frac{a}{2rs}$，$\frac{1}{h_2}=\frac{b}{2rs}$，$\frac{1}{h_3}=\frac{c}{2rs}$

三式相加之和为 $\frac{1}{r}$.

(2)：由 $\triangle=r_1(s-a)=\frac{1}{2}ah_1=\frac{1}{2}bh_2=\frac{1}{2}ch_3$

$\therefore \frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}=\frac{\frac{1}{2}(b+c-a)}{r_1(s-a)}=\frac{1}{r_1}$

(5)：(2)+(3)+(4)其和为(5).

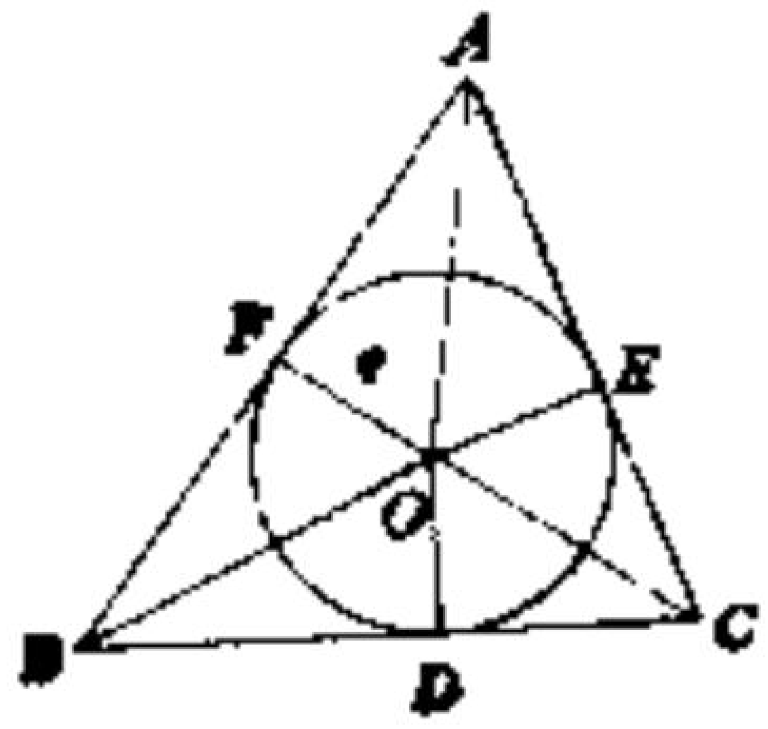
46．设 a、b、c 表三角形的三边，s 表半周，$\triangle$ 表面积，r、r_1、r_2、r_3 分别表内切圆及三个旁切圆的半径，求证：

$\triangle=sr=(s-a)r_1=(s-b)r_2$
$(s-c)r_3$

证：$\triangle=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$

又由上题知 $r=\frac{s-a}{s}r_1$

$\therefore\quad \triangle=sr=(s-a)r_1$.

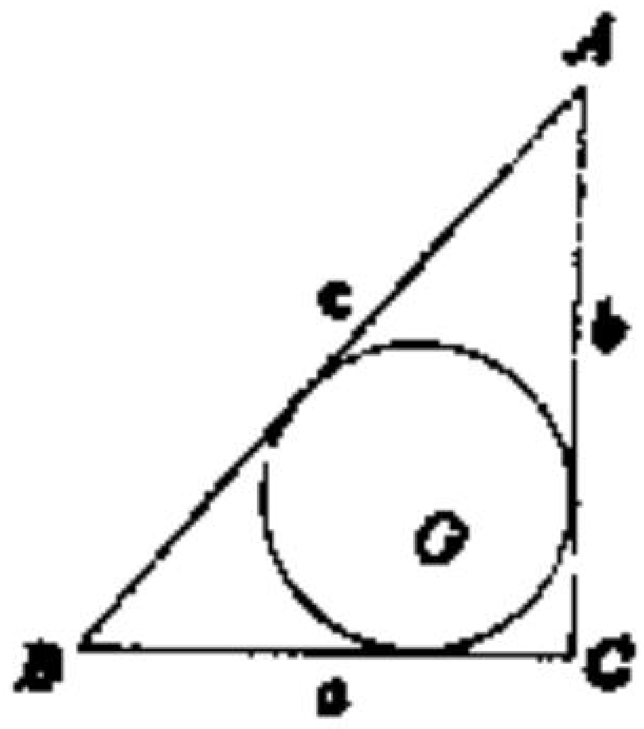


图复——46

47．已知直角△ABC，令勾 $BC=a$，股 $CA=b$，弦 $AB=c$，d 为圆的直径，试证勾股容圆的直径

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}$$

提要：$sr=\frac{1}{2}ab$.



图复——47

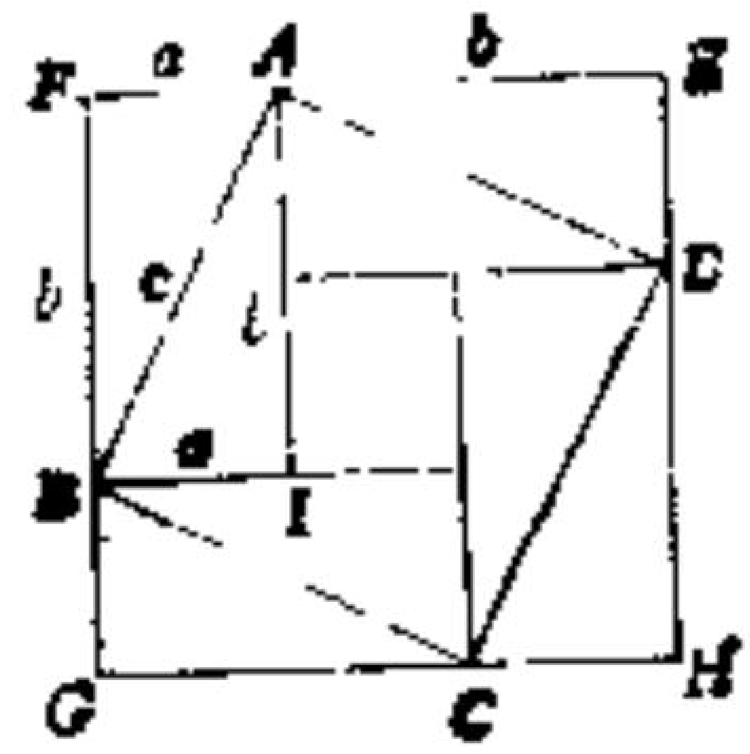
48．试就赵君卿弦图验证勾股定理．

$\therefore\quad S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}S_{\square AFBI}=\frac{1}{2}ab$,

而 $\quad S_{\square EFGH}-4S_{\triangle ABF}=S_{\square ABCD}=c^2$,

有 $\quad (a+b)^2-2ab=c^2$,

$\therefore\quad a^2+b^2=c^2$.

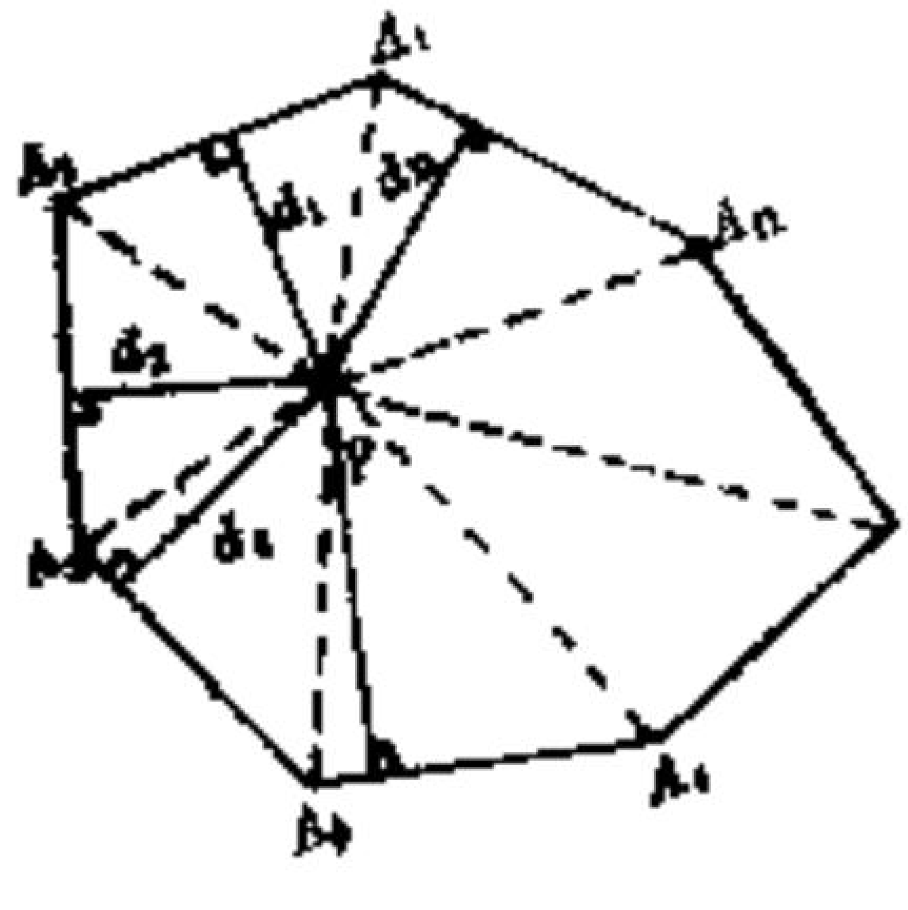


图复——48

49．等边凸多边形内部任一点至各边距离和为定长．

提要：令等边凸 n 边形的边长为 a，其面积为 A. 则

$\frac{1}{2}ad_1+\frac{1}{2}ad_2+\cdots+\frac{1}{2}ad_n=A$


图复——49

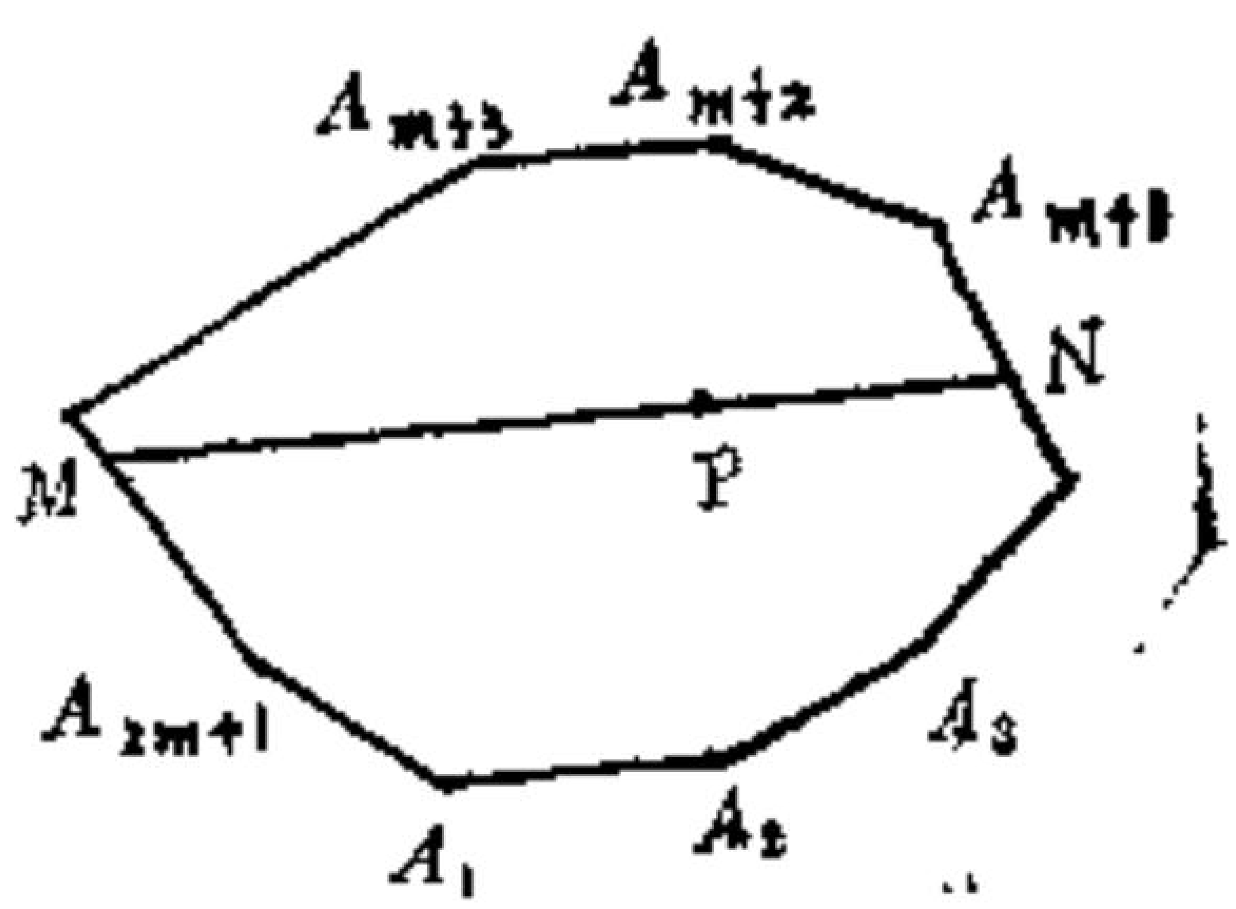
故 $d_1+d_2+\cdots+d_n=\dfrac{2A}{a}$（定长）

50．等角凸多边形内部任一点至各边距离和为定长．

提要：设 P 是等角凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内任一点．

若 $n=2m$，对边互相平行，易证从略。

若 $n=2m+1$，A_1A_2 上任一点分别到各双直线 A_2A_3、A_1A_{2m+1}；…；$A_{m+1}A_{m+2}$、$A_{m+3}A_{m+2}$ 成等角．因而 A_1A_2 任一点分别到每双直线距离之和为定值 S_1、S_2、…、S_m 即 A_1A_2 上任一点到边线距离之和为定值 $S=S_1+S_2+\cdots+S_m$．同理可证 A_2A_3、…、$A_{2m}A_{2m+1}$ 上任一点距离之和皆为定值 S．



图复——50

过 P 作 $MN\parallel A_1A_2$ 交周界于 MN．同上可知 MN 上任一点至各边线距离之和相等，令为 S'．∴ P、M 至各边线距离之和为 S'．又∵ M 在周界上，∴ M 至各边线距离之和为 S．因此 $S'=S$．故 P 到各边线距离之和为定值 S。

51、已知边长，试求下列正多边形的面积：

（1）正五边形；　　（2）正六边形；

（3）正十边形；　　（4）正十二边形．

提要：由习题四第31题各形的边心距为：

$$d_5=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}a_5;\qquad d_6=\frac{\sqrt{3}}{2}a_6$$

$$d_{10}=\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}a_{10}\qquad d_{12}=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})a_{12}$$

∴ 正五边形面积 $=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}a_5^2$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}a_5^2$$

正六边形面积$=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a_6^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}a_6^2$.

正十边形面积$=10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}a_{10}^2$

$$=\frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}a_{10}^2$$

正十二边形面积$=3(2+\sqrt{3})a_{12}^2$

52. 圆内接正六边形的面积等于同圆外切正六边形面积的四分之三.

提要：设圆外切正六边形边长为 a，则其内接正六边形的边长为$\sqrt{3}a/2$.

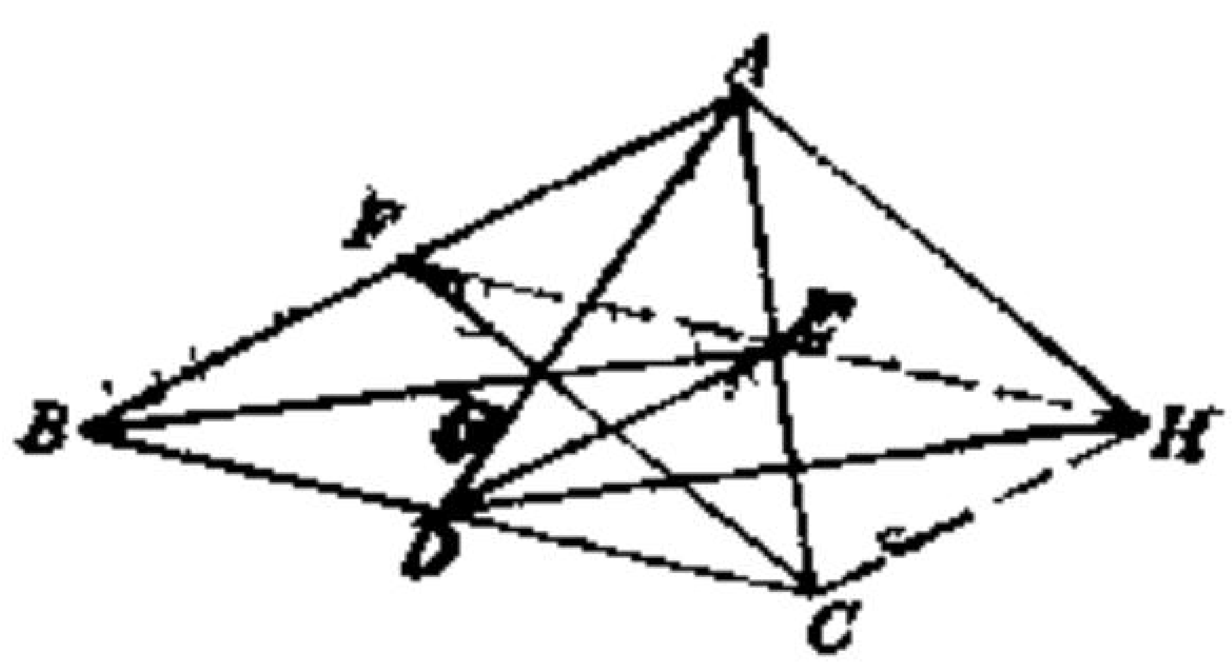
$\therefore$圆外切正六边形的面积$=\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$,

圆内接正六边形的面积$=\frac{3}{2}\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$

$$=\frac{9}{8}\sqrt{3}a^2.$$

53. 以三角形的三中线为边所构成的三角形，它的面积等于原三角形面积的四分之三.

提要：$BDHE$、$FCHA$均为平行四边形、故$\triangle ADH$是$\triangle ABC$的三中线所构成的三角形.



图复——53

由 $\triangle AED=\triangle BED$

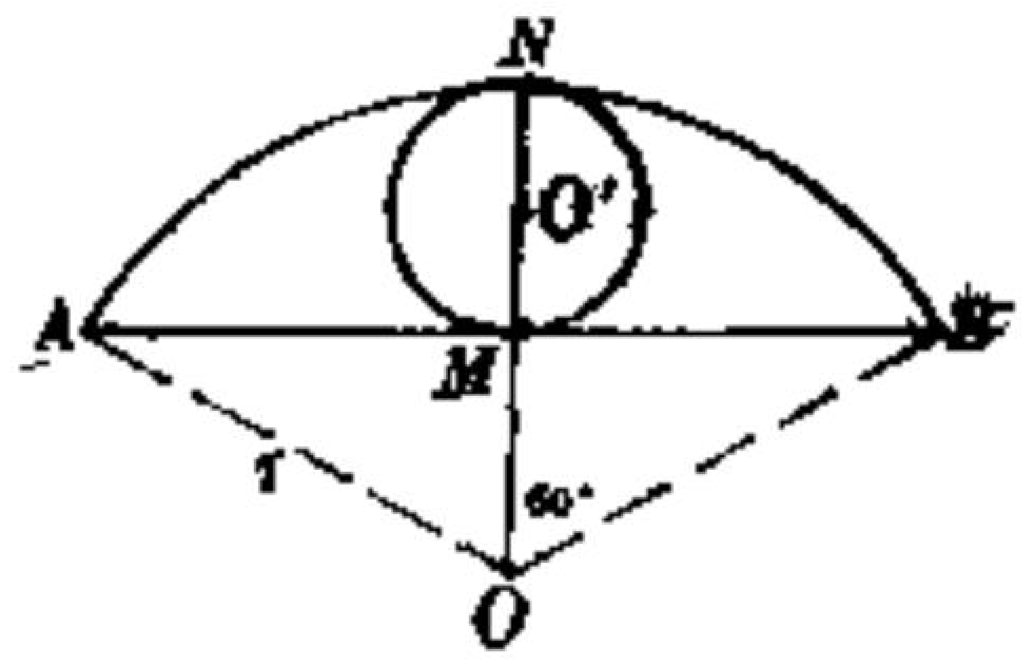
$=\triangle HED$

及 $\triangle AED=\triangle CEF=\triangle AEH$.

有 $S_{\triangle AED}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADH}$. 又 $S_{\triangle AED}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

$\therefore$ $S_{\triangle ADH}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}$.

54．已知弓形弧为120°，求证弓形中最大内切圆的周长等于弓形弧长的四分之三．



图复——54

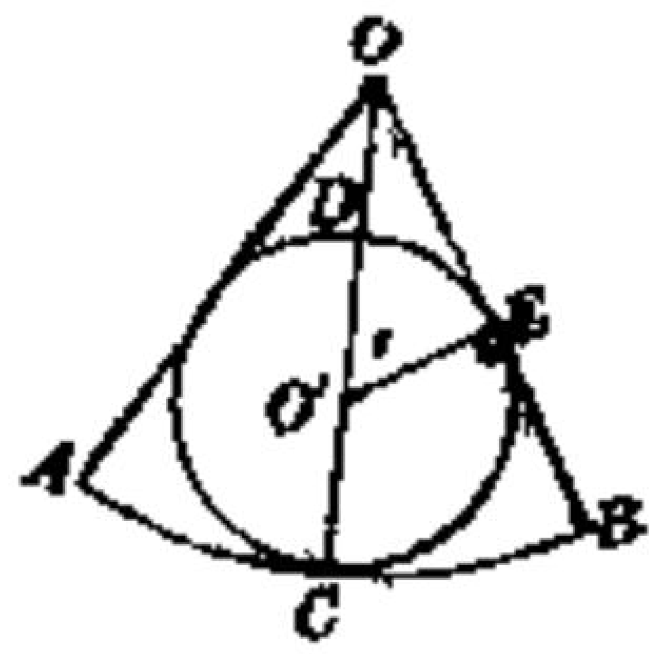
提要：在 Rt△OBM 中

$OM=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}\gamma$.

故 $MN=\frac{1}{2}\gamma$.得⊙O′的周长为$\frac{1}{2}\pi\gamma$，而

$\widehat{ANB}=\frac{2}{3}\pi\gamma$.

55．顶角为 60° 的扇形的弧长等于扇形内切圆的周长的一半．



图复——55

提要：∠C′OE 为 30°，故

$O'E=\frac{1}{2}OO'=\frac{1}{3}OC=\frac{1}{3}\gamma$.

γ 为扇形半径

故 ⊙O′ 的周长为 $2\pi\gamma/3$.

又 $\widehat{AB}=\pi\gamma/3$.

56．直角三角形弦的高，分原形为两个三角形，这两形的内切圆面积的和等于原形的内切圆的面积．



图复——56

提要：

Rt△CAB∽Rt△HAC∽Rt△HCB

由定理 116 有：

$$\frac{r}{AB}=\frac{r_1}{AC}=\frac{r_2}{CB}$$

$$\therefore\quad \frac{r^2}{AB^2}=\frac{r_1^2}{AC^2}=\frac{r_2^2}{CB^2}=\frac{r_1^2+r_2^2}{AC^2+CB^2}$$

故有 $r^2=r_1^2+r_2^2$ $\therefore$ $\pi r_1^2+\pi r_2^2=\pi r^2$.

57．将一个正方形的两邻边各 n 等分，自诸分点各引所在边的垂线，这些直线分正方形为 n^2 个小正方形．试证：这些小正方形的内切圆面积的和，对于任何正整数都有一定的值．

提要：设正方形的边长为 a，各圆的半径为 $a/2n$，故其总面积 $S=n^2\cdot\pi(a/2n)^2=\pi a^2/4$.

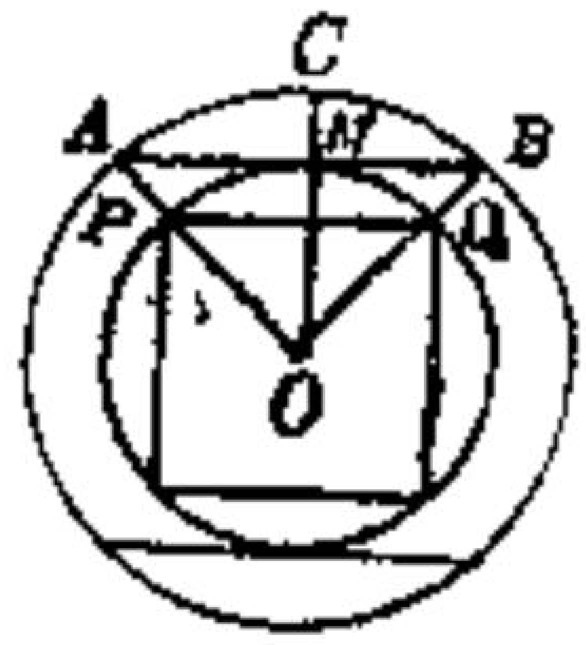
58．有两同心圆，外圆面积是内圆的二倍，这两圆的圆周围成一圆环，作内圆的两平行切线．求证：圆环介于这两条切线间那一部分的面积，等于内圆的内接正方形的面积．

提要：令内圆半径为 r，则外圆半径为 $\sqrt{2}r$．得 $AM=r$.

有 $\angle AOB=90°$

$\therefore$ 弓形ACB的面积$=\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)r^2$

两切线间的圆环面积为$2r^2$.



图复——58

又 $PQ=\sqrt{2}r$．故圆内接正方形的面积为 $2r^2$.

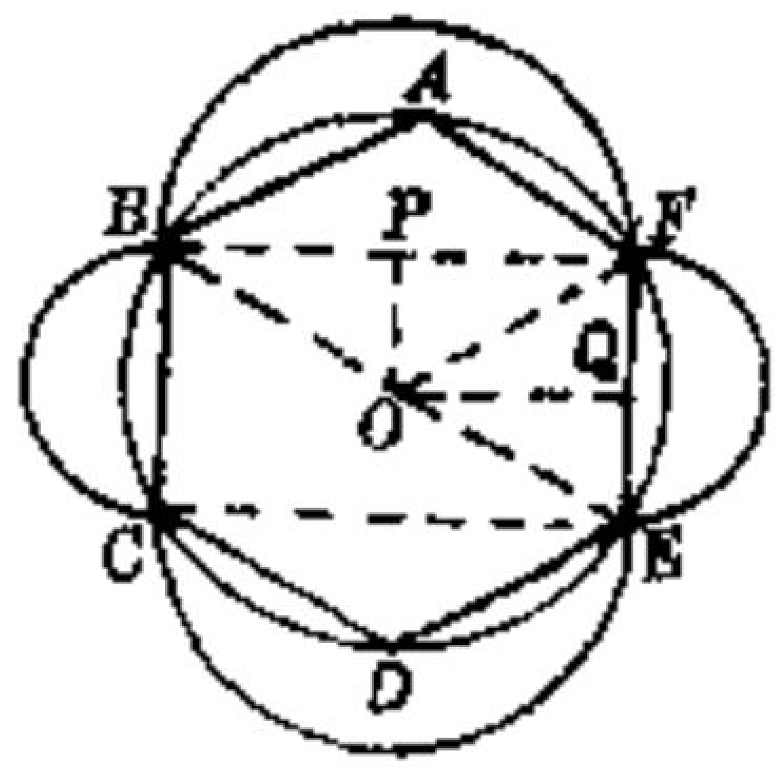
59．在一圆中作内接正六边形 $ABCDEF$，又以 BC、CE、EF、FB 为直径各向圆外作半圆，求证：这些半圆与原圆的弧所围成的四个镰刀形的面积和，等于该正六边形面积的三分之二．

提要：$\angle BOF=\frac{2}{3}\pi$，

$\angle FOE=\frac{1}{3}\pi$.

令圆的半径为 r，则

$EF=r$，　$BF=\sqrt{3}r$.



图复——59

$$OP=\frac{1}{2}r,\qquad OQ=\frac{\sqrt{3}}{2}r,\qquad PF=\frac{\sqrt{3}}{2}r,$$

$$QF=\frac{1}{2}r.$$

∴ 镰刀形 BF 面积

$$S_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,r\cdot\frac{1}{2}\gamma\right)$$

$$=\left(\frac{1}{24}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$$

镰刀形 FE 面积

$$S_2=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\gamma\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}r^2-\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{24}\pi\right)r^2.$$

故 $2(S_1+S_2)=\sqrt{3}r^2$

而正六边形的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

故四个镰刀形面积的和为正六边形面积的三分之二.

第二章　推　证　通　法

习　　题　　六

14．设$\triangle A'BC$与$\triangle ABC$同在公共边BC的一侧，求证：(1) 若A'点在弓形BAC的弧上，则$\angle A'=\angle A$;

(2) 若A'点在弓形BAC的内部，则$\angle A'>\angle A$;

(3) 若A'点在弓形BAC的外部，则$\angle A'<\angle A$.

试问：(1)、(2)、(3)的逆命题一定成立吗？什么道理？

答：均成立．因为它们满足分断式命题的条件



图 6—14

习　　题　　七

试用间接证法证明下列各题：

7．相交两圆的两个交点，不能同在连心线的一侧．

提要：设两个交点P、Q在O_1O_2的同侧，由于图形关于OO'对称，则P点关于O_1O_2的对称点P'也是$\odot O_1$与$\odot O_2$的交点，因而两相交圆有三个公共点，与定理78矛盾．

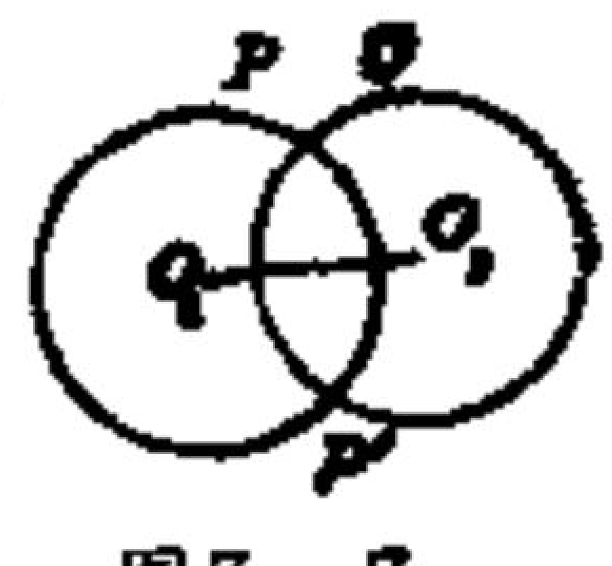


图7—7

8．若四边形中有一双对边中点的连结线等于他双对边的半差，则他双对边必互相平行．

提要：若 $AD \nparallel BC$，则 BD 的中点 M 不在 EF 上，且有 $EM = \frac{1}{2}AD$，$MF = \frac{1}{2}BC$，∴ $MF - ME = \frac{1}{2}(BC - AD) = EF$，这个等式与定理 9 的推论矛盾.

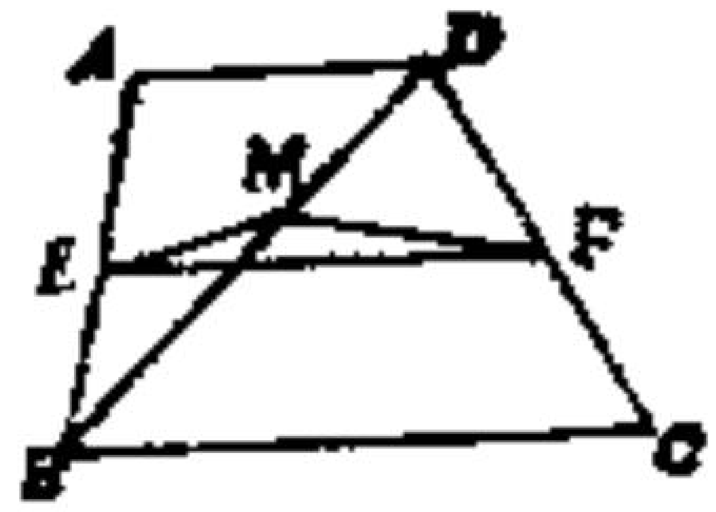


图7—8

9．若等腰三角形内一点对两腰的视角不等，则该点至底边两端的距离亦不等，近大角的距离较小.

提要：取点 P，使 $\angle APB > \angle APC$、

(1) 若 $PB = PC$，有 $\triangle PAB \cong \triangle PAC$ 而 $\angle APB = \angle APC$ 与题设矛盾；

(2) 若 $PB > PC$，有 $\angle PCB > \angle PBC$

∴ $\angle ABP > \angle ACP$，因而 $\angle BAP < \angle CAP$.

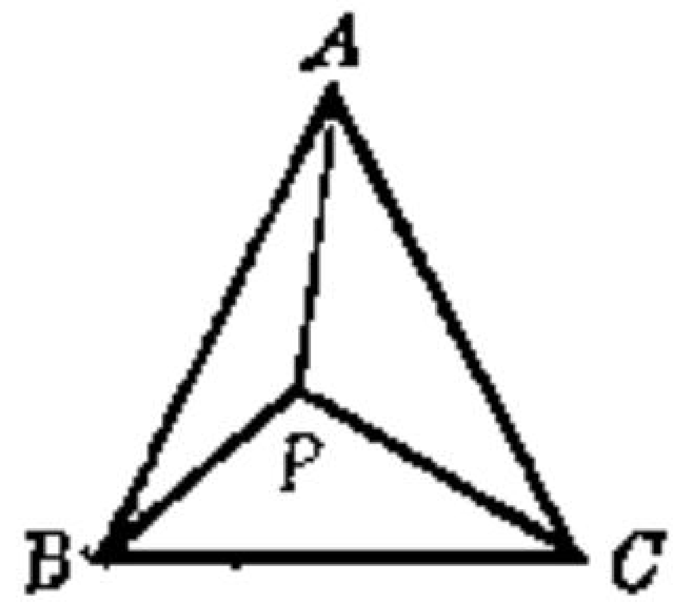


图7—9

在 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAC$ 中，由定理 8 应有 $PC > PB$，与题设矛盾，故 $PB > PC$ 也不成立.

10．若 $\triangle A'BC$ 与 $\triangle ABC$ 有公共边 BC，且具下列条件之一，则 A' 点在 $\triangle ABC$ 的外部：

(1) $\angle BA'C < \angle BAC$；(2) $A'B + A'C > AB + AC$.

提要：(1) 若 A' 点在 AB 或 AC 上时，有 $\angle BA'C > \angle BAC$ 与 $AB + AC = A'B + AA' + AC > A'B + A'C$，均与题设矛盾.

(2) 若 A' 点在 $\triangle ABC$ 的内部，有 $\angle BA'C > \angle BDC > \angle A$ 与 $AB + AC = AB + AD + CD > BD + DC$



(1)　　(2)

图7—10

$=A'B+A'D+DC>A'B+A'C$,

也均与题设矛盾.

11. 设梯形两底的和等于一腰，则此腰两邻角的平分线必会于另一腰的中点

提要：设 E、F 是 DC、AB 的中点，

$AD+BC=AB$.

则 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)=AF=BF$，且

$FE\parallel AD\parallel BC$,

∴ $\angle FAE=\angle FEA=\angle DAE$,

$\angle FBE=\angle FEB=\angle CBE$.

故 $\angle A$、$\angle B$ 的平分线会于 CD 的中点 E.

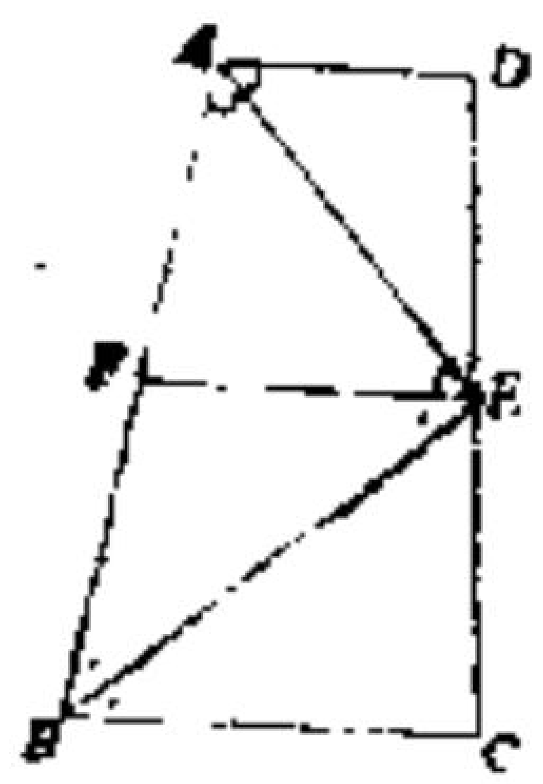


图7—11

12. 以正方形一边为底向内侧作一等腰三角形，若它的底角等于75°，则将它的顶与正方形另两个顶点连接时，必构成一个正三角形.

提要：作正三角形 $\triangle ABE'$，使 E'、E 在 AB 的同侧，则 $\triangle BCE'$ 为等腰三角形且顶角 $\angle CBE'=150°$，故 $\angle BCE'=15°$，可得 E' 与 E 重合. ∴ EAB 是正三角形.

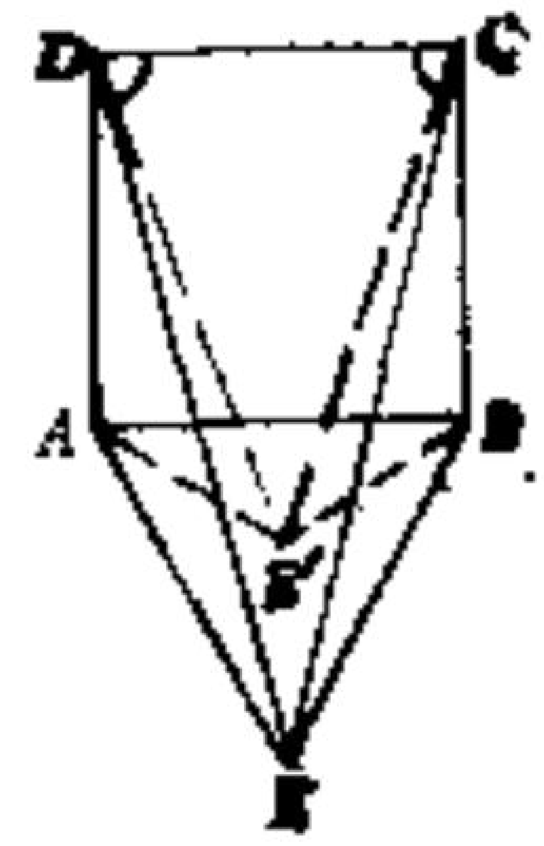


图7—12

13. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2BC$、E 是 CD 边上的一点，若 $\angle CBE=\pi/12$，则 $AB=AE$.

提要：用同一法，在 DC 上取一点 E'，使 $AE'=AB=2AD$，由定理 39，则 $\angle AE'D=30°$，$\angle DAE'=60°$.

于是 $\angle BAE'=30°$.



图7—13

∴ $\angle ABE'=\angle AE'B=75°$，$\angle E'BC=15°$，而 $\angle EBC$，

$=15°$，故 E' 与 E 重合. ∴ $AB=AE$.

14. 等腰三角形 $\triangle ABC$ 的顶角等于底角的一半，若在 AC 腰上截一段 AD 使等于底边 BC，则 $\angle ABD=\angle CBD$ $BD=BC$.

提要：用同一法，作 $\angle ABC$ 的平分线 BD'，于是 $\angle CBD'=36°$，因而 $\angle BD'C=72°$，即 $\triangle BCD'$ 也是等腰三角形. ∴ $BD'=BC$. 可得 D' 与 D 重合，∴ $\angle ABD=\angle CBD$，且 $BD=BC$.

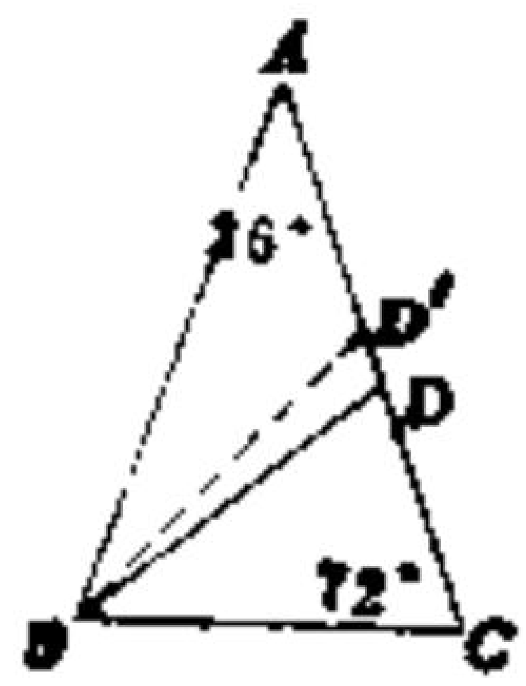


图 7—14

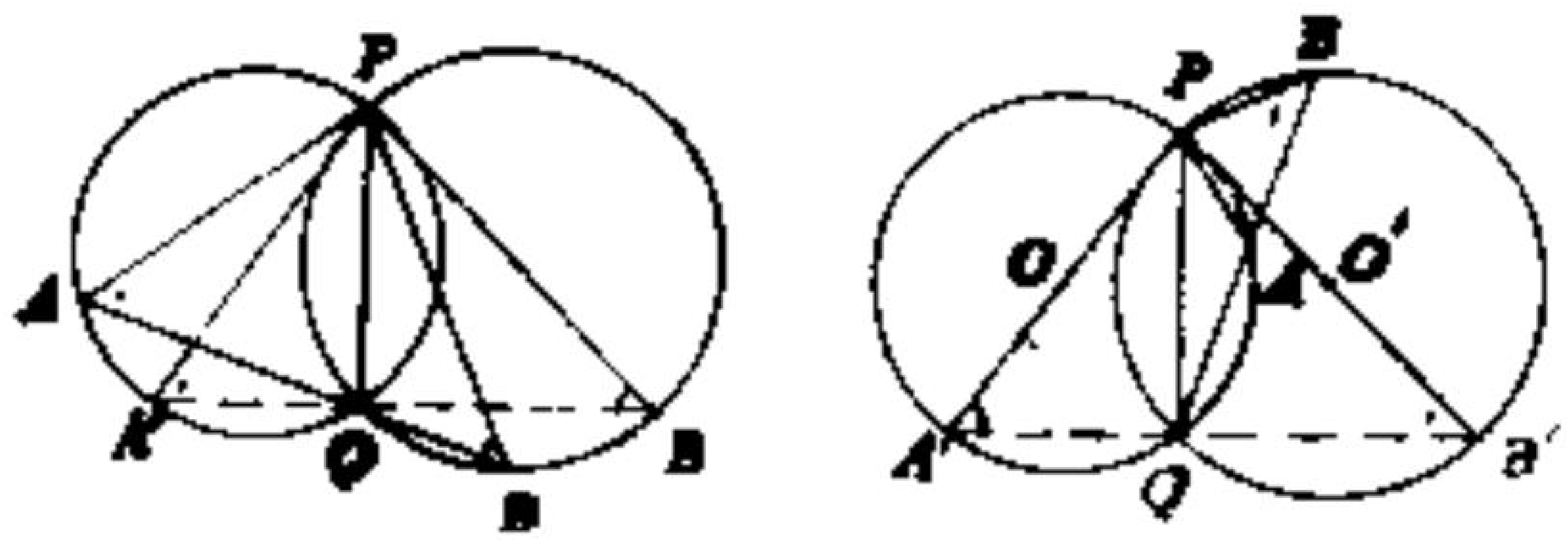
习　题　九

试用枚举归纳法证明下列各题

10. 设⊙O 与⊙O' 交于 P、Q 两点，过 Q 任作一直线交两圆于 A 与 B，则 $\angle APB=\angle OPO'$.

提要：分两种情况，A、B 在 PQ 弦的异侧与同侧.

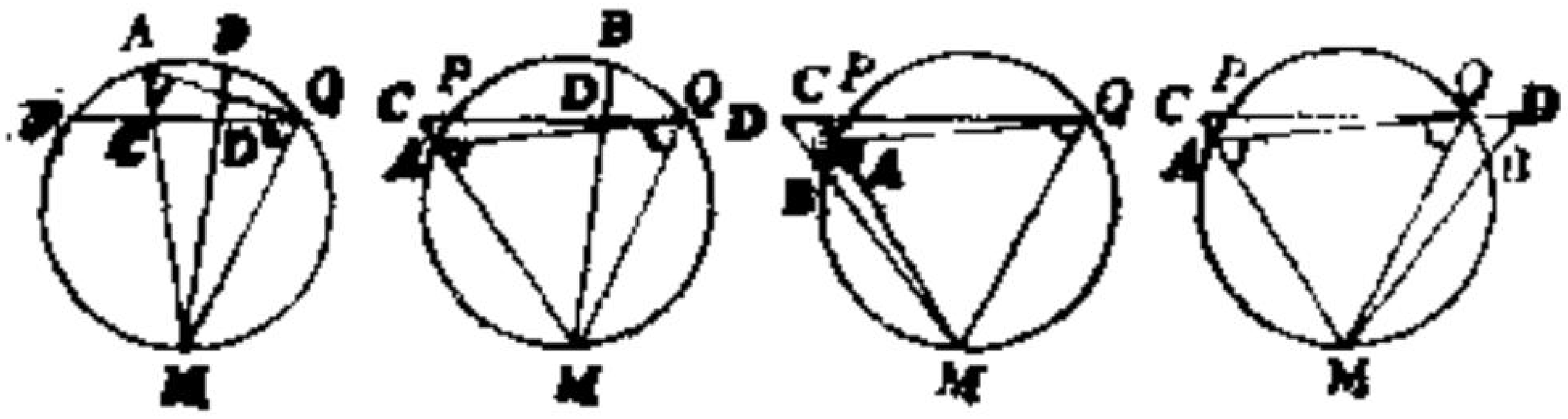
A'、Q、B' 共线，$\triangle PAB \backsim \triangle PA'B'$.



(1)　　(2)

图 9—10

11. 设 M 是圆上 $\overset{\frown}{PQ}$（优弧）的中点，自 M 引两半线交圆于 A、B 而交直线 PQ 于 C、D，则 A、B、C、D 四点同在一圆上.



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图9—11

提要：以 A、B 两点的位置来考虑，可作如下分类：

(1) 都在 $\overset{\frown}{PQ}$ 上；(2) 两点之一在 $\overset{\frown}{PQ}$ 上；(3) 都在 $\overset{\frown}{PM}$ 或 $\overset{\frown}{QM}$ 上；(4) 在 $\overset{\frown}{PM}$、$\overset{\frown}{QM}$ 上各有一点．

由 $\triangle CQM \backsim \triangle QAM$，$\triangle DPM \backsim \triangle PBM$，

有 $MA \cdot MC = MQ^2 = MP^2 = MB \cdot MD$，$\therefore$ A、B、C、D 四点共圆．

12．在一圆上，设 M、N 各是 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$（劣弧或优弧）的中点，则 AB、AC、MN 三直线交成一个等腰三角形．

提要：$\because$ $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$，

$\overset{\frown}{NA} = \overset{\frown}{NC}$，

$\therefore$ $\angle ADE = \angle B + \angle DNB = \angle EAN + \angle ENA = \angle AED$．

关于 M、N 各是 AB、AC 优弧中点的情况可类似处理．

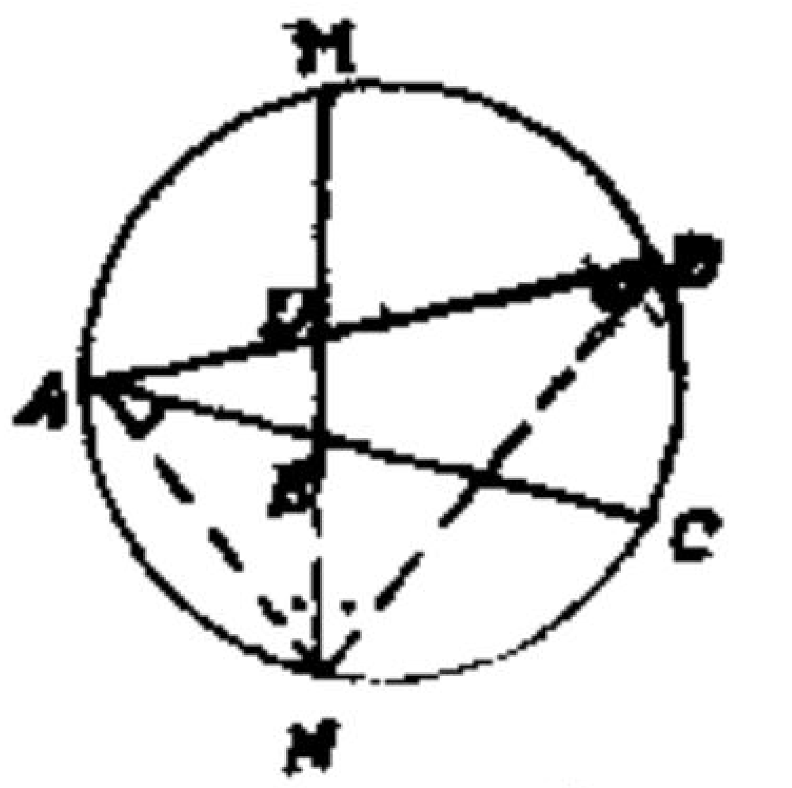


图9—12

13．在 $\triangle ABC$ 中，$AD \perp BC$ 于 D，M 是 BC 边的中点．设 $\angle ABC = 2\angle ACB$，则 $DM = AB/2$．

提要：设 N 是 AC 的中点、则 $MN \parallel AB$ 且 $NM = AB/2$．

$\because$ N 是 $\mathrm{Rt}\triangle ADC$ 的 AC 边上的中点，有 $\angle NDC = \angle NCD$．

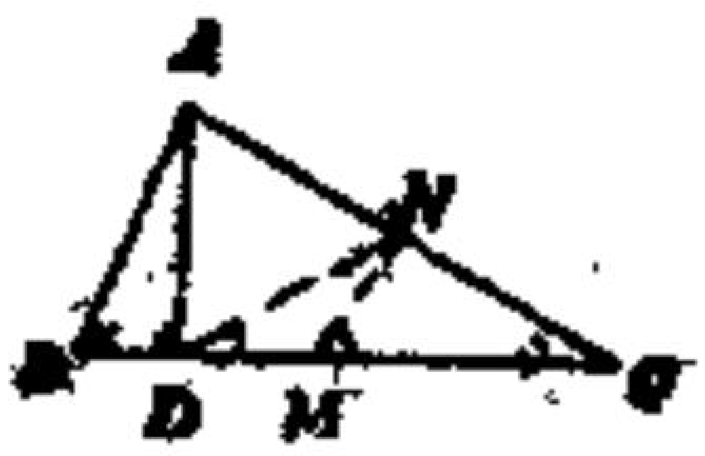


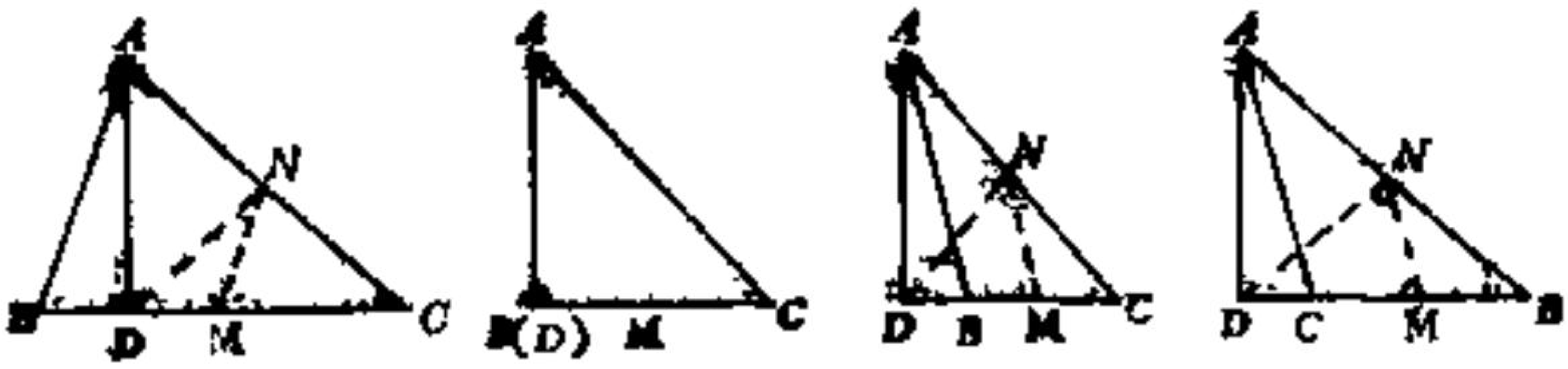
图9—13

而$\angle NMC=2\angle MDN$

∴ $\triangle MND$ 是等腰三角形，$DM=AB/2$.

14．试详细考察下命题，判断它是否成立

在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$于D，M是BC的中点，设$DM=\frac{1}{2}AB$，则$\angle ABC=2\angle ACB$.



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图9—14

提要：(1) 在(a)—(c)的情况下，命题成立，即当B、D在M点的同侧时，命题成立；

(2) 当B、D两点在点M的异侧时，由于(d)的存在，且$\angle ACB$为钝角，故命题不成立.

试用数学归纳法证明下列各题：

15．n边形共有$n(n-3)/2$条对角线.

证明：当$n=4$时，有两条对角线，命题成立.

假定$n=k-1$时命题成立．即有$\frac{1}{2}(k-1)(k-1-3)=\frac{1}{2}(k-1)(k-4)$条对角线.

当再增加一点构成k边形时，则所增加的对角线数为$k-3+1=k-2$条，这里所加的一条是由于$k-1$边形中的一条边，而现在变成为一条对角线.

故对角线总数为$\frac{1}{2}(k-1)(k-4)+k-2=\frac{1}{2}k(k-3)$，

即命题对任意 n 边形成立.

16. 圆内接偶边数凸多边形相间诸角的和，与其余诸角的和相等.

证明：当 $n=4$ 时，由对角互补，知命题成立.

假定本命题对于圆内接 $2k-2$ 边形成立.

当我们在原图形一条边所对的弧上增加两点，依次相连这有关的四个点，得到一个四边形. 由于这个四边形与原 $2k-2$ 边形相间诸角之和均相等，故对于 $2k$ 边形命题成立.

∴ 命题对任意 $2n$ 边形成立.

17. 任一线段，短于每个与它有公共端点的折线.

证明：当折线为两条时，构成一个三角形，命题成立.

假定命题对于 $k-1$ 段折线时成立，即对于 $ACD\cdots KB$ 的 $k-1$ 段折线成立，则 $ACD\cdots KLB$ 为 k 段折线于是以下不等式成立.

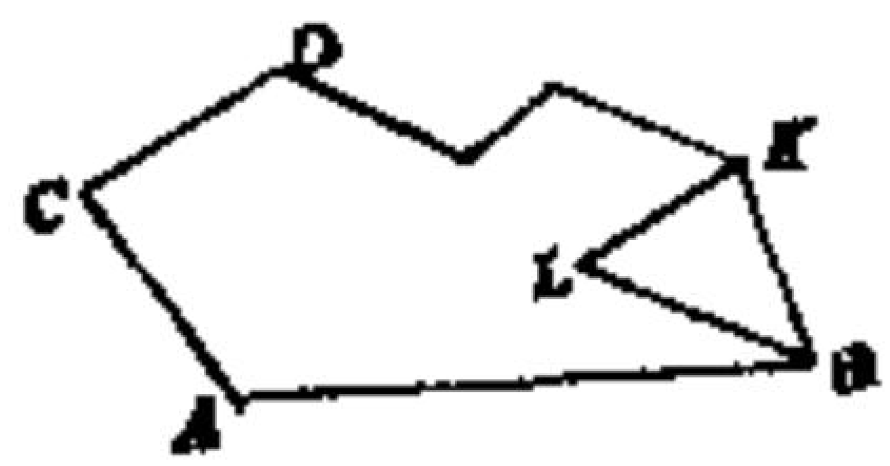


图 9—17

$$AB<AC+CD+\cdots+KB$$

与 $KB<KL+LB$

∴ $AB<AC+CD+\cdots+KL+LB$. 故命题成立.

18. 被抱凸折线短于环抱折线

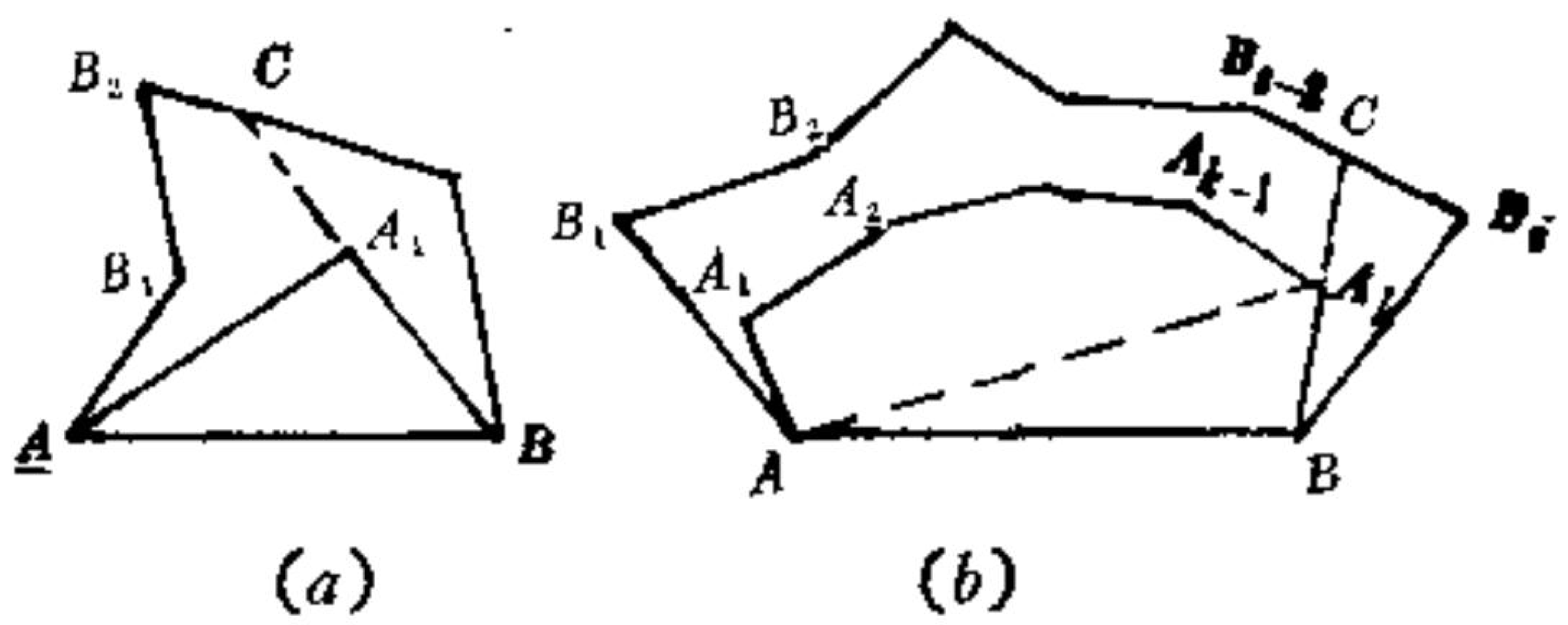


图 9—18

提要：当 $n=2$，即被抱凸折线为两段时，由图(a)知命

题成立.

假定命题对于 $n=k$，即被抱凸折线为 k 段时成立，则有

$$AA_1A_2\cdots A_{k-1}A_k<AB_1B_2\cdots B_{k-2}CA_k$$

与 $CA_k+A_kB<CB_kB$

可得　被抱凸折线 $AA_1A_2\cdots A_kB$<环抱折线 $AB_1B_2\cdots B_kB$

即命题对 $k+1$ 条凸折线成立.

∴　对任意正整数 n，命题成立.

19．凸 n 边形的内角和等于二直角的 $(n-2)$ 倍.

提及：当 $n=3$ 时，命题成立.

设 $n=k$ 时命题成立，即 k 边形 $A_1A_2\cdots A_k$ 的内角和为 $(k-2)180°$.

当 $n=k+1$ 时，∵　$\triangle A_1A_kA_{k+1}$ 的内角和为 $180°$，∴　凸 $k+1$ 边形的内角和 $=(k-2)180°+180°$

$=(k+1-2)180°$.



图9—19

即当 $n=k+1$ 时，命题也成立．故本题命题成立.

复　习　题　二

11．若 P、Q、M、N 四点合于 $PM^2-PN^2=QM^2-QN^2$，则直线 PQ 与 MN 互相垂直.

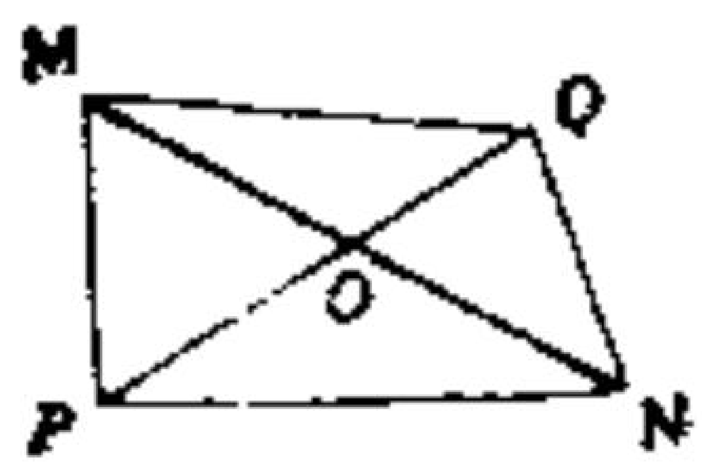
证明：若 PQ 不垂直于 MN，假定 $\angle NOQ>\angle MOP$．MN 交 PQ 于 O

则　$PM^2<OP^2+OM^2$，

$QN^2<OQ^2+ON^2$；

$PN^2>OP^2+ON^2$，

$QM^2>OQ^2+OM^2$.



图复二—11

两式相减得　$PM_1^2-PN_1^2<OM^2-ON^2$、

$QM_1^2-QN_1^2>OM^2-QN^2$,

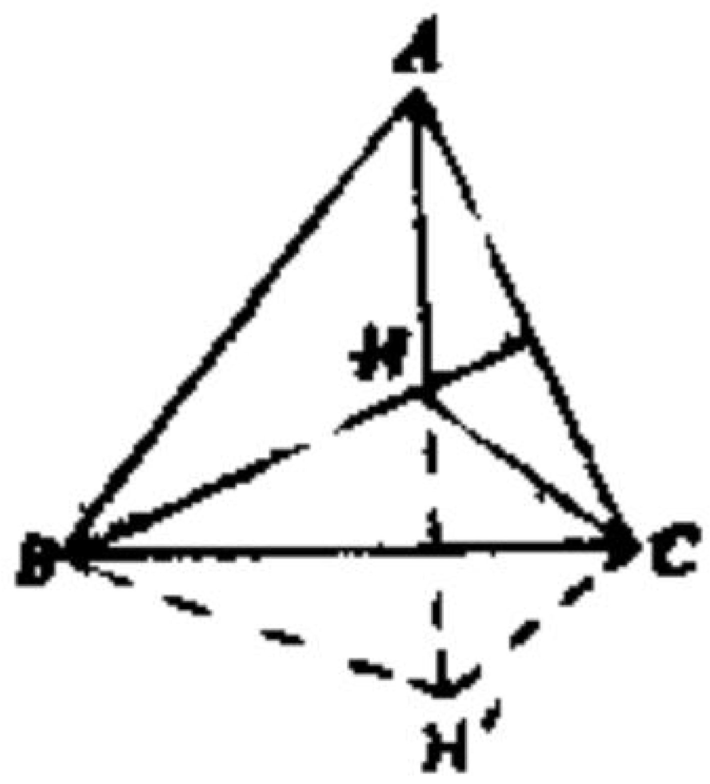
故有　$PM^2-PN^2<QM^2-QN^2$　与题设矛盾,

$\therefore$　$PQ\perp MN$.

12．试证H是$\triangle ABC$的垂心的充分条件是

$HA^2+BC^2=HB^2+CA^2=HC^2+AB^2$

证明：为了简单起见，假定延长AH至H'使$AH=HH'$且有$ABH'C$为凸四边形，由定理131得：



图复二—12

$AB^2+H'B^2=2(AH^2+BH^2)$

$AC^2+H'C^2=2(AH^2+CH^2)$

两式相减：

$AB^2-AC^2+H'B^2-H'C^2$

$=2(BH^2-CH^2)$

又由题设：$AB^2-AC^2=BH^2-CH^2$

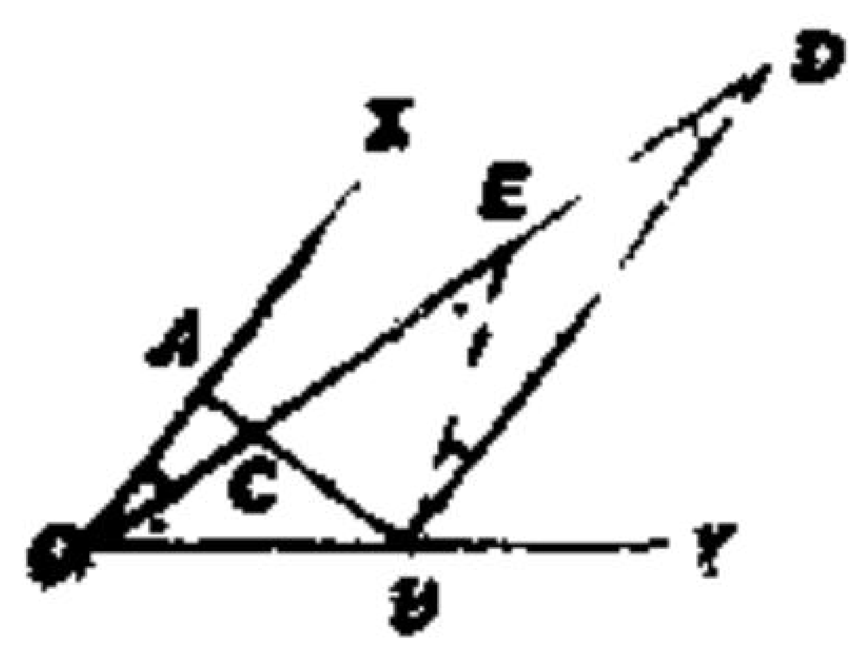
$\therefore$　$H'B^2-H'C^2=AB^2-AC^2$

由上题得　$AH'\perp BC$　　即　$AH\perp BC$.

同理，$BH\perp CA$，$CH\perp AB$. 即有H是垂心，因而上述条件是充分的.

13．在$\angle XOY$的边OY上取一点B，引$BA\perp OX$于A，又引半线BD使同向平行于半线OX，今过O作直线交半线BA、BD于C、D，如果$CD=2OB$.

试证　$\angle XOD=\dfrac{1}{3}\angle XOY$.

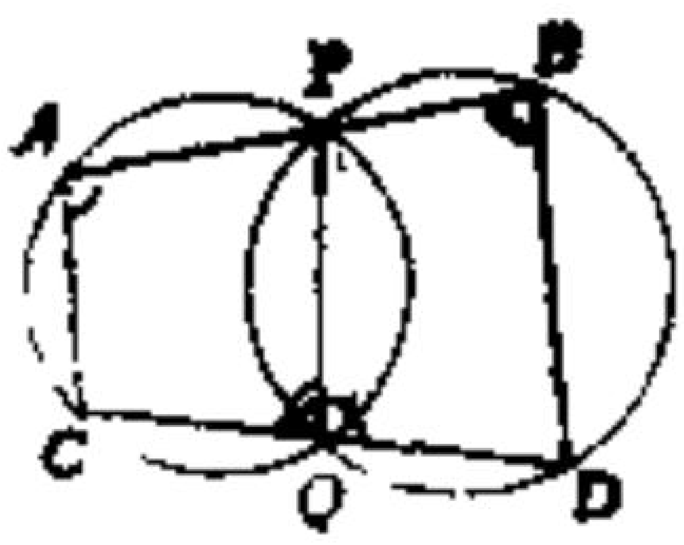


图复二—13

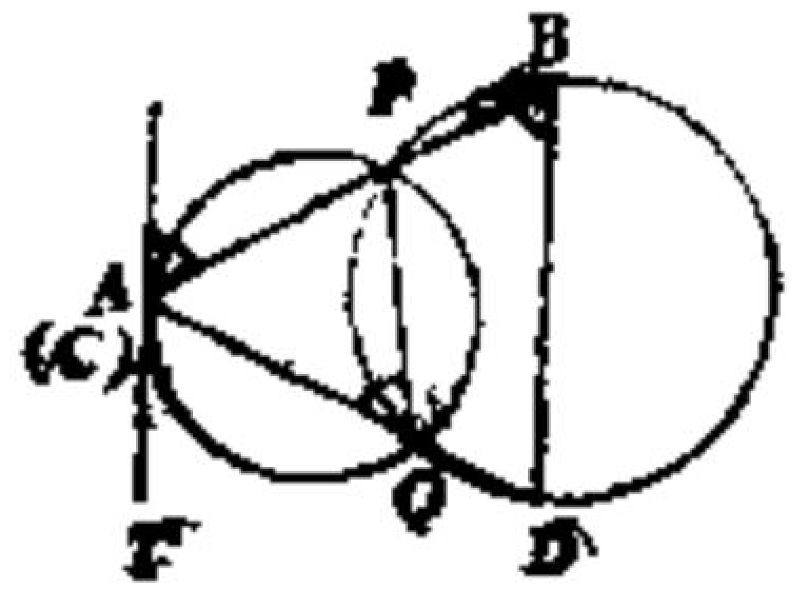
证明：取E使$\angle EOB=\angle OEB=2\angle EDB=2\angle XOD$

$XOD=\frac{1}{3}\angle XOY$.

14. 甲乙两圆相交于 P、Q，过 P 作一直线交甲于 A，交乙于 B；又过 Q 作一直线交甲于 C，交乙于 D. 求证：AC 与 BD 平行或重合.



图复二—14



图复二—15

15. 在上题中，若 C 重合于 A，则过 A 所作甲圆的切线平行或重合于 BD.

16. 在题14中，若 $AB\parallel CD$，则 $AB=CD$.

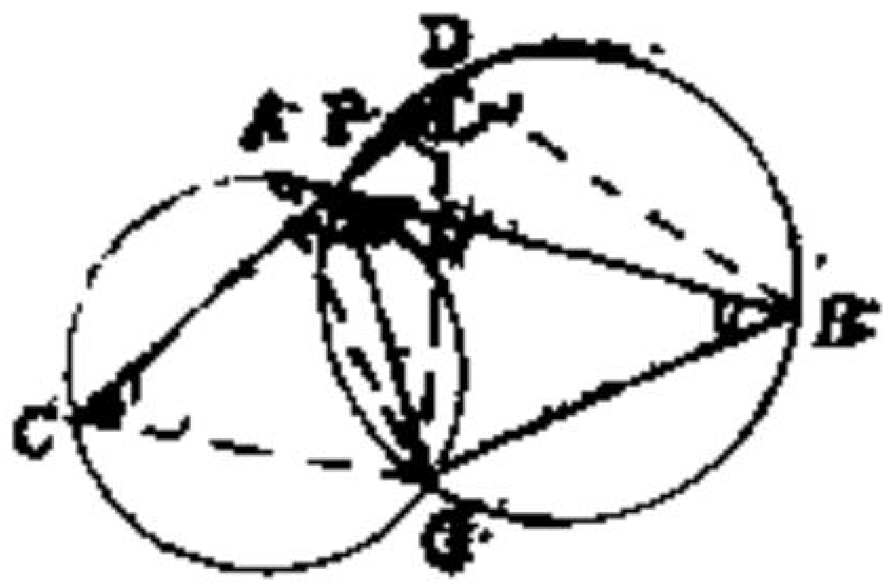
证明：此时 $ACDB$ 为平行四边形.

17. 甲、乙两圆相交于 P、Q，过 P 作两直线 x、y 使关于 PQ 对称，设 x、y 交甲于 A、C 交乙于 B、D，则 $AB=CD$.

证明：$\angle QDB=\angle QPB=\angle QPC=\angle QBD$，$\therefore\ QD=QB$，

有 $\triangle ABQ\cong\triangle CDQ$

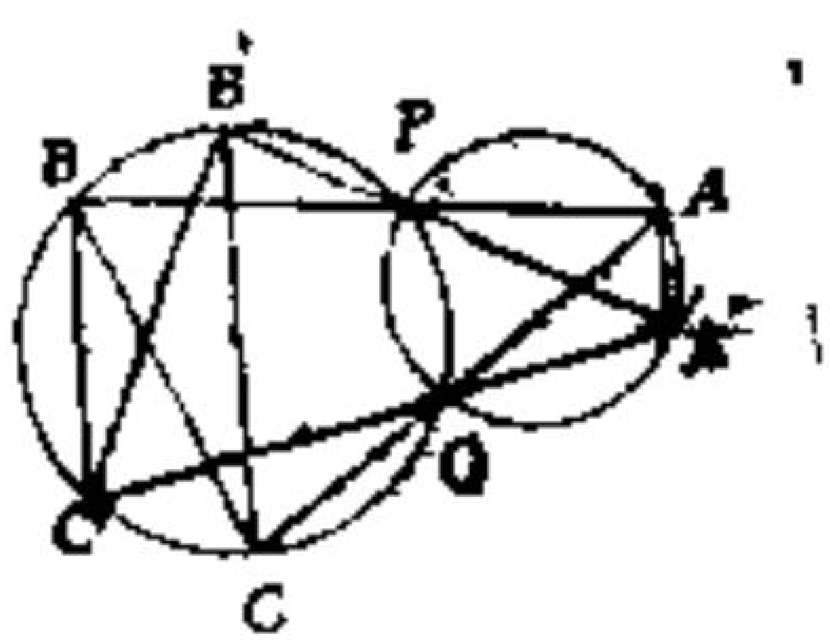
$\therefore\ AB=CD$



图复二—17

18. 两圆相交于 P、Q，在一圆上任取一点 A，连 AP、AQ 交另一圆于 B、C，试证弦 BC 的长与 A 点的位置无关而恒为一定.

证明：任取另一点 A'，由第14题知，$AA'\parallel BC'\parallel B'C$



图复二—18

$\therefore\ \widehat{BB'}=\widehat{C'C}$

故 $\widehat{BC}=\widehat{B'C'}$ $\therefore\ BC=B'C'$

19．设H是$\triangle ABC$的垂心，M是BC边的中点，连中线AM并延长之交$\odot HBC$于D．求证：M是AD的中点．

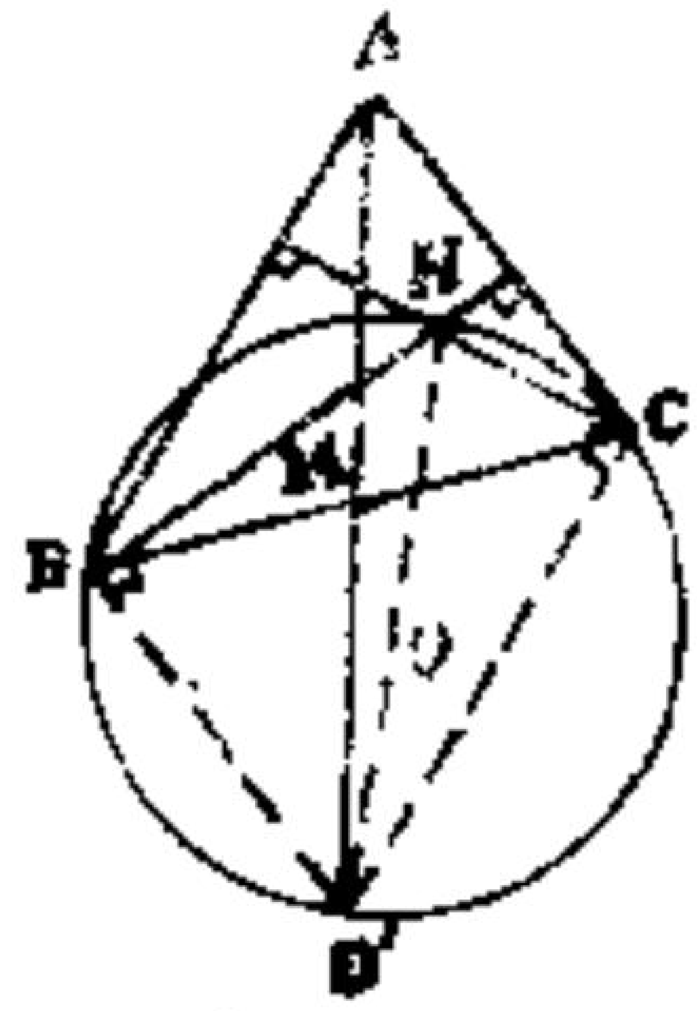
证明：连HO并延长使交$\odot HBC$于D' 则

$D'C\parallel BA$，$D'B\parallel CA$

故$D'CAB$为平行四边形，

AD'与BC互相平分，故D'与D重合．

即有M是AD的中点．



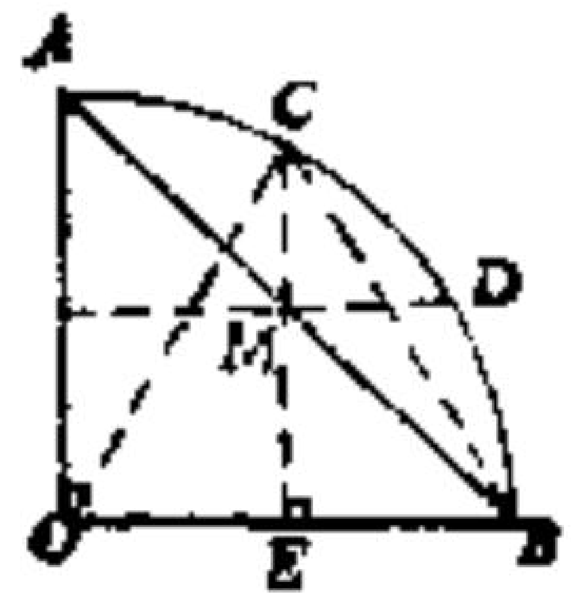
图复二—19

20．设M是直角扇形OAB的AB弦的中点．C、D是$\widehat{AB}$的三等分点：$\widehat{AC}=\widehat{CD}=\widehat{DB}$．

求证：$MC\parallel OA$且$MD\parallel OB$．

证明：$\triangle OBC$为正三角形，过OB边上的中垂线平行于OA且过MC．

同理 $MD\parallel OB$



图复二—20

21．设A是$\odot O$上一点，作$\angle AOB=60°$，在半线BO上截线段$BC=OA$，过C作弦$DE\parallel AB$．求证：AD、AE两直线中必有一条平行于OB．

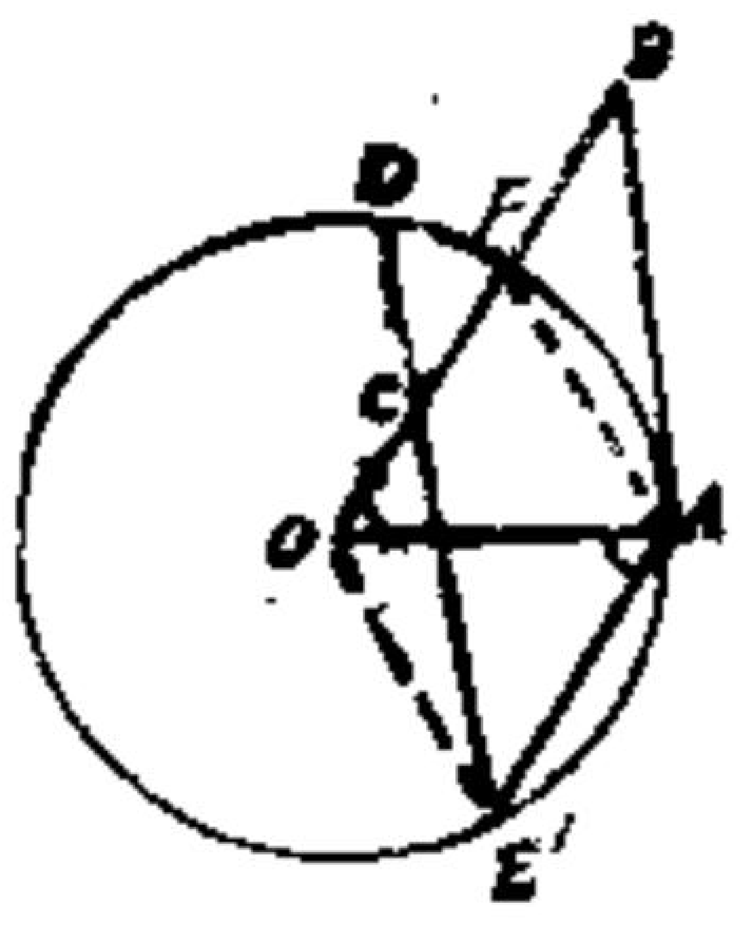
证明：作$AE'\parallel BO$，连$E'O$、$E'C$

则$\triangle OAF$、$\triangle AOE'$均为正三角形．

有$\triangle AFB\cong\triangle E'CC$

故$E'C\parallel AB$

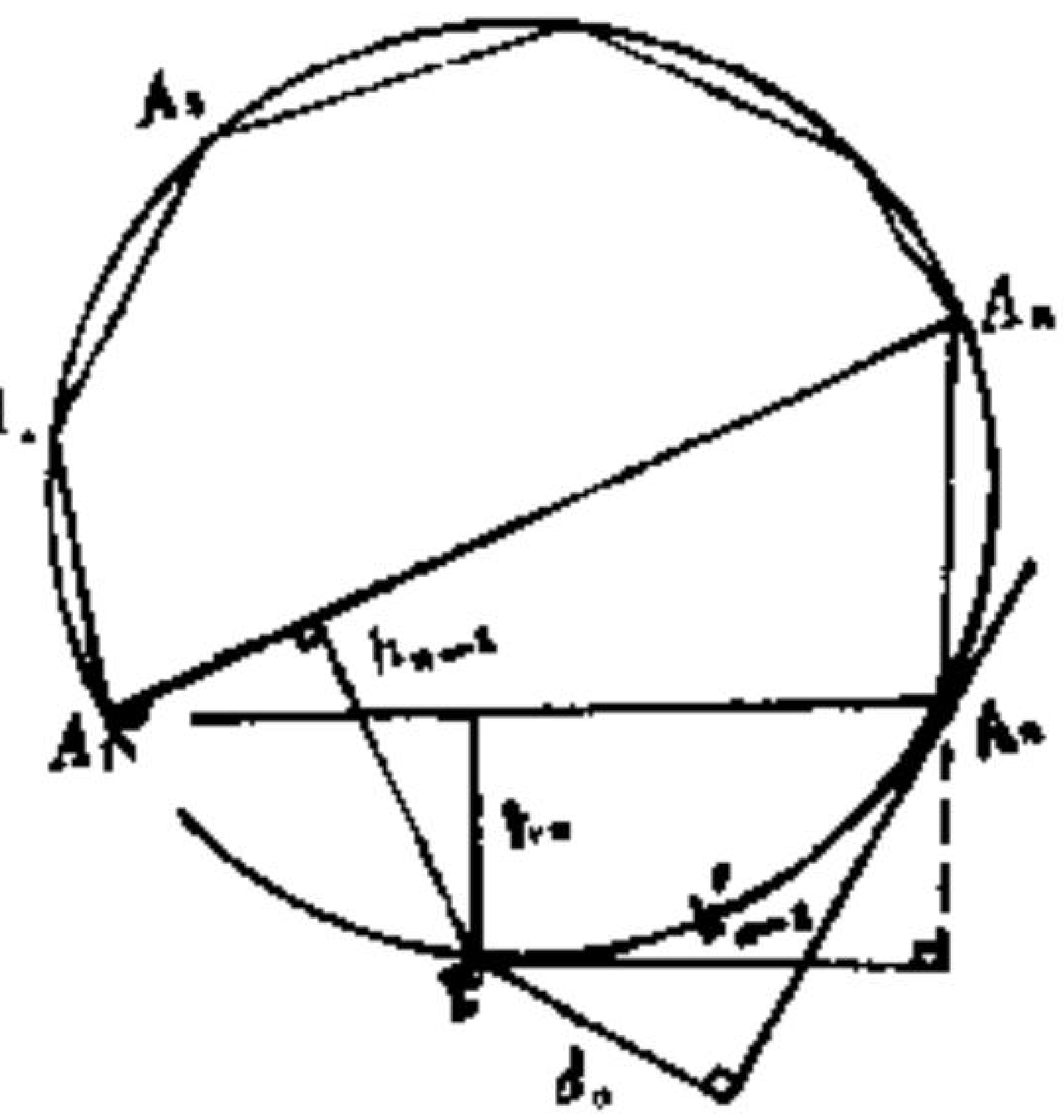
即CE'重合于DE．



图复二—21

当B、C均在⊙O内（外）部时，仍成立．

22．圆上任一点至内接多边形（不限定是凸的）诸边（所在直线）的距离之积，与该点至过每顶点所作切线的距离之积相等。



图复二—22

证明：当内接多边形为三角形时，设圆上一点为P，P至三边A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2的距离分别为h_1、h_2、h_3，P至三顶点A_1、A_2、A_3所作切线的距离为d_1、d_2、d_3，由习题四第13题有：

$h_1^2=d_2d_3$，$h_2^2=d_3d_1$，$h_3^2=d_1d_2$．

三式相乘后再开方取算术根得：

$h_1h_2h_3=d_1d_2d_3$．即命题对$n=3$时成立

假定命题对$n-1$边形成立

即有 $h_1h_2h_3\cdots h_{n-1}=d_1d_2d_3\cdots d_{n-1}$ (1)

以下证明命题对内接n边形成立．

在A_1与A_{n-1}之间增加一点A_n，则此形为内接n边形，由于在插入A_n之后，A_1A_{n-1}变为一对角线而不再是内接n边形的一条边．令：

P至A_1A_{n-1}、$A_{n-1}A_n$、A_nA_1的距离为h_{n-1}、h'_{n-2}、h_n；

P至A_{n-1}、A_n、A_1的切线的距离为d_{n-1}、d_n、d_1，则以下等式成立：

$h'^2_{n-1}=d_{n-1}d_n$，$h_n^2=d_nd_1$，$h_{n-1}^2=d_{n-1}d_1$．

前两式相乘除以后一式并约简开方得：

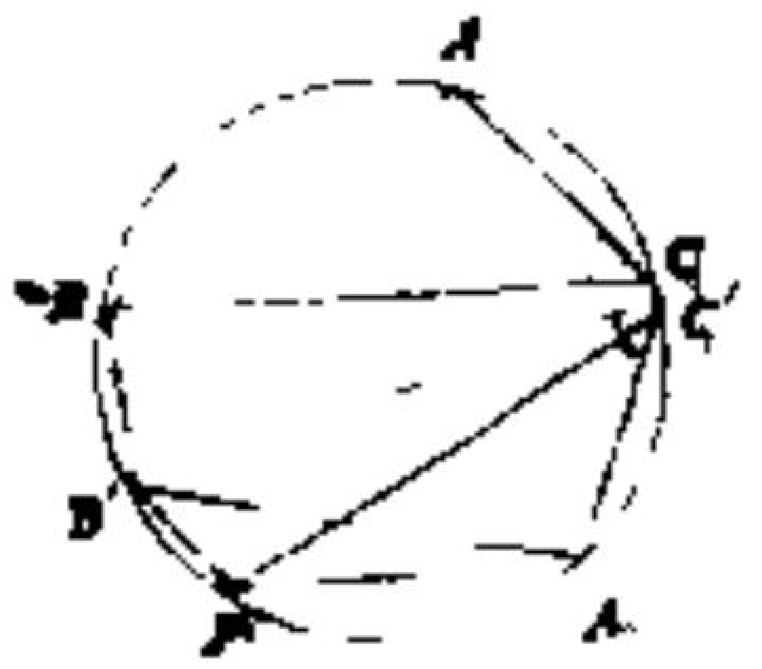
$h'_{n-1}h_n/h_{n-1}=d_n$ (2)

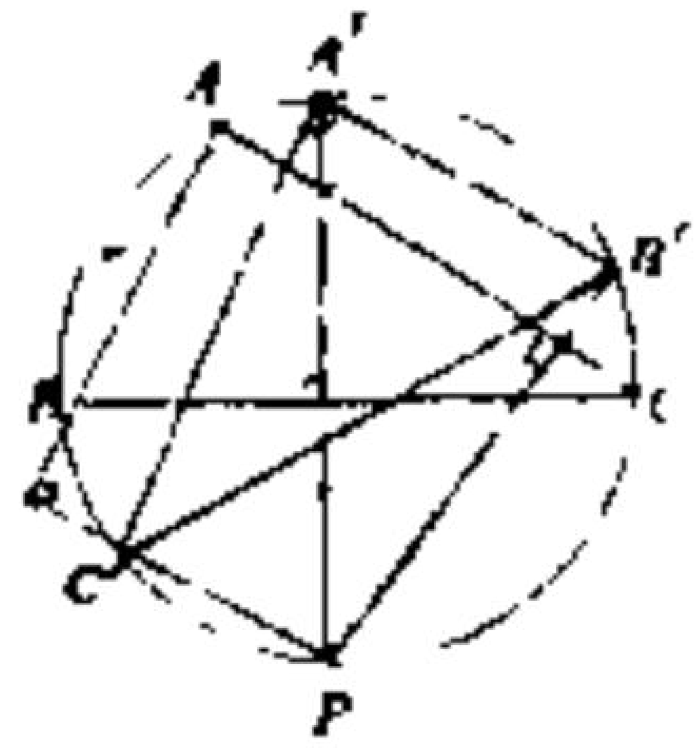
(1)乘以(2)得 $h_1h_2h_3\cdots h'_{n-1}h_n=d_1d_2d_3\cdots d_n$

即命题对 n 边形成立.

23. 自△ABC 的外接圆上任一点 P 作三弦 PA'、PB'、PC' 使分别平行于 BC、CA、AB.

求证：△$A'B'C'$≌△ABC.





图复二—23　　图复二—24

24. 在上题中，若使所作三弦分别垂直于 BC、CA、AB 则如何?

证明：各角相等，且等角对等弦，故两三角形仍全等.

25. 设 O 是正方形 $ABCD$ 的中心，作⊙$A(AO)$ 交 AD、AB 于 D_2、B_1，⊙$B(BO)$ 交 BA、BC 于 A_2 C_1，⊙$C(CO)$ 交 CB、CD 于 B_2、D_1，⊙$D(DO)$ 交 DC、DA 于 C_2、A_1. 求证：$A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$ 是一个正八边形.

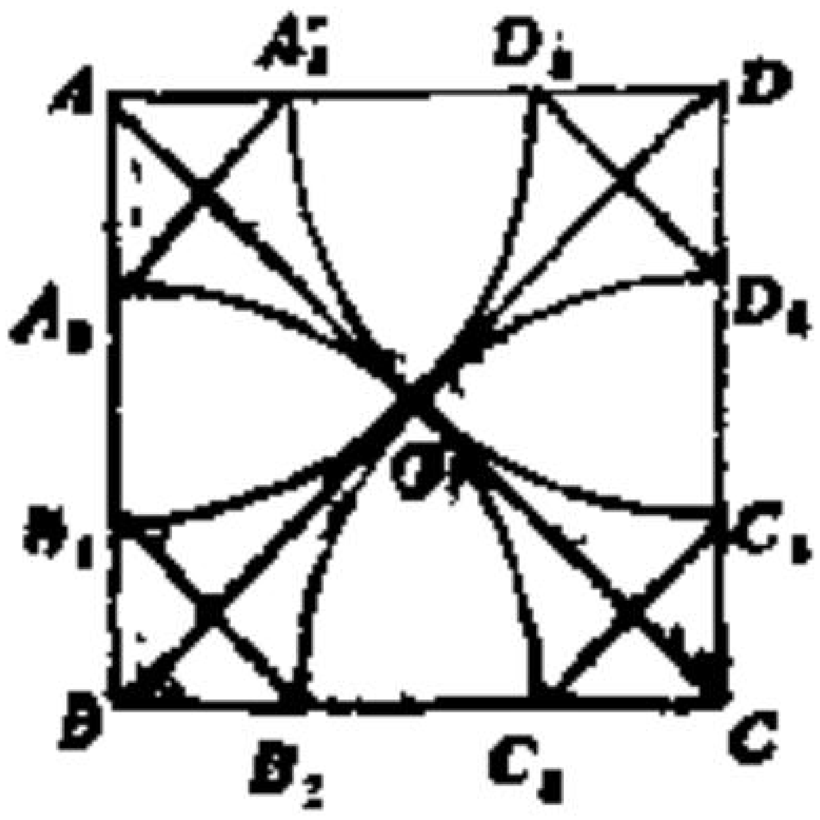
证明：设正方形的边长为 1.

则 $AC=\sqrt{2}$，$AO=\frac{1}{2}\sqrt{2}$

∴　$AA_2=1-\frac{1}{2}\sqrt{2}$，

$A_1A_2=\sqrt{2}-1$，$A_2B_1=\sqrt{2}-1$.

又 $\angle A_1A_2B_1=\angle A_2B_1B_2\cdots=135°$.



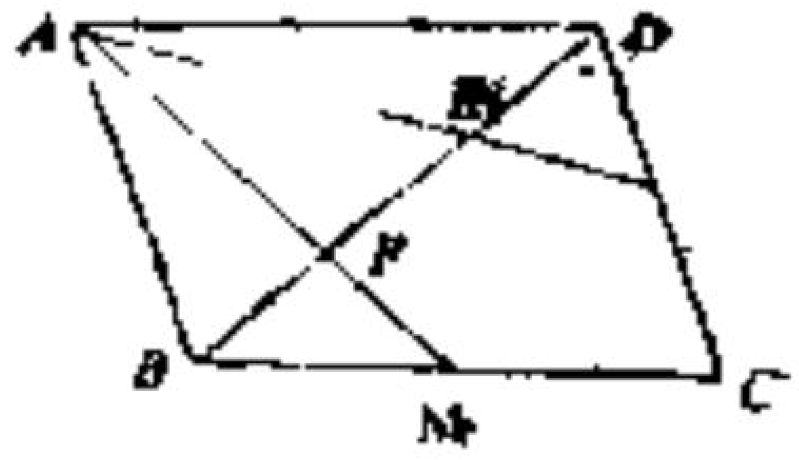
图复二—25

26. 设 M、N 各是▱$ABCD$ 的 BC、CD 两边的中点，则连线 AM、AN 必将对角线 BD 三等分.

证明：$\triangle DEN \backsim \triangle BEA$

$\therefore \quad \dfrac{DE}{BE}=\dfrac{DN}{BA}=\dfrac{1}{2}$，即 $2DE=BE$.

故 $DE=\dfrac{1}{3}BD$，同理 $BF=\dfrac{1}{3}BD$.



图复二—26

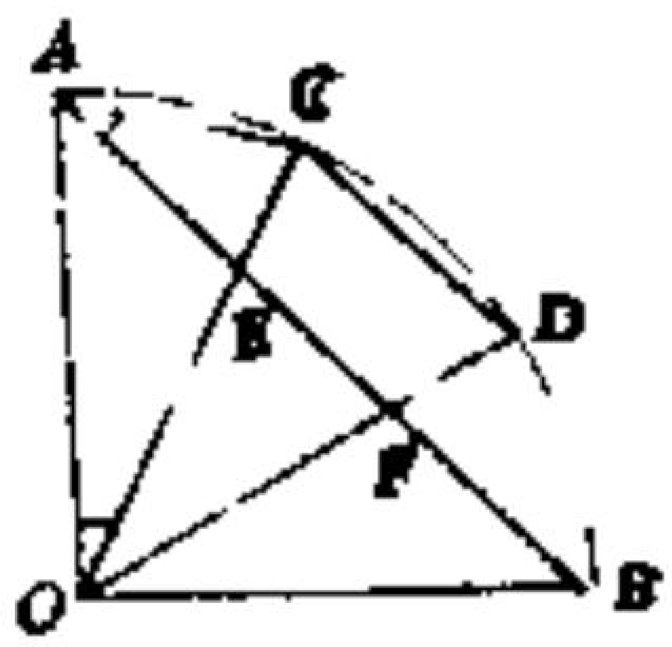
27．三等分直角扇形 OAB 的 $\overset{\frown}{AB}$ 于 C、D：$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$，连 OC、OD 交 AB 弦于 E、F.

求证：$AE=BF=CD$.

证明：由 $\triangle OAC$ 为等腰三角形且 $\angle AOC=30°$，得 $\triangle AEC$ 为等腰三角形

$\therefore \quad AE=AC=CD$.

同理：$BF=BD=CD$.



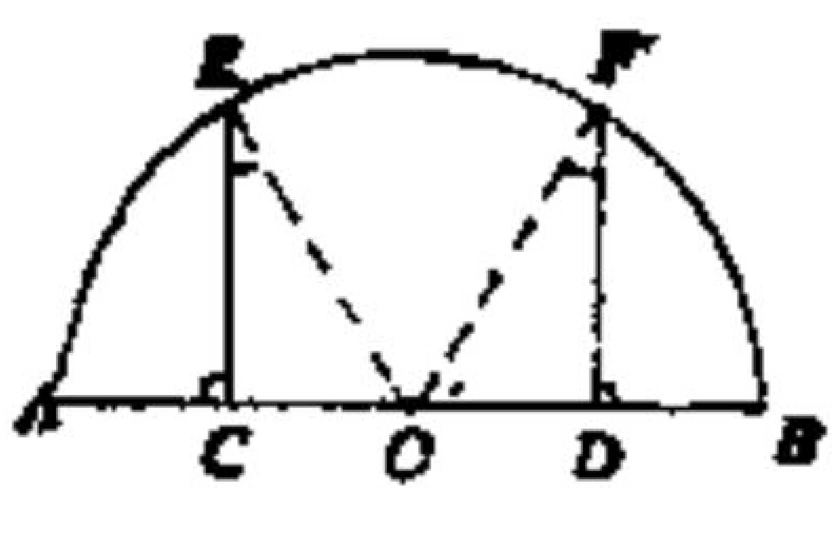
图复二—27

28．设 C、D 是一半圆形的直径 AB 上的两点且 $AC=BD=\dfrac{1}{4}AB$，试证：自 C、D 所引 AB 的垂线三等分半圆.

证明：$\because \quad OC=\dfrac{1}{2}OE$.

$\therefore \quad \angle EOC=\angle FOD=\angle EOF=60°$

故 E、F 三等分半圆.



图复二—28

29．设 E、F 是一半圆形的直径 BC 的三等分点，以 BC 为边在半圆形的外边作正三角形 $\triangle ABC$，

求证：AE、AF 必将半圆三等分.

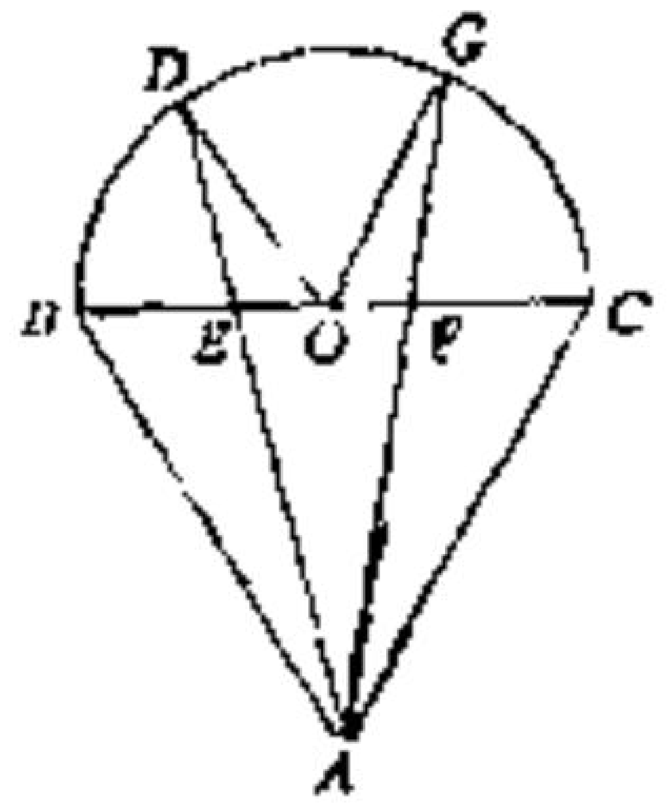
证明，$\frac{OE}{BE}=\frac{1}{2}$，$\frac{OD}{BA}=\frac{1}{2}$．

$\angle DEO=\angle AEB$．

由定理114　$\triangle DOE\backsim\triangle ABE$．

$\therefore$　$\angle DOE=\angle ABE=60^\circ$．

同理$\angle GOC=\angle DOG=60^\circ$



图复二—29

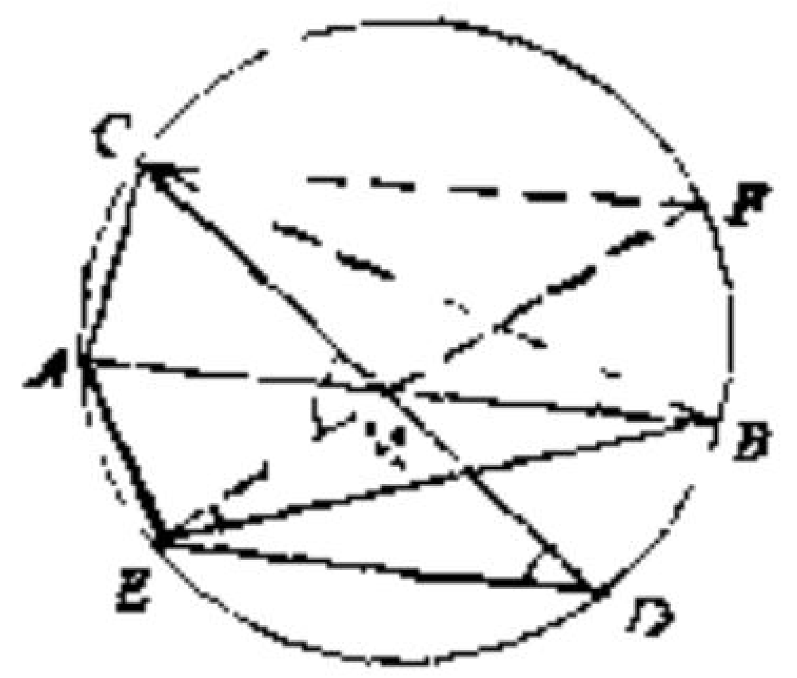
30．在一圆中，CD弦通过AB弦的中点M，DE弦平行于AB，求证$\triangle ACM\backsim\triangle EAM$，且$\triangle BCM\backsim\triangle EBM$．

证明：$\because$　$ME=MD$

有$\angle FED=\angle CDE$

故$CF\parallel AB$

有$\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{FB}$，$\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{BD}$．



图复二—30

31．设AD是Rt$\triangle ABC$的BC弦的高，以BD、CD各为直径作圆，交AB、AC于E、F，试证，EF适为所作两圆的外公切线。

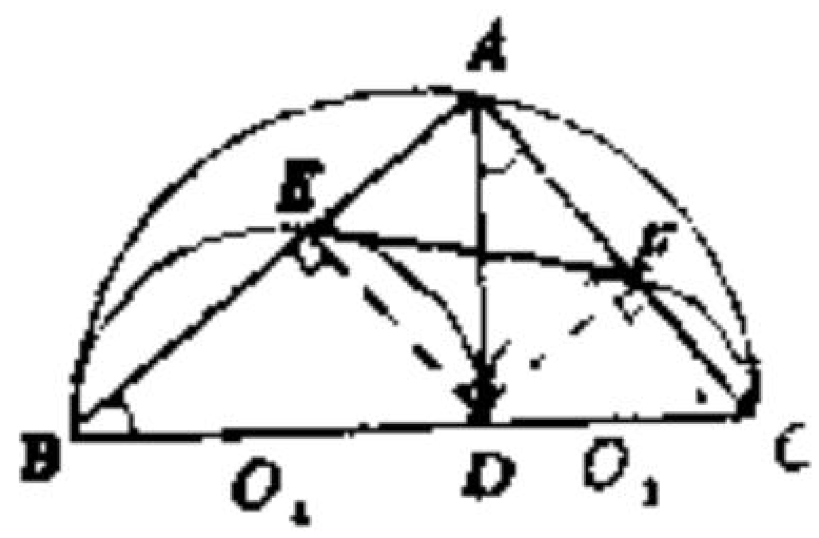
证明：$\because$　$\angle BED$、$\angle DFC$均为直角，则$AEDF$为矩形，$\therefore$　$\angle DEF=\angle DAF=\angle DBE$．

故　EF切$\odot O_1$于E．　　同理　FE切$\odot O_2$于F．

32．设四边形$ABCD$有内切圆或外切于$\odot O$，则$\odot AOB$与$\odot COD$，$\odot AOD$与$\odot BOC$各相切。

证明：作$\odot AOB$的切线OE．

有　$\angle BOE=\angle BAO=\frac{1}{2}\angle A$．



图复二—31

$\therefore$　$\angle OCB+\angle OBC=\angle BOE+\angle COE$

$=\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle A+\angle COE$

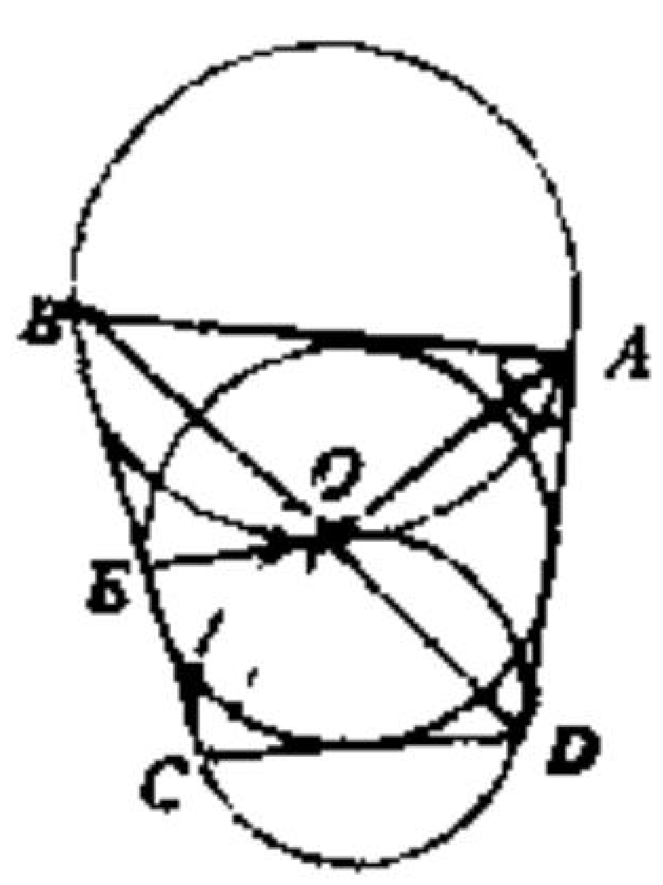
$=180^\circ$ (1)

又 $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)$

$=180^\circ$ (2)

由(1)、(2)得

$\angle COE=\frac{1}{2}\angle D=\angle CDO$



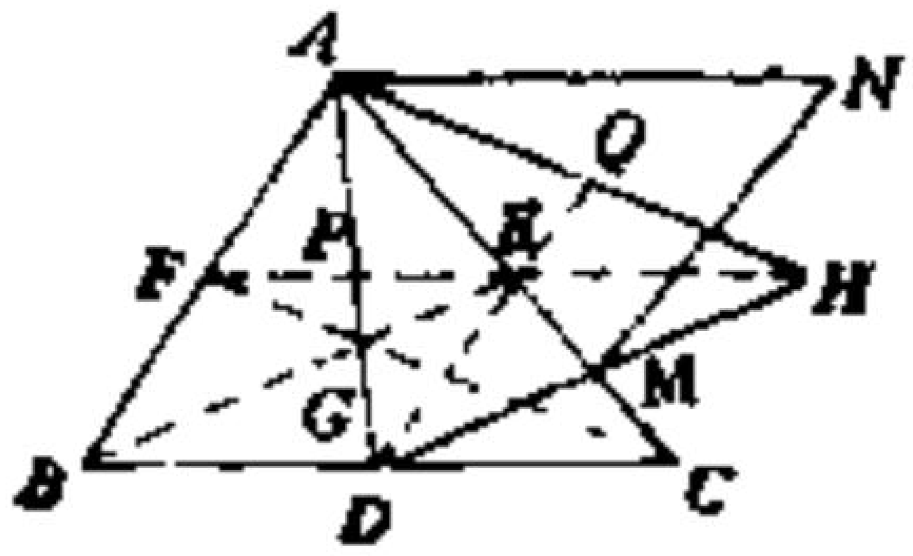
图复二—32

故 OE 是⊙COD 的切线。

33．以三角形的三中线为边作一三角形，又以此三角形中线为边作另一三角形，求证：这三角形与原三角形相似。

证明：AD、BE、CF 为△ABC 的三中线，作 $DH\parallel BE$ 与 FE 的延长线相交于 H．连 AH，由复习题一第 53 题知△ADH 为△ABC 的中线三角形，且 E 是△ADH 的重心，于是 AM、DQ、HP 为△ADH 的中线。

作 $MN \underline{\parallel} DQ$，连 AN，则△AMN 为△ADH 的中线三角形。



图复二—33

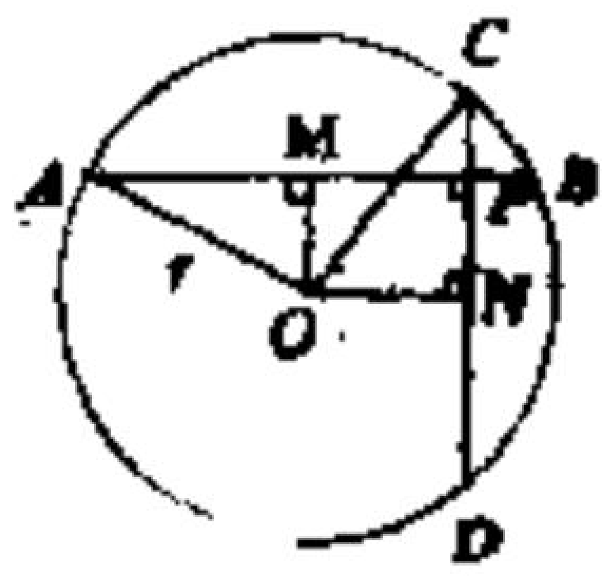
∵ AM 与 AC 重合，$MN\parallel DE\parallel BA$、$AN\parallel FE\parallel BC$．

∴ $\triangle AMN\backsim\triangle CAB$．

34．在一圆中，任取互相垂直的两弦 AB 与 CD，若 P 是垂足，则 $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 为一常数．

证明：∵ M，N 为 AB，CD 的中点

$$\therefore\ PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=(AM+PM)^2+(BM-PM)^2$$
$$+(CN-PN)^2+(DN+PN)^2$$
$$=2(AM^2+PM^2+CN^2+PN^2)$$
$$=2(AM^2+OM^2)+2(CN^2+ON^2)$$
$$=2(OA^2+OC^2)=4r^2=\text{常数}.$$



图复二—34

第三章　证　题　术

第一节　相等　习题十

1. 两圆交于 A、B 两点，在每圆中各作一弦 AC、AD 使切于他圆。求证：$\angle ABC=\angle ABD$.

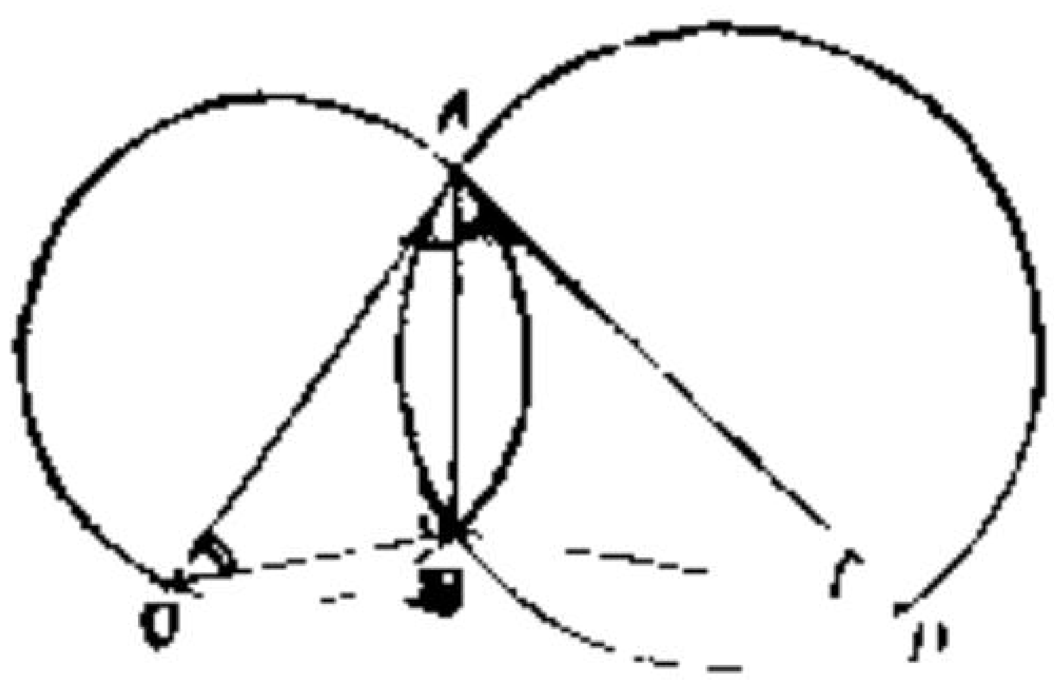


图 10—1

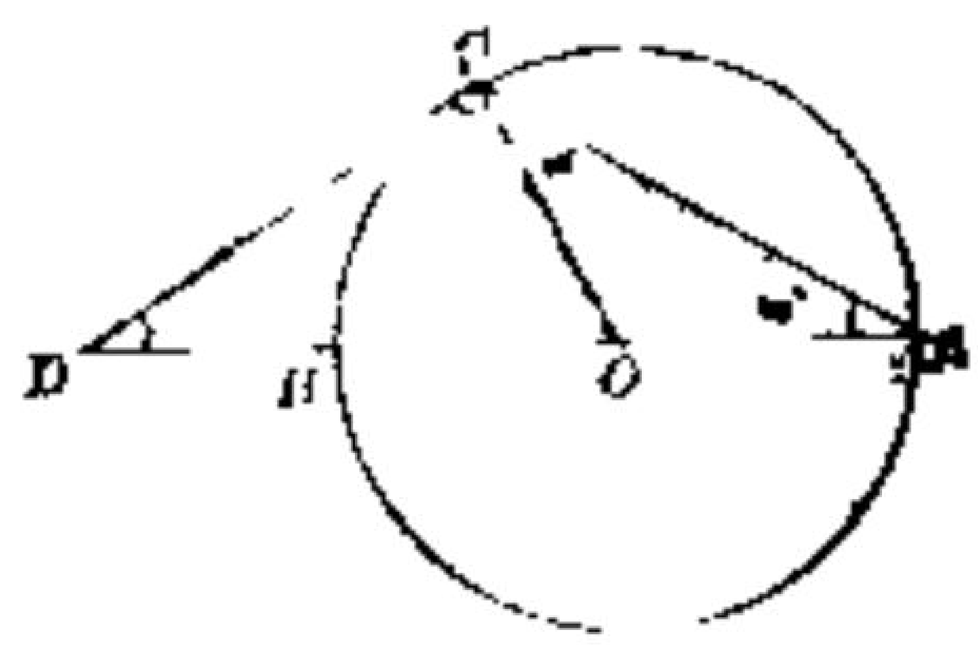


图 10—2

2. 圆中直径 AB 与弦 AC 夹着 $30°$ 的角，过 C 点引切线交 AB 的延长线于 D，求证：$AC=CD$.

3. 设 BC 切⊙O 于 B，OC 垂直于半径 OA 而交直线 AB 于 D，则 $BC=CD$.

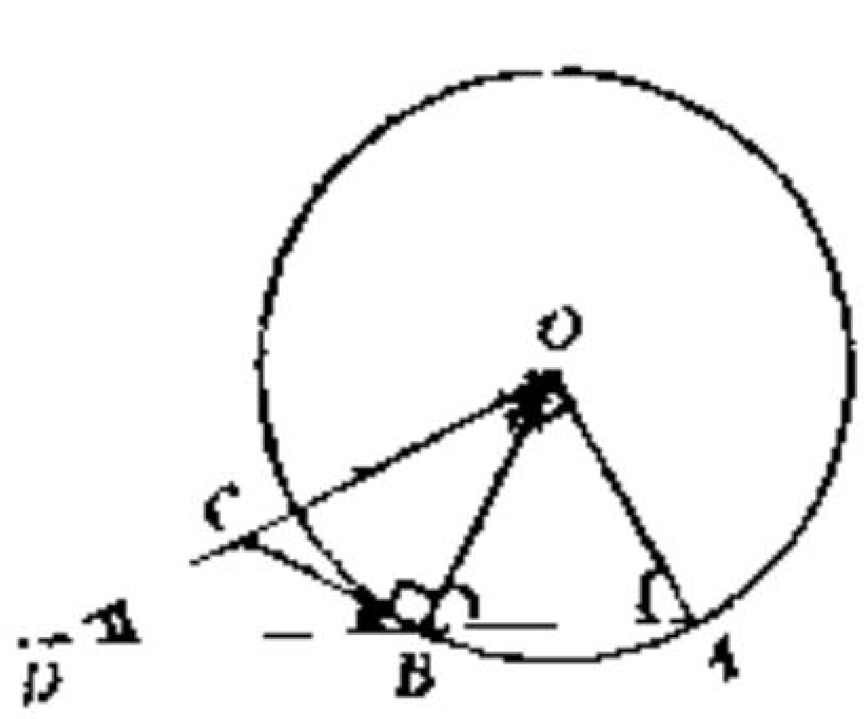


图 10—3

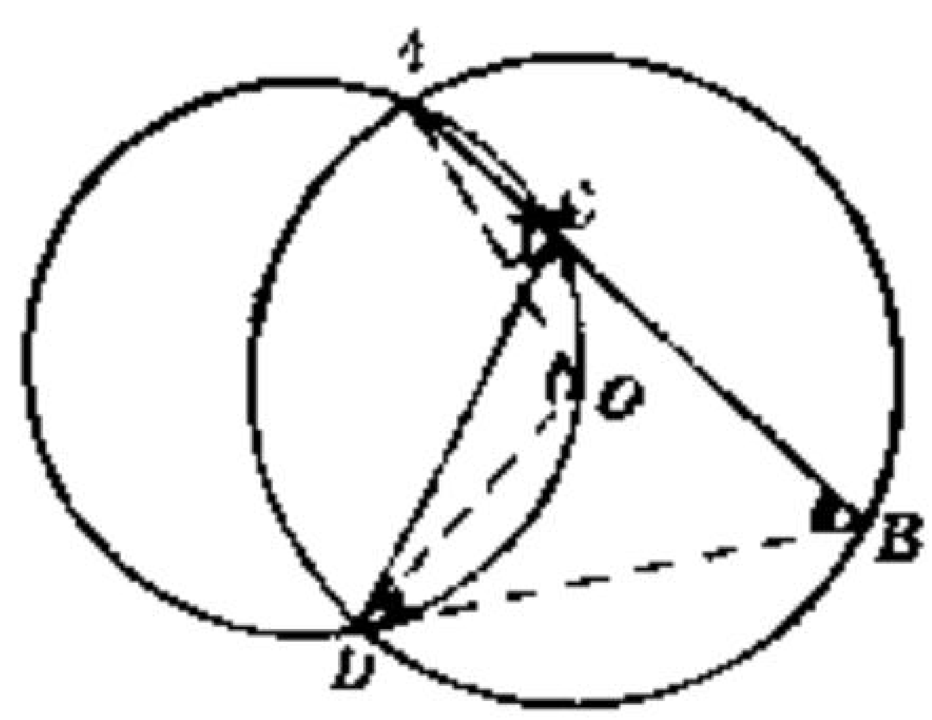


图 10—4

4. AB 是⊙O 的弦，过 A、O 两点任作一圆交直线 AB 于 C，再交⊙O 于 D，求证：$BC=CD$.

5. AB 是某圆的弦，在这弦的两方延长线上各取一点

C、D，使 $AC=BD$，然后自C、D各向圆引一条切线，令分居于 AB 的两侧，则两切点的连线必平分 AB 弦。

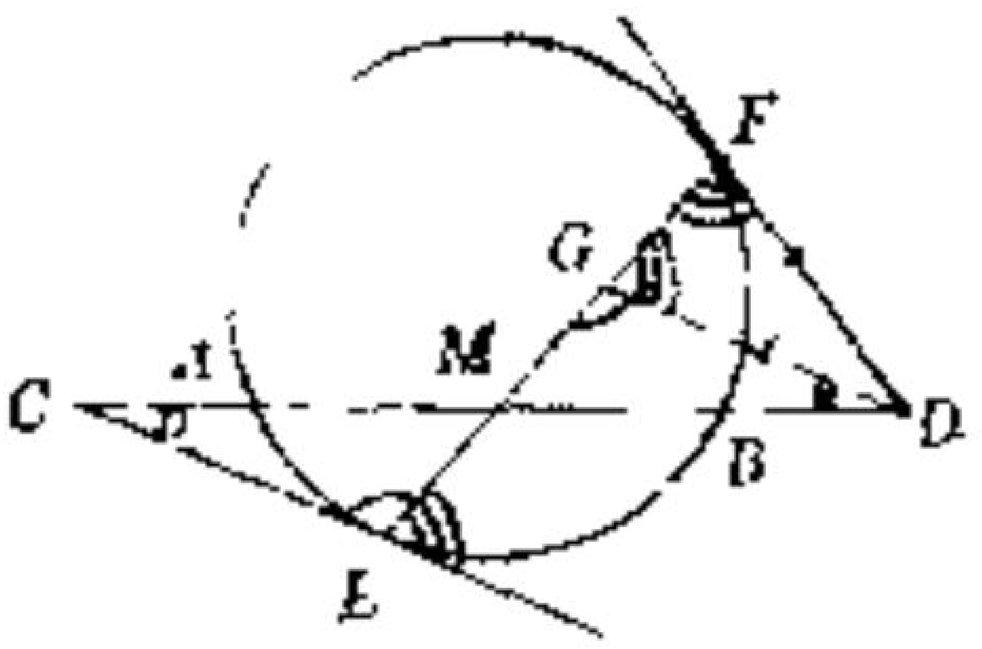


图10—5

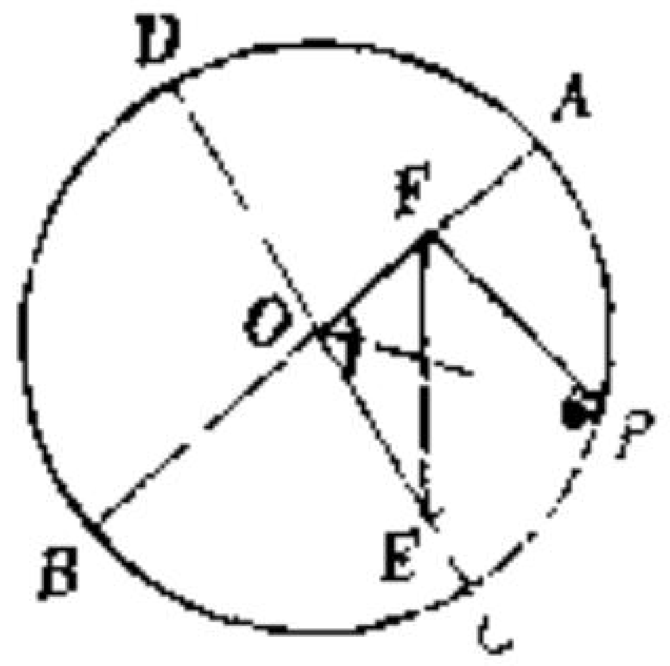


图10—6

提要：(1) $CE^2=CA\cdot CB$，$DF^2=DB\cdot DA$；

(2) $CE=DF=DG$

6．过圆上任意一点，向固定的两直线作垂线，求证：两垂足的距离为定长．

提要：(1) P、E、O、F共圆且此圆直径OP有定长；

(2) $\angle EPF$有定值。

7．两圆交于P点．过P任作两直线交一圆于A、B，交他圆于A′、B′，求证：直线AB与A′B′有一定的交角．

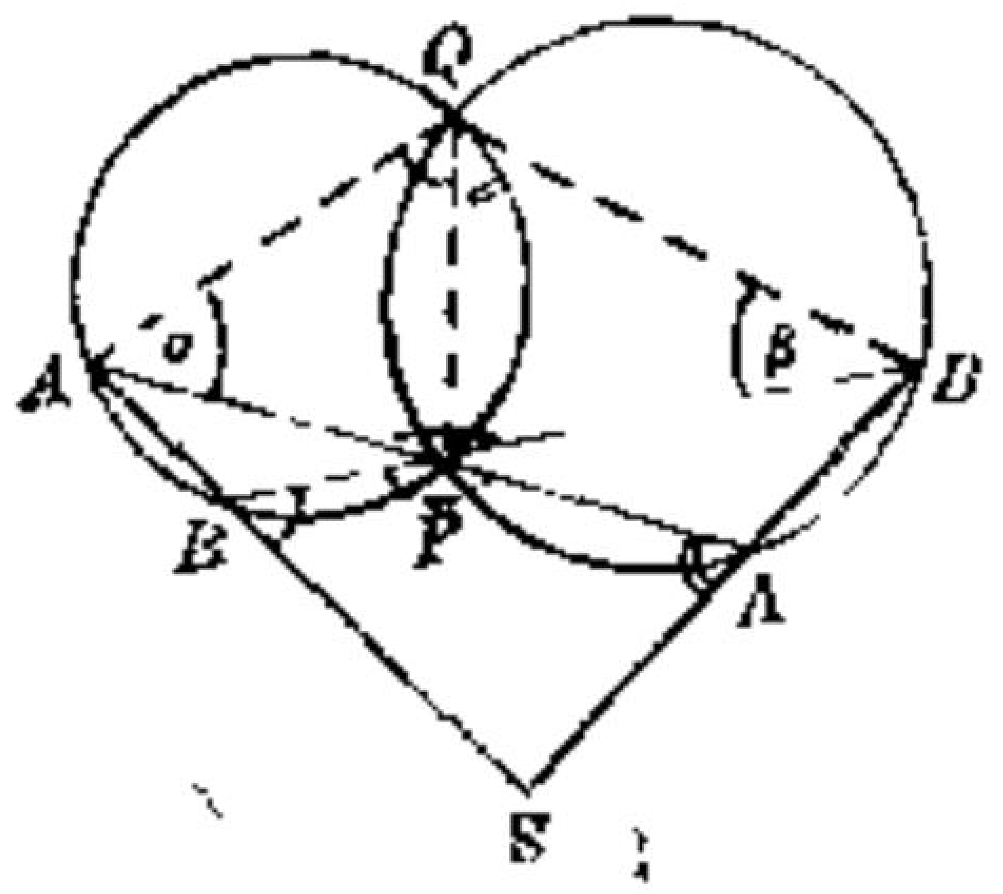


图10—7

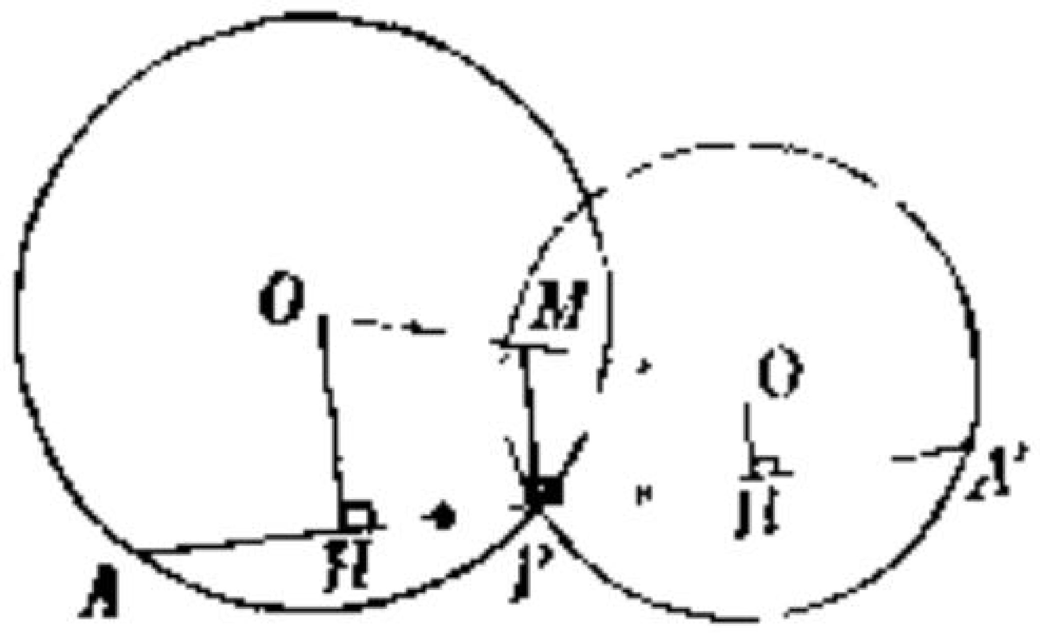


图10—8

提要：$\angle S=\alpha+\beta$．

8．⊙O与⊙O′交于P点，M是OO′的中点．过P点作直线垂直于PM而交两圆于A、A′．求证：$PA=PA'$

9. $\odot O$与$\odot O'$交于P点，M是OO'的中点. 过P任作直线交两圆于A、A'，若Q是AA'的中点，则$MP=MQ$.

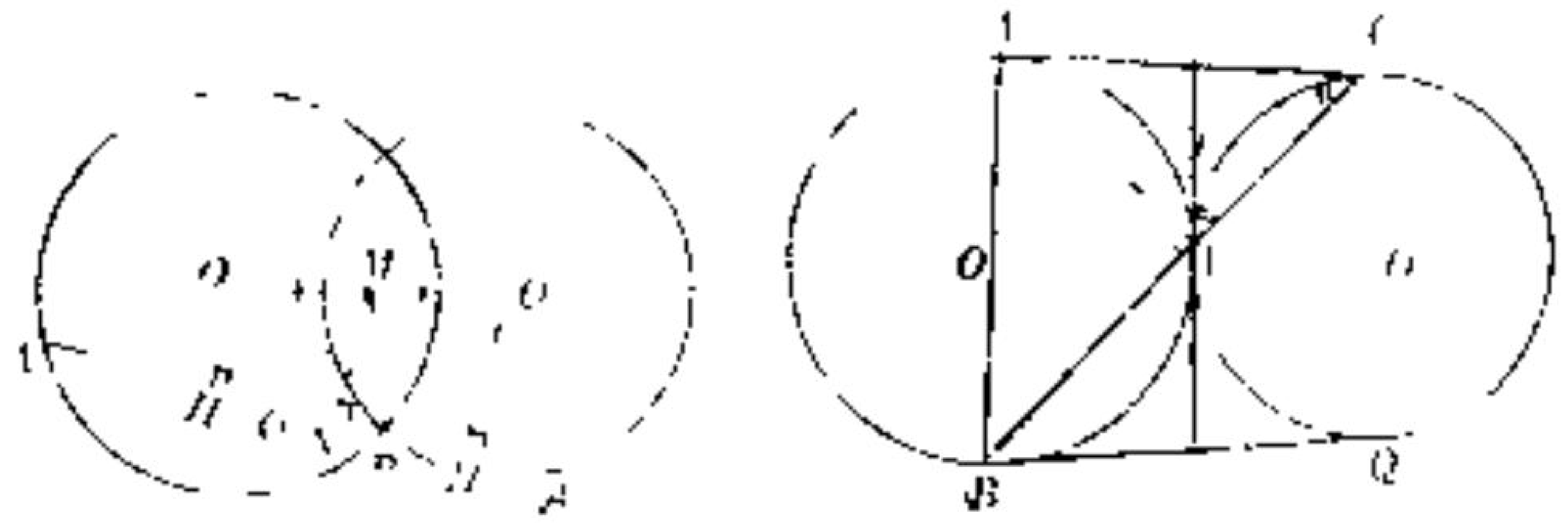


图 10—9　　图 10—10

提要：$QH=AQ-AH=\frac{1}{2}(AP+PA')-\frac{1}{2}AP$

$$=\frac{1}{2}PA'=PH'.$$

10. 两圆外切，一外公切线切其中一圆于A，AB为此圆的直径. 求自B至他圆的切线长等于AB.

提要：(1) $\angle APC$与$\angle APB$均为直角，故B、P、C三点共线；

(2) 由射影定理及切割线定理得：

$AB^2=BP\cdot BC=BQ^2$.

11. 以$\triangle ABC$的BC边为弦作一圆，交直线AB、AC于E、F，连EF设交$\odot ABC$于G、H，则$AG=AH$.

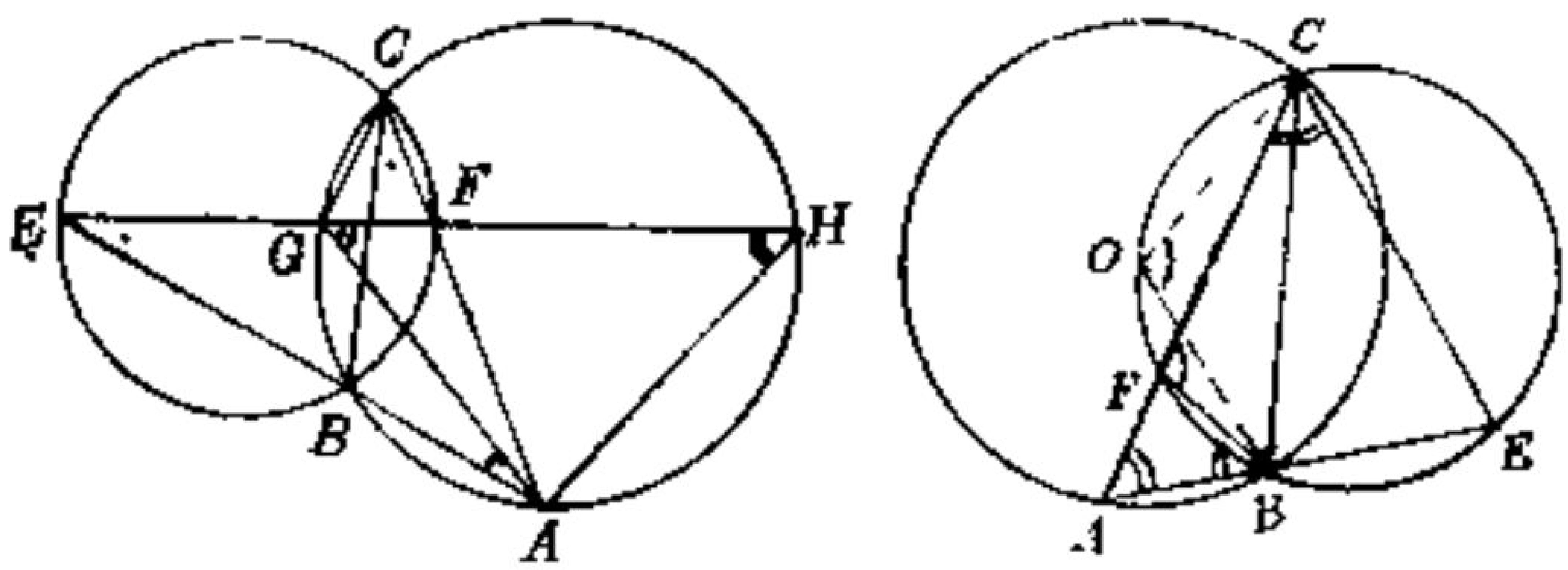


图 10—11　　图 10—12

提要：$\angle H=\angle ACG=\angle FEB=\angle GAB=\angle HGA$.

12．O是$\triangle ABC$的外心．作$\odot BOC$设交直线AB、AC于E、F，求证：$AE=CE$，$AF=BF$.

提要：$2\angle A=\angle O=\angle CFB=\angle A+\angle FBA$.

13．设$\triangle ABC$的A角的内、外平分线交直线BC于E及F，则过A点所作$\odot ABC$的切线必平分EF线段。

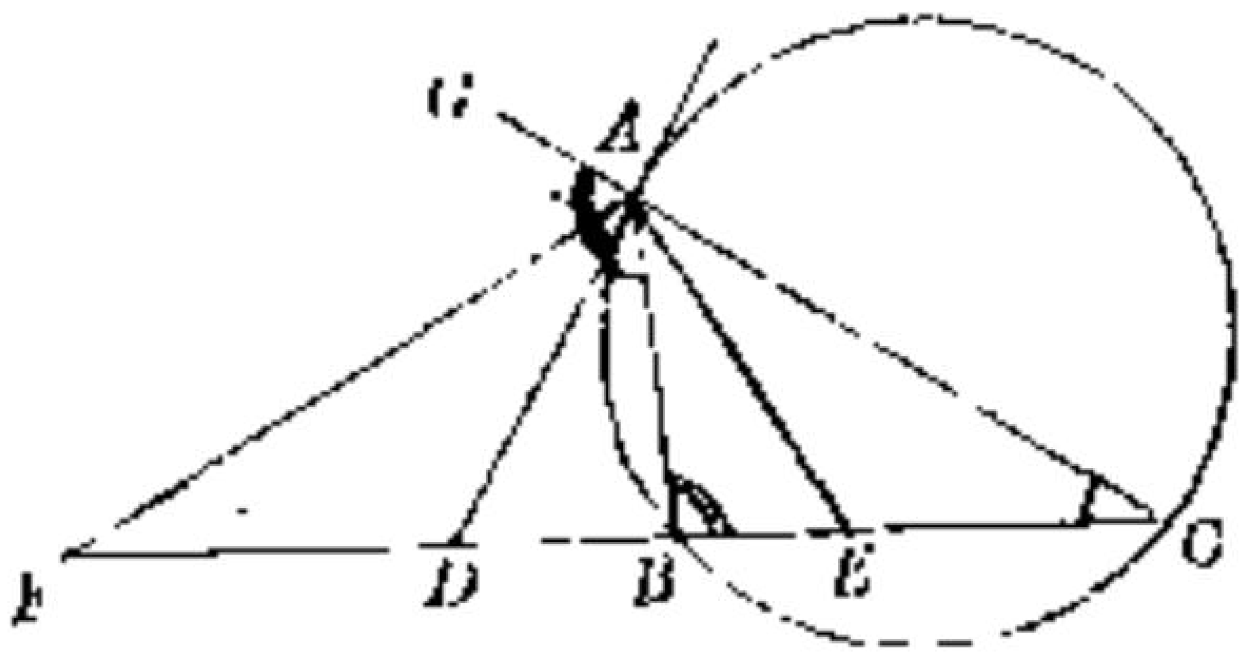


图10—13

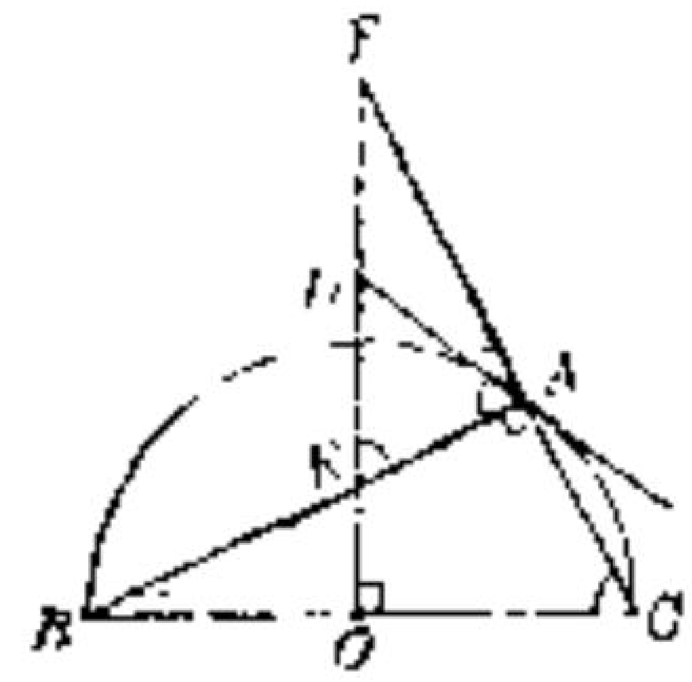


图10—14

提要：(1) $\angle DEA=\angle C+\angle CAE=\angle DAB+\angle BAE=\angle DAE$.

(2) $\angle F=90^\circ-\angle AEF=\angle DAF$.

14．设Rt$\triangle ABC$的弦BC的中垂线交直线AB、AC于E、F，则过A点所作$\odot ABC$的切线必平分EF线段。

15．M是Rt$\triangle ABC$的斜边BC的中点．通过A、M两点任作一圆交直线AB于E，此圆中的弦EF平行于BC．求证：EF之长一定。

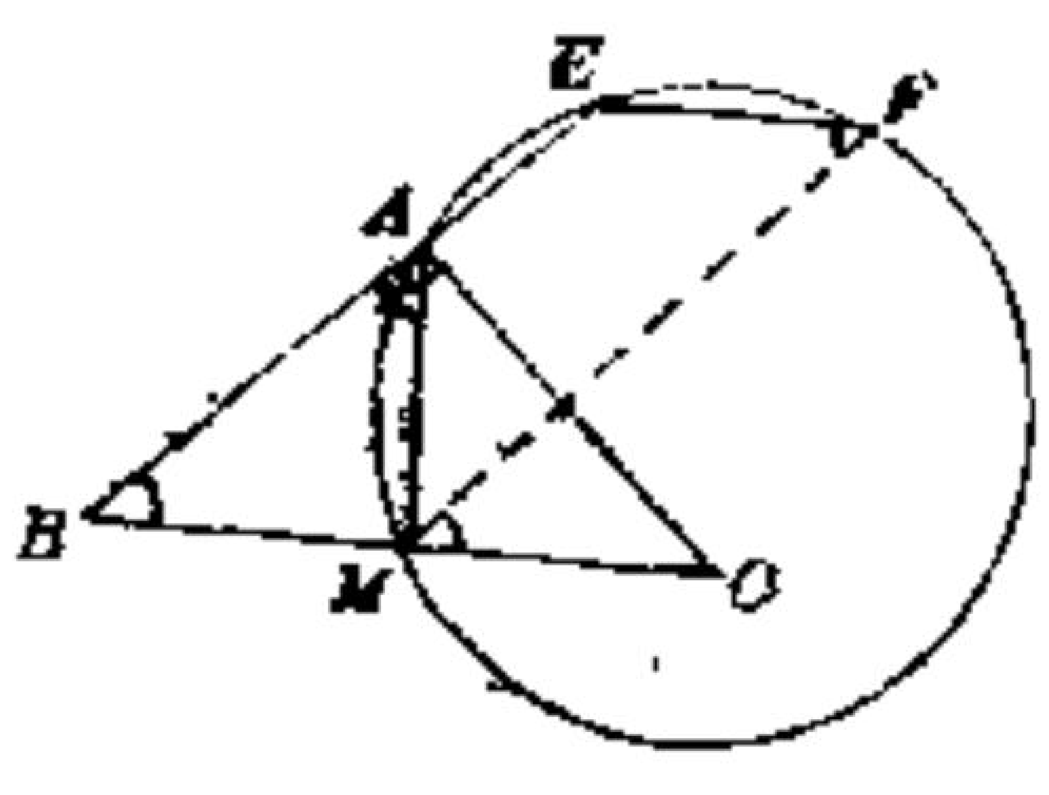


图10—15

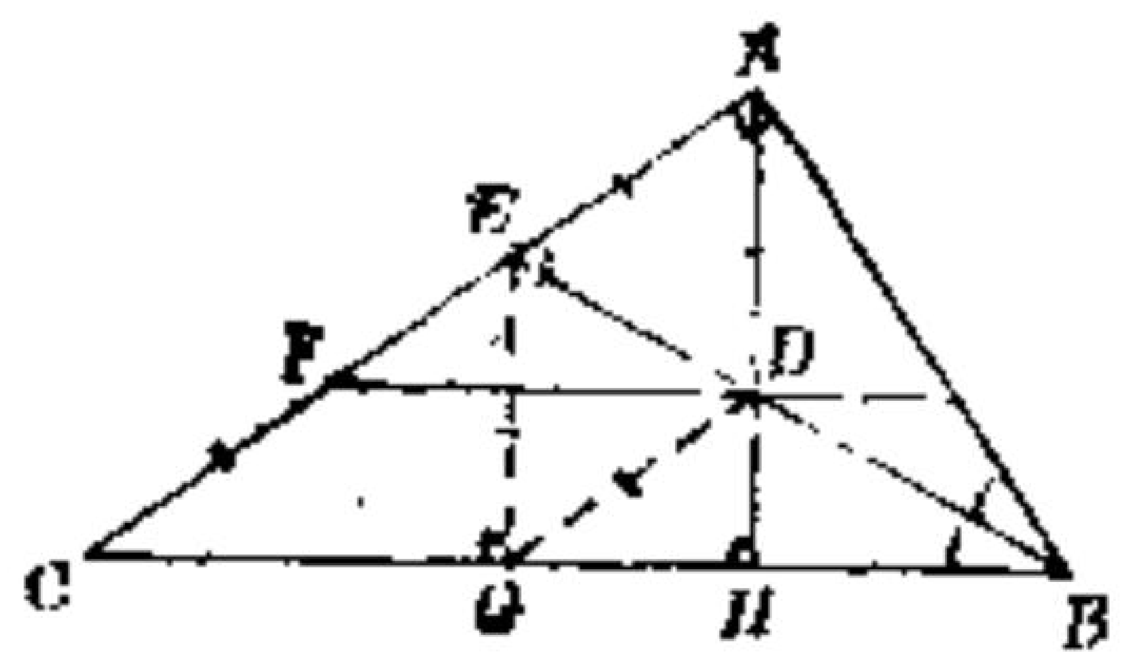


图10—16

16．$\triangle ABC$中，$\angle A=90°$，$\angle B$的平分线交AC边于E而交BC边的高线于D．今过D点作直线平行于BC而交AC于F．求证：$AE=CF$.

提要：(1) $AEGH$为菱形；

(2) $CFDG$为平行四边形。

17．$\triangle ABC$中，$AB=AC$．在半线BA上取E点，在AC的延长线上取F点，使$BE=CF$．连EF交BC于D.求证：$DE=DF$.

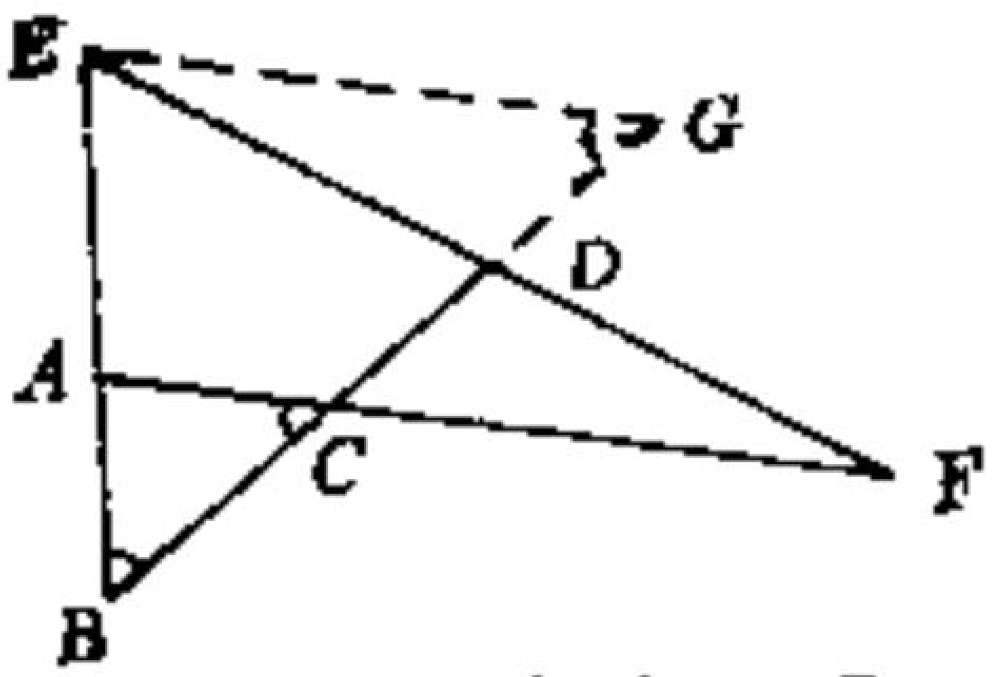


图10—17



图10—18

提要：作$EG\parallel AC$.

18．$\triangle ABC$中，M是BC的中点，$\angle A$的平分线交BC边于D.过A、D、M三点作圆设交直线AB、AC于E、F.求证：$BE=CF$.

提要，(1) $BA\cdot BE=BD\cdot BM$，$CF\cdot CA=CM\cdot CD$；

(2) $BD:CD=BA:CA$.

19．试对上题设计一种避免用比例定理的证法。

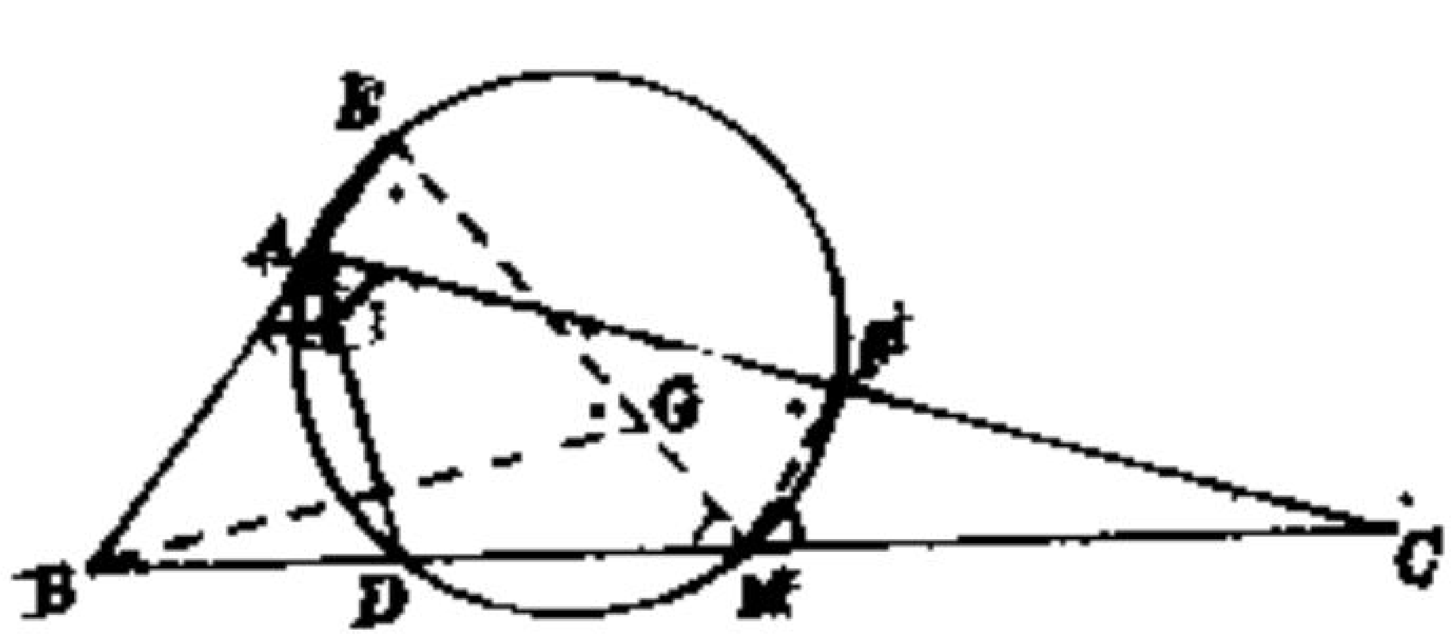


图10—19

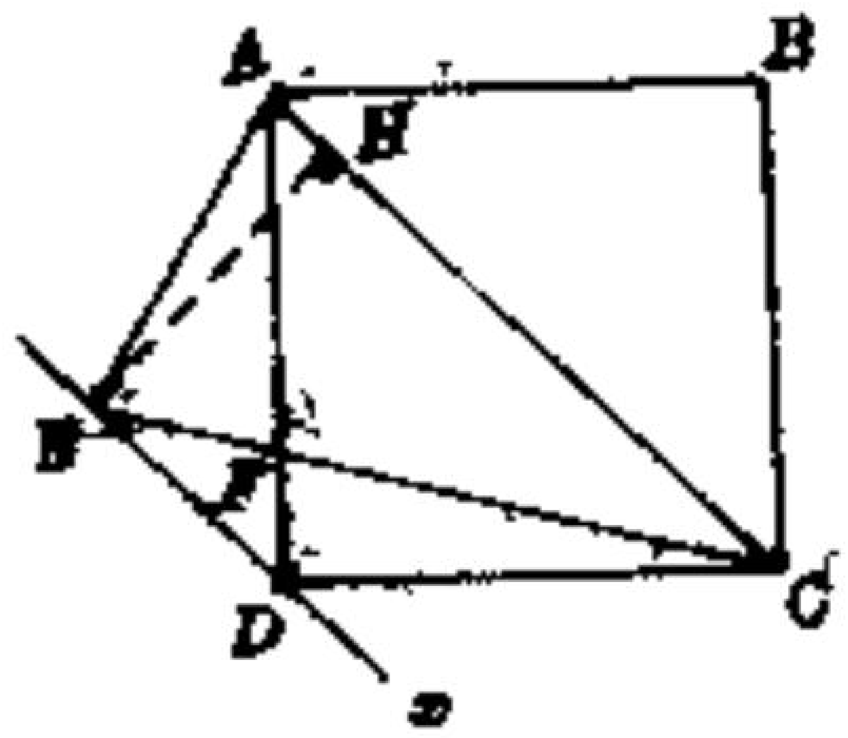


图10—20

提要：(1) 联 EM 并截 $MG=MF$. 有$\triangle EGM\cong\triangle CFM$

(2) $\angle BGE=\angle MFA=\angle MEA$

20．$ABCD$ 是正方形，直线 $Dx/\!/AC$．设以 C 点为圆心，CA 长为半径画弧交 Dx 于 E（两交点任取其一）．CE 交 AD 于 F，则 $AE=AF$.

提要：(1) 由 $EH=\frac{1}{2}EC$，得 $\angle ECH=30°$；

(2) 由 $\angle CEA=\angle CAE=75°$，得 $\angle EAF=30°$．

21．设四边形有一双对边相等，则他双对边中点的连线与该双等边所在直线的交角相等。

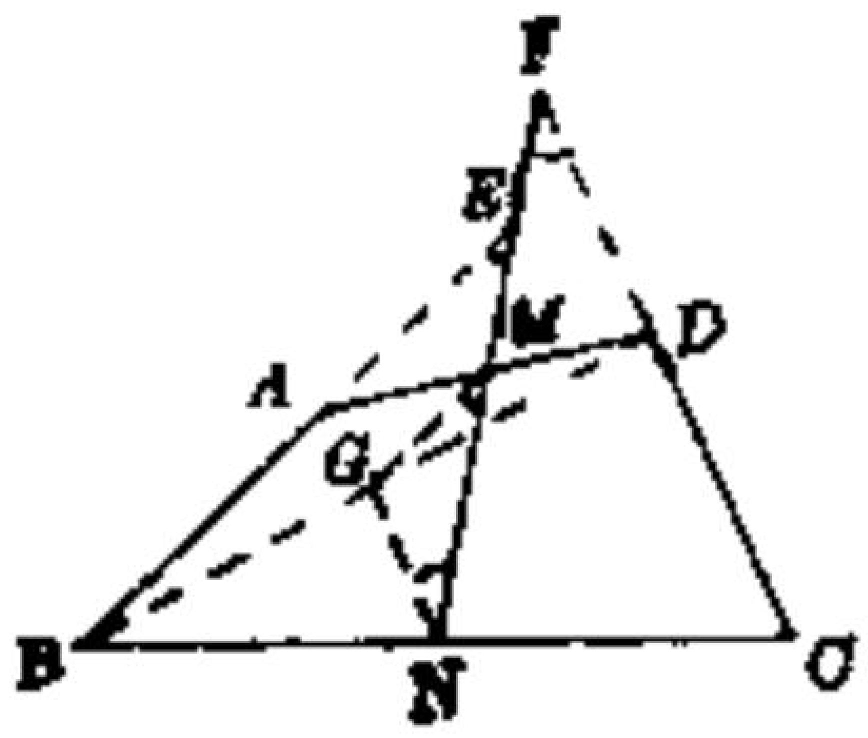


图10—21

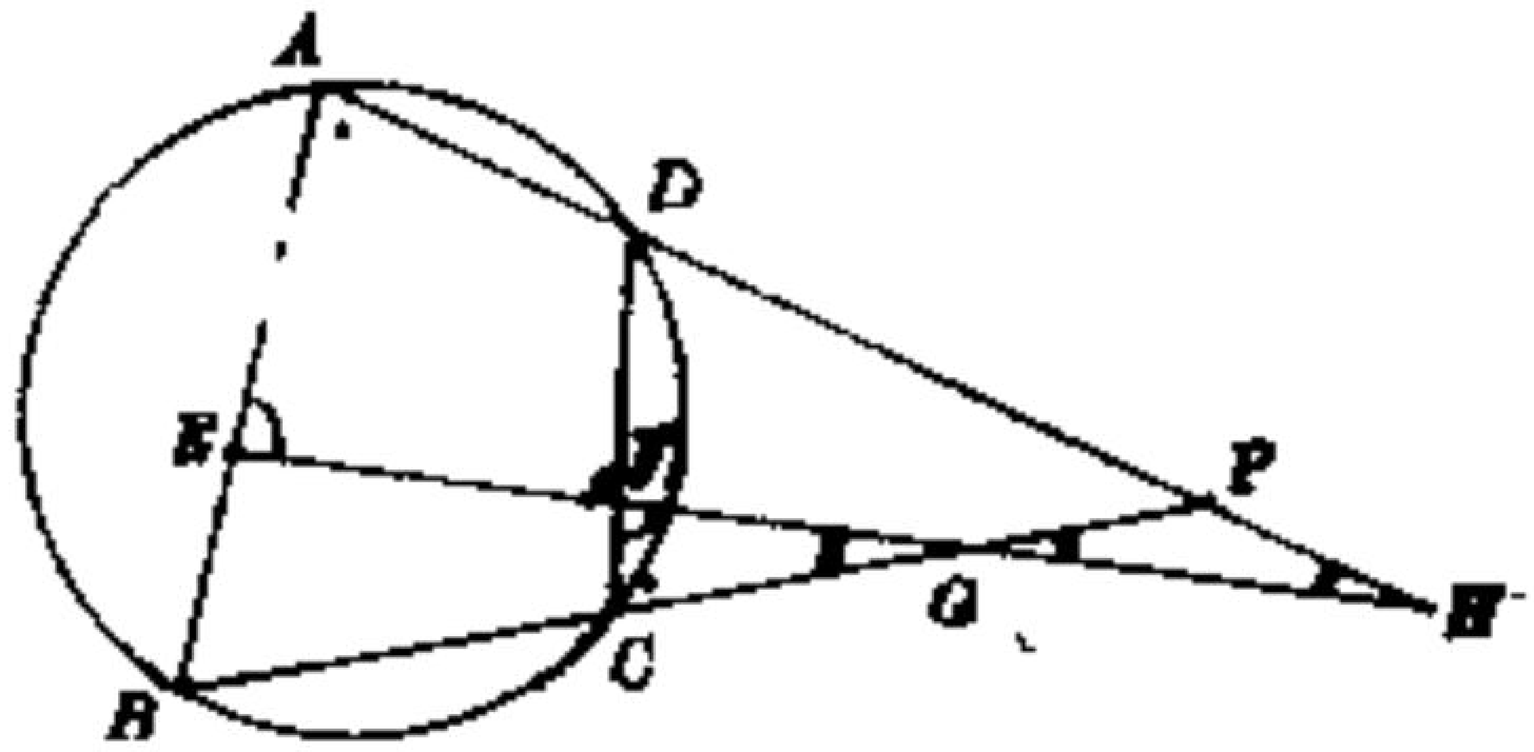


图10—22

提要：取 BD 的中点 G，有 $MG/\!/AB$、$GN/\!/DC$，则 $GM=GN$．

22．设一直线与圆内接四边形一双对边所在直线交成相等的同侧内角，则亦与他双对边所在直线交成相等的同侧内角。

23．若圆内接四边形的两对角线互相垂直，则过其交点所作任一边的垂线必将对边平分。

本题称卜拉美古嗒（Brahmagupta）定理

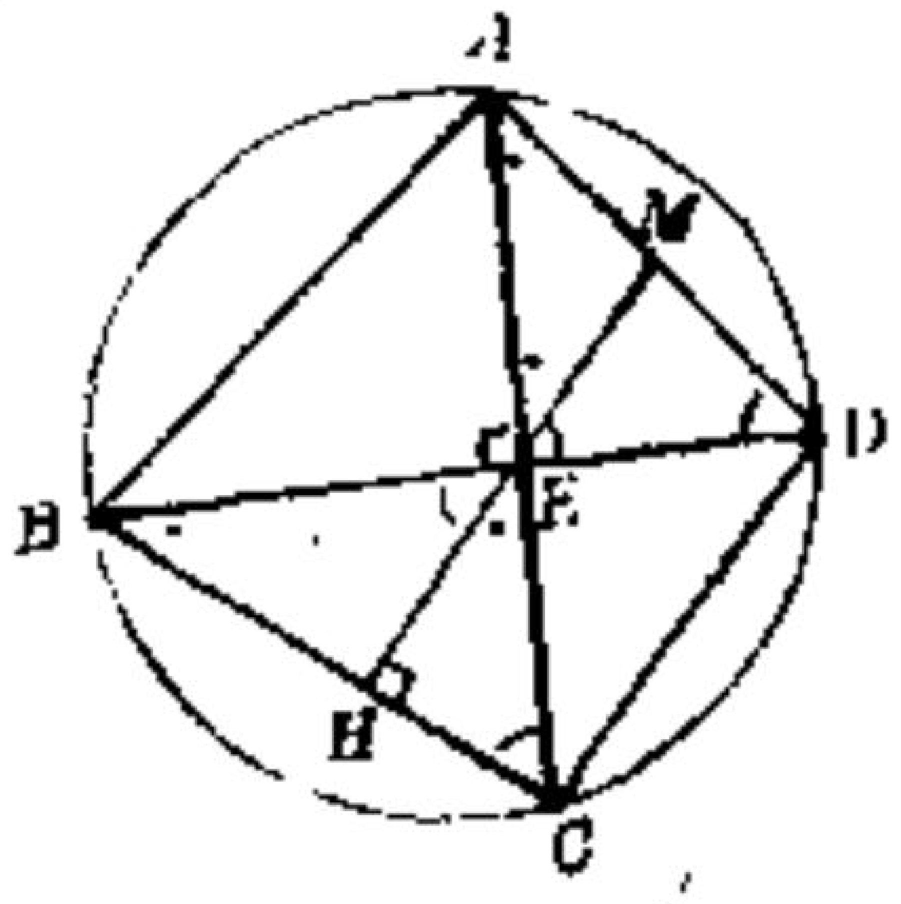


图 10—23

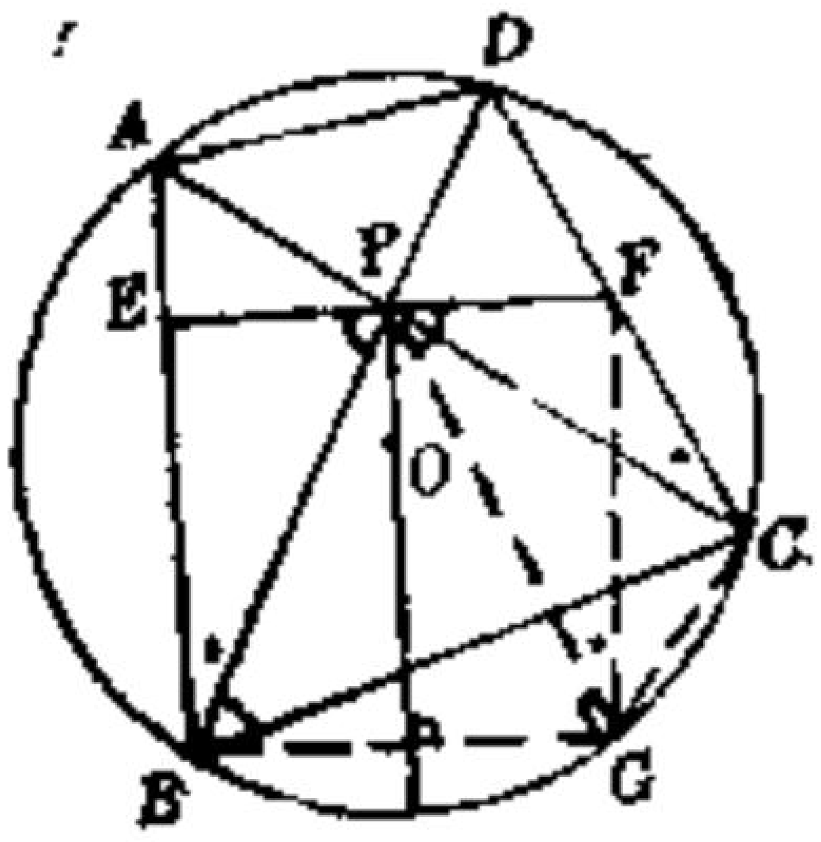


图 10—24

24．四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，P 是它的对角线交点，过 P 点作直线垂直于 PO 而交直线 AB、CD 于 E，F．求证：$PE=PF$．

提要：(1) 作 B 点关于 PO 的对称点 G，则 $\angle GCF$ 与 $\angle GBD$、$\angle GPF$ 均互补，故 G、P、F、C 四点共圆；

(2) $\triangle GPF \cong \triangle BPE$．

25．AD 是 $\odot ABC$ 的直径，过 D 作切线设交 BC 于 P．将 P 点与圆心连成直线交 AB、AC 于 M、N．求证：$OM=ON$．

提要：(1) 作 $OG\perp BP$，则 O、G、D、P 四点共圆；

(2) 作 $CE /\!/ NM$，有 F、G、D、C 四点共圆；

(3) 由 $GF /\!/ BE$，得 F 是 CE 的中点。

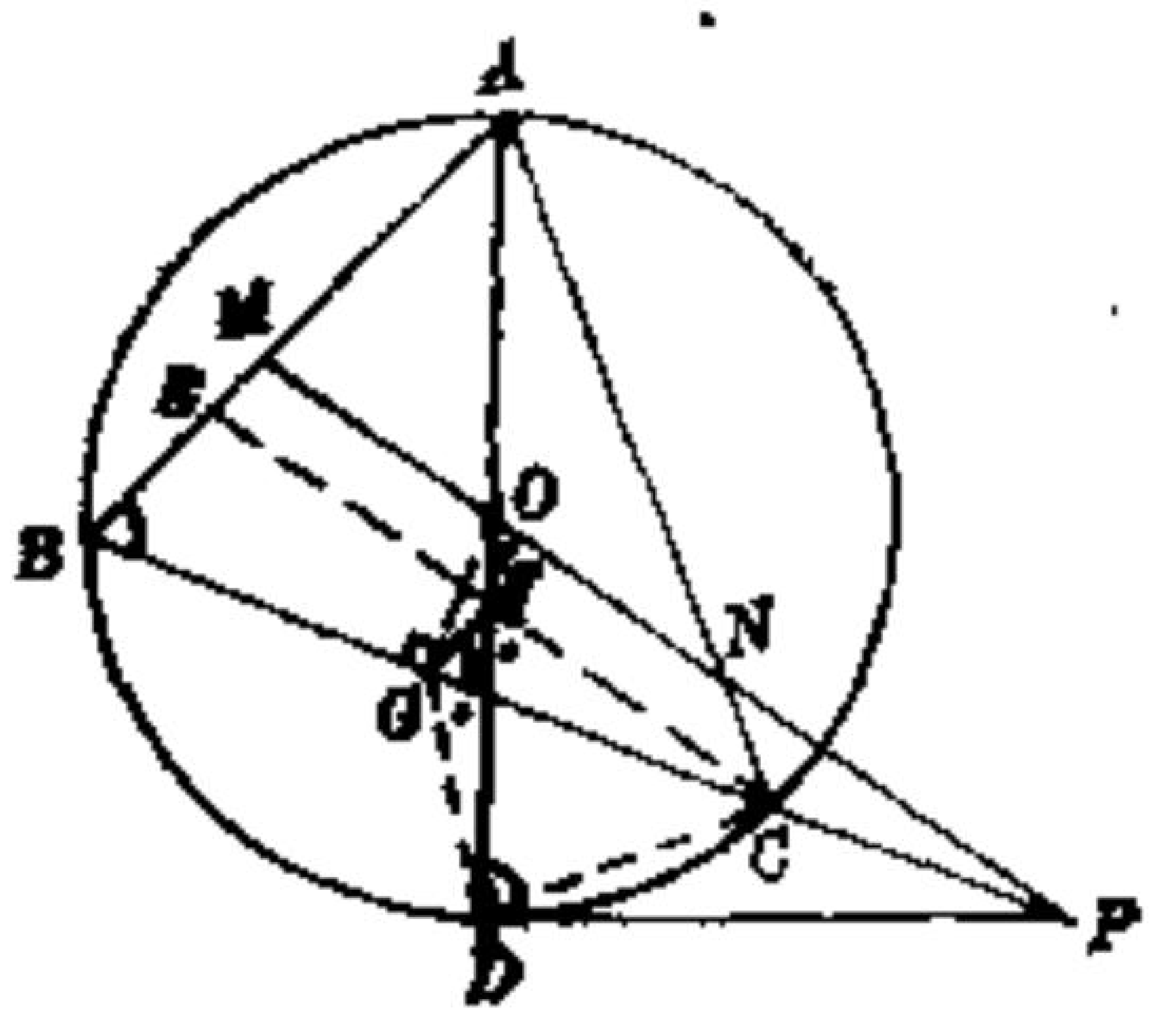


图 10—25

第二节　相差倍分与代数证法　习题十一

1．正三角形外接圆上任一点至三顶点的连结线，其长者必等于其余二者之和．

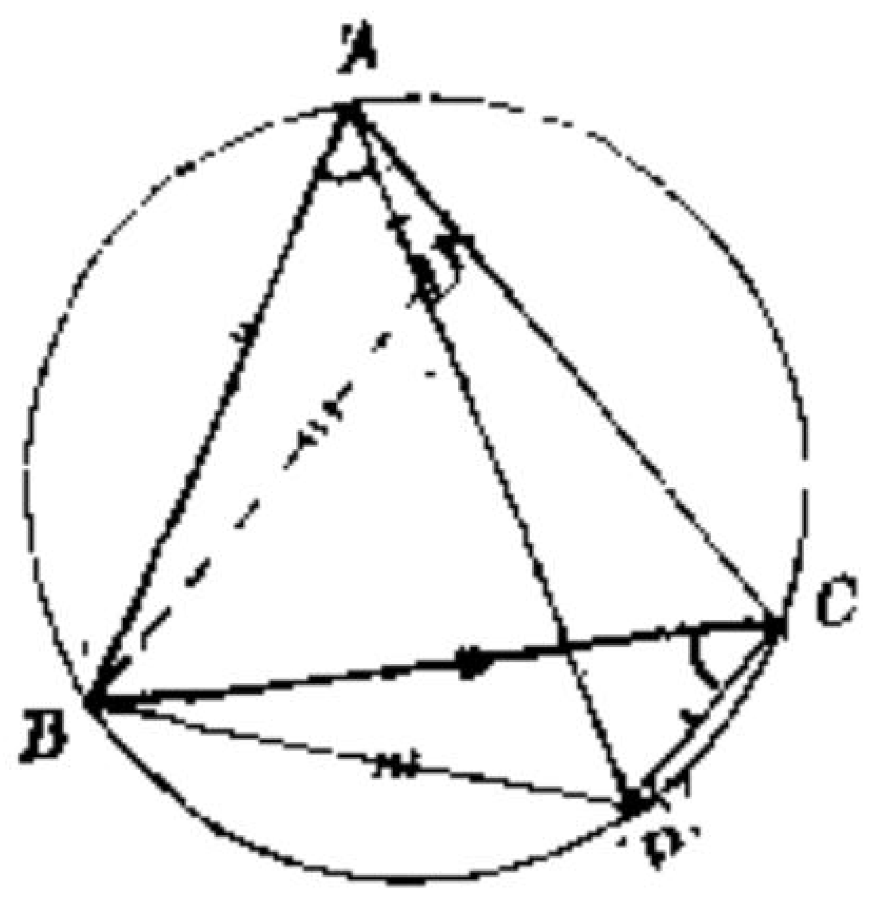


图11—1

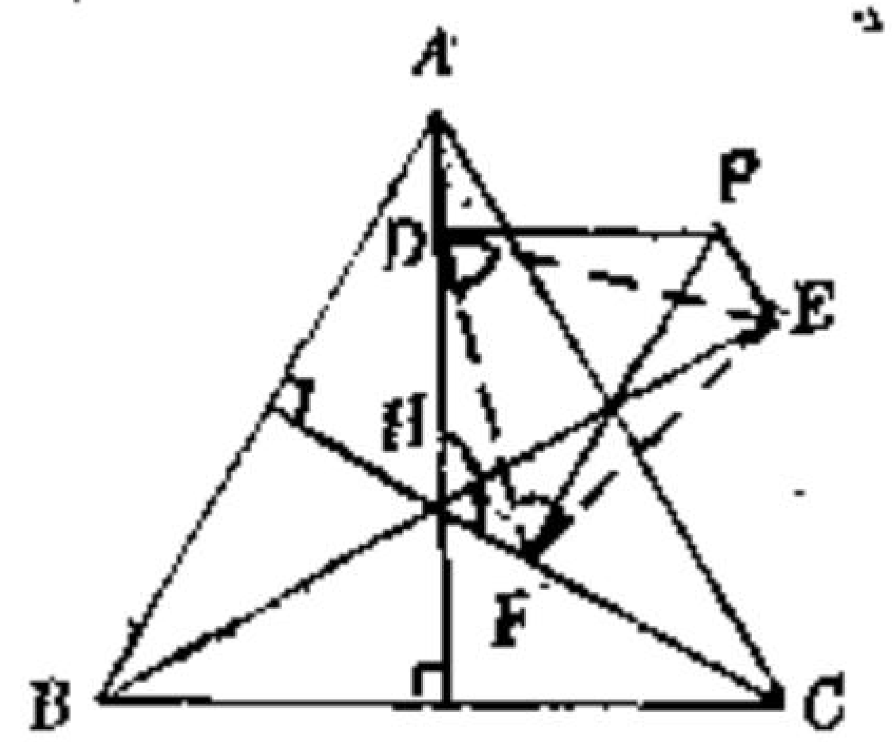


图11—2

提要：截 $AD=CP$，则$\triangle DAB\cong\triangle PCB$ 与$\triangle PBD$ 为正三角形．

2．由任一点向正三角形的三条高线作垂线．求证这三垂线中的长者等于其余二者之和．

提要：（1）P、D、E、F 在以 PH 为直径的圆上；

（2）$\triangle DEF$ 为正三角形．

3．正六边形外接圆上任一点至六顶点的连结线，其中两长者之和必等于其余四者之和．

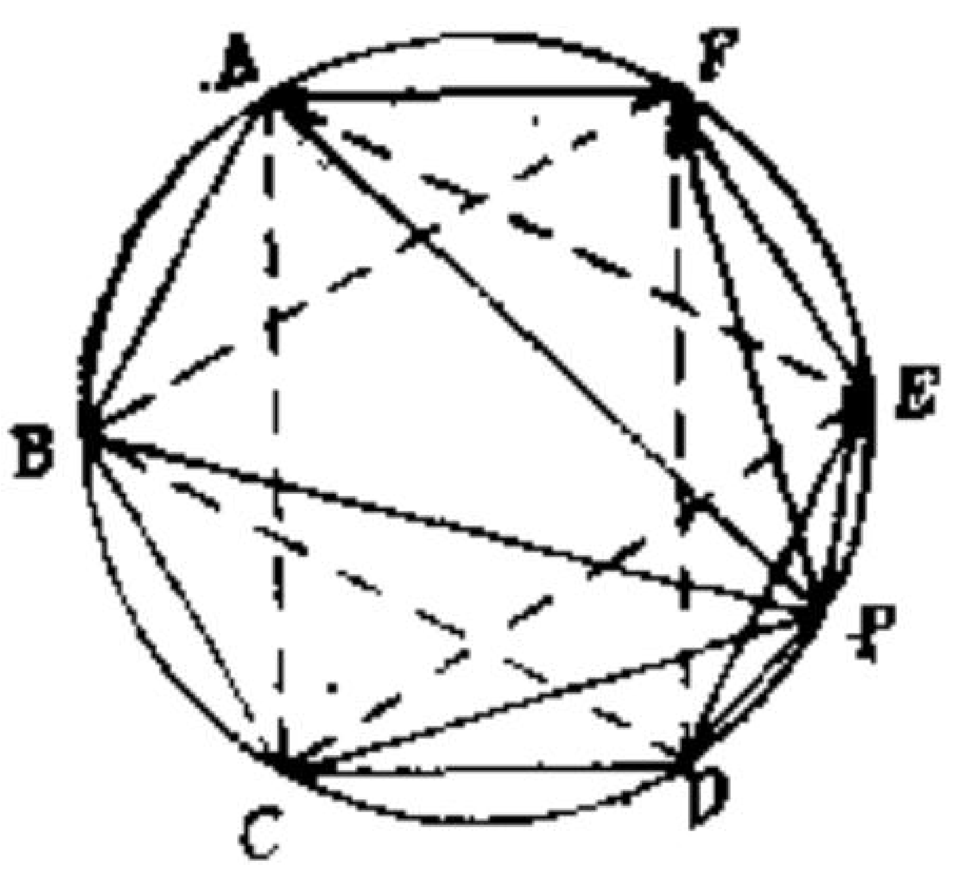


图11—3

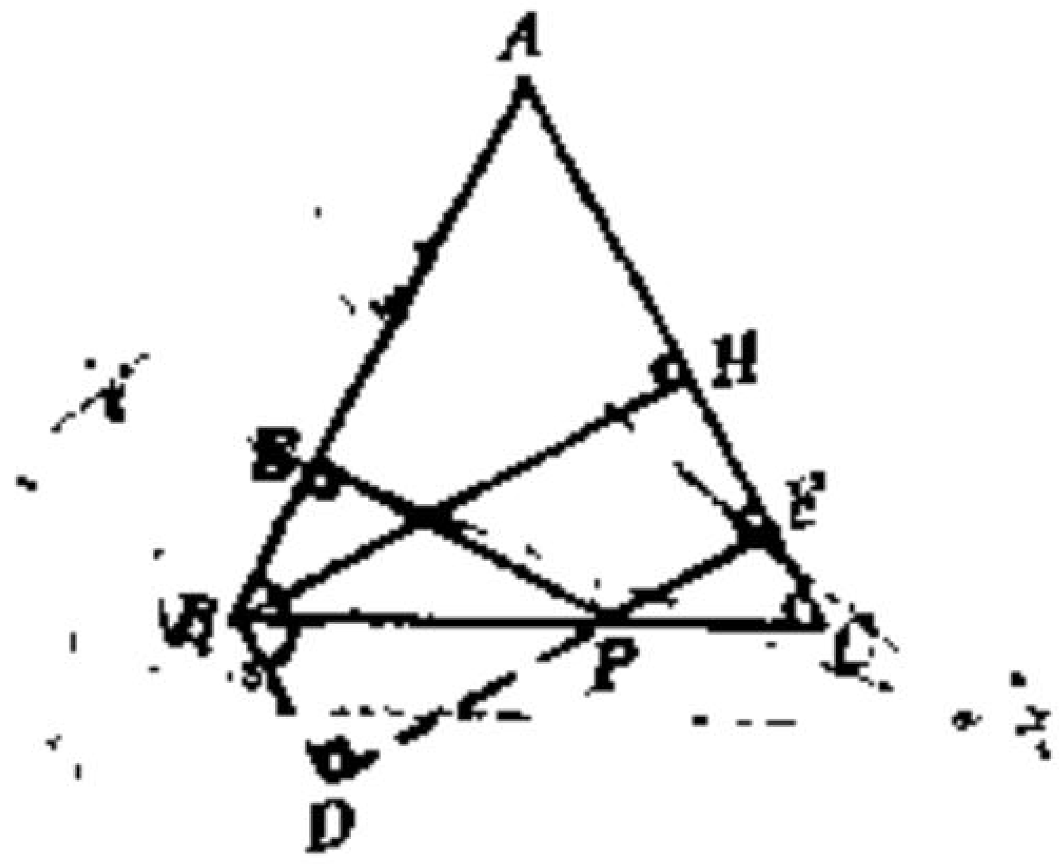


图11—4

提要：$\triangle ACE$ 及 $\triangle BDF$ 均为正三角形．

4．等腰三角形底边上任一点至两腰的距离和，等于腰上的高．

5．等腰三角形底边延长线上任一点至两腰（所在直线）的距离差，等于腰的高．

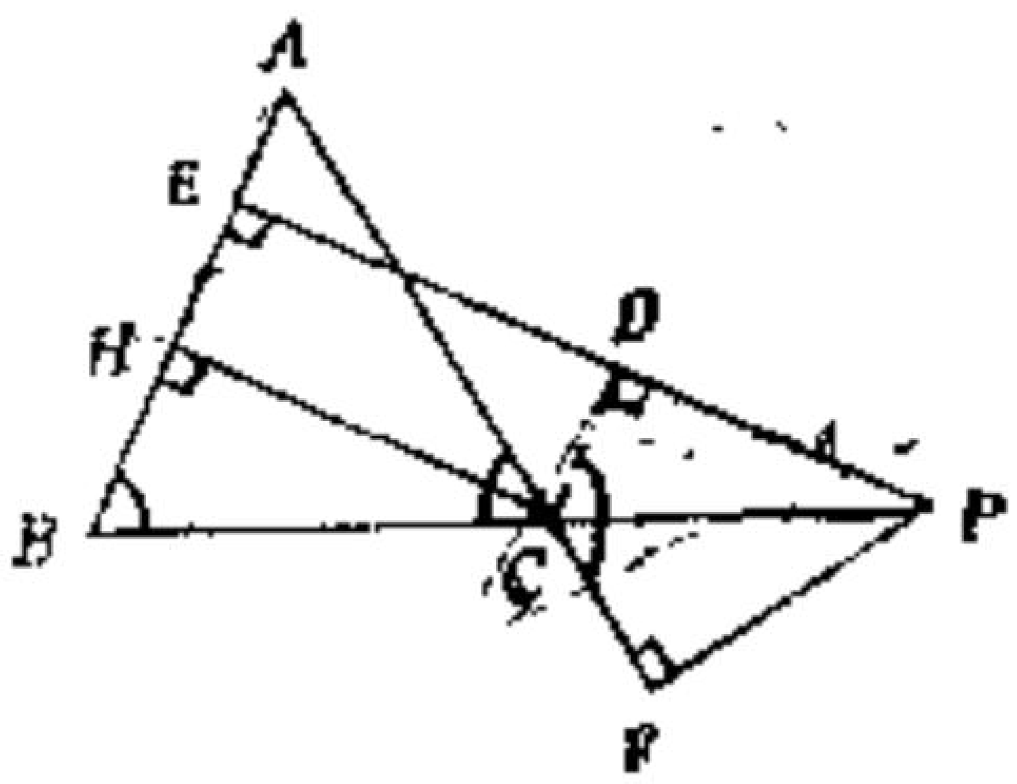


图11—5

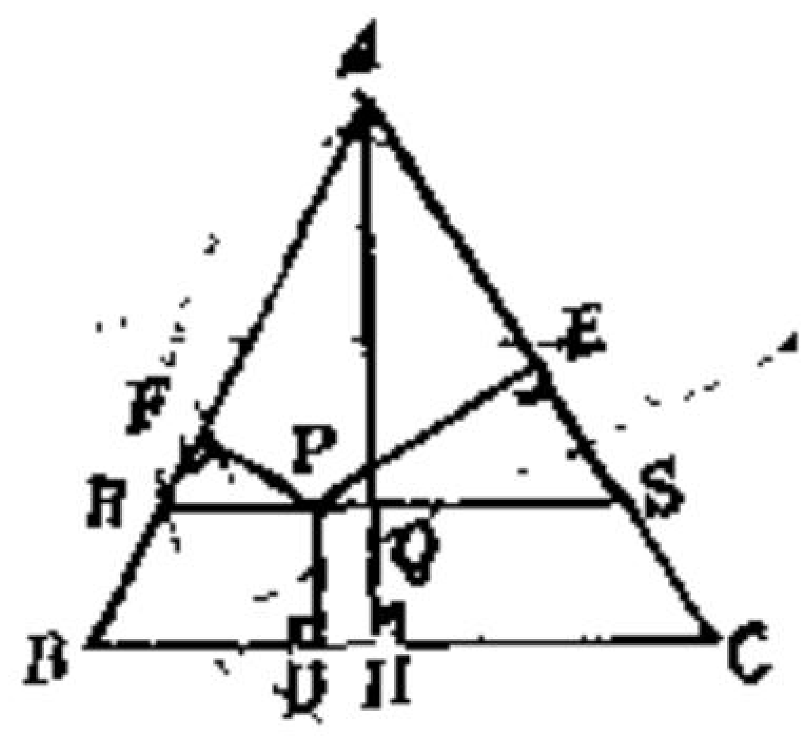


图11—6

6．正三角形内部任一点至三边的距离和，等于这三角形的高．

提要：$\triangle ARS$ 仍为正三角形．

7．在等腰三角形 $\triangle ABC$ 中，顶角 $\angle A=100^\circ$，作 $\angle B$ 平分线交 AC 边于 E，求证：$AE+BE=BC$．

提要：(1)作$BD=BE$；

(2)作$EF=ED$

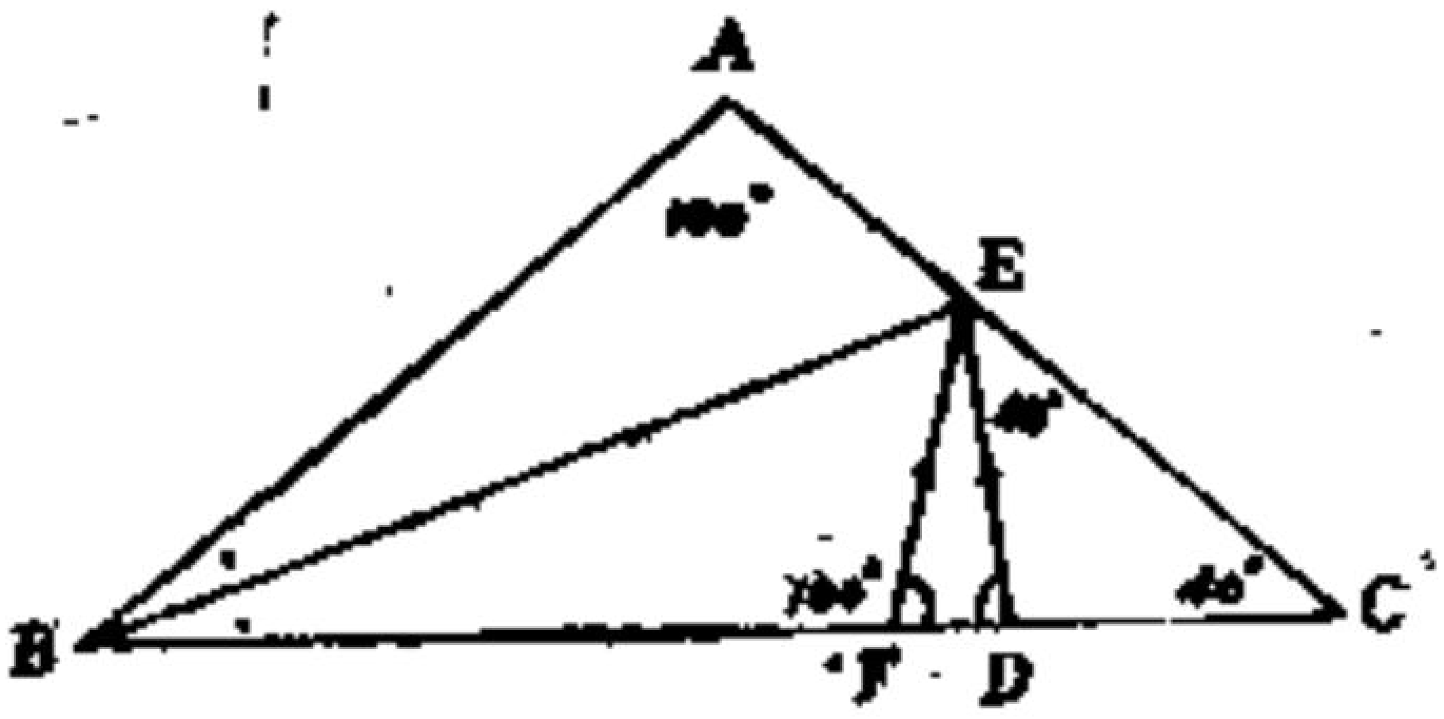


图11—7

8．P是$\angle XAY$的平分线上一定点，过A、P两点任作一圆，若这圆：(1)交$\angle XAY$的两边于B、C，则$AB+AC$为定长；(2)交$\angle XAY$的一边于B，而交他边的反向延长线于C，则$AB-AC$为定长．

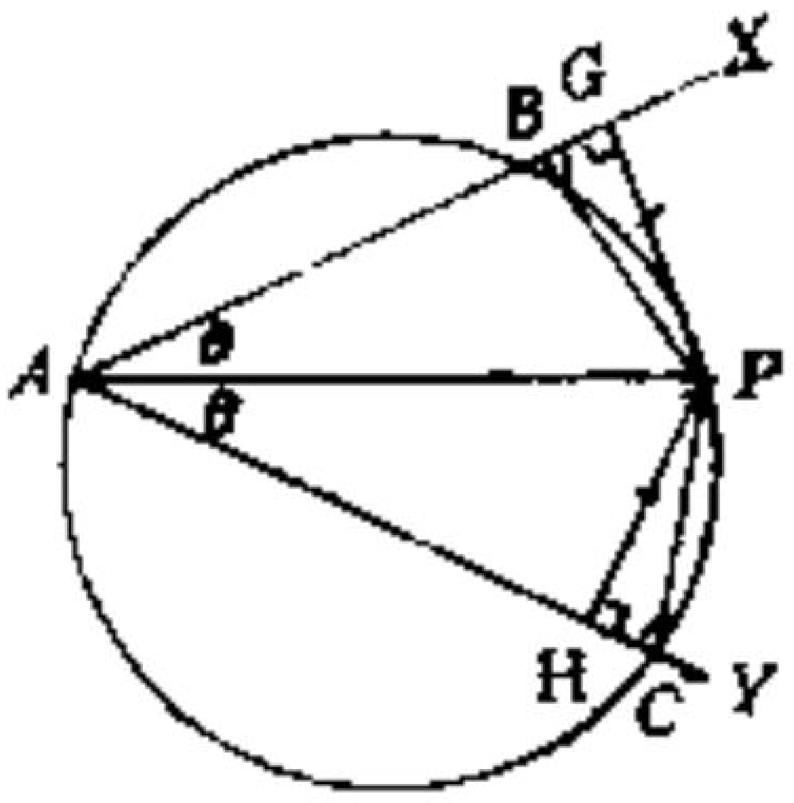


图11—8(1)

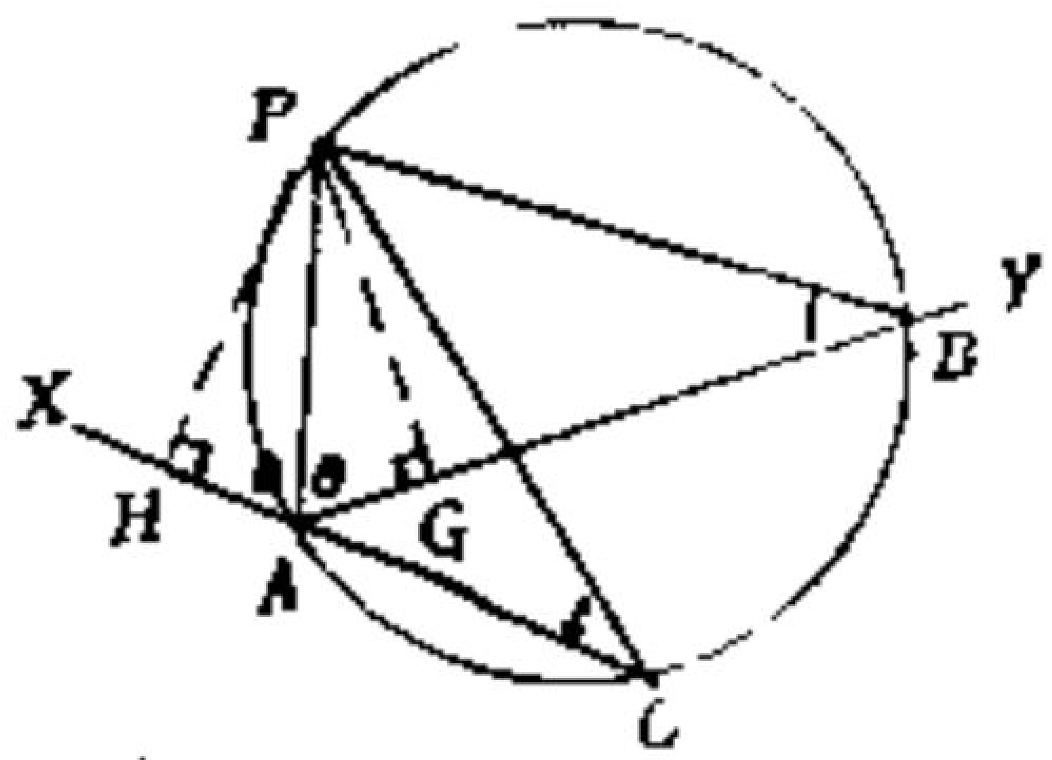


图11—8(2)

提要：(1)$\triangle PBG\cong\triangle PCH$；

(2)$AB+AC=2AG=2AP\cos\theta$，

$AB-AC=2AG=2AP\cos\theta$．

9．直角扇形内切圆半径，等于这扇形的弦与半径之差．

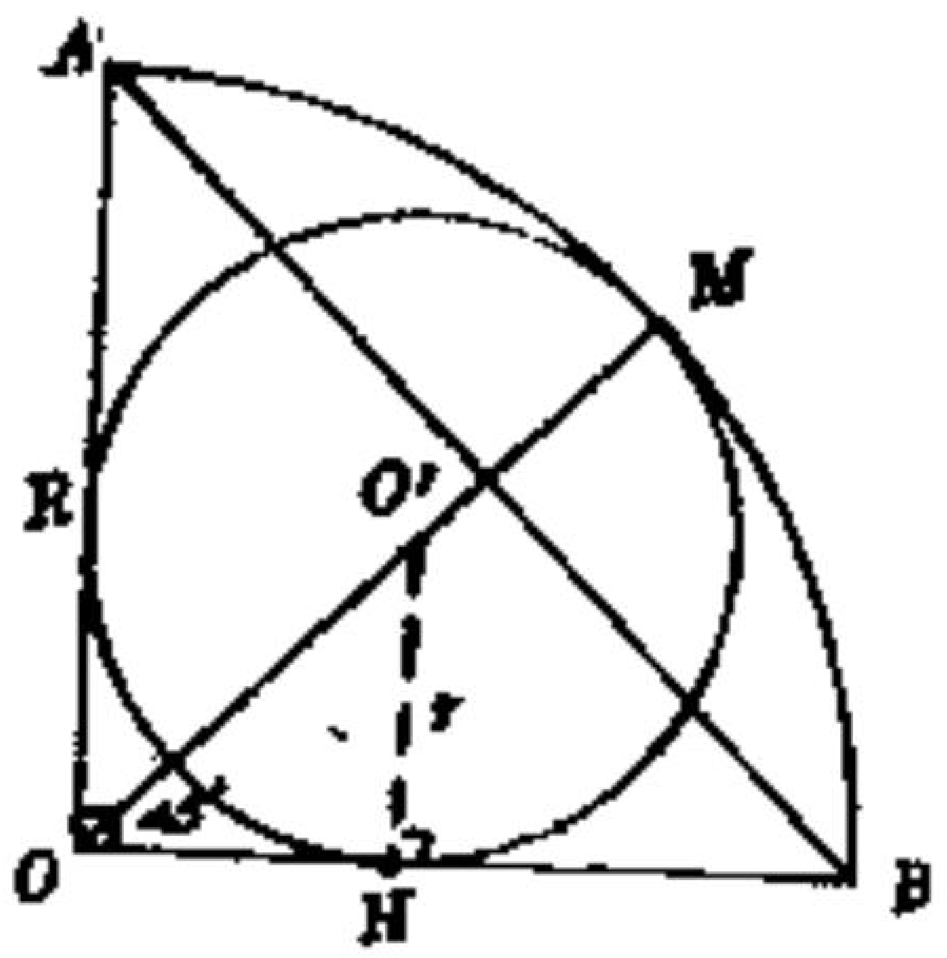


图11—9

提要：（1）$OO'=\sqrt{2}r$；

（2）$AB=\sqrt{2}R$；

（3）$OO'+O'M=R$.

10. H 是$\triangle ABC$的垂心，O是外心，若$\angle A=60°$或$120°$，则$AH=AO$.

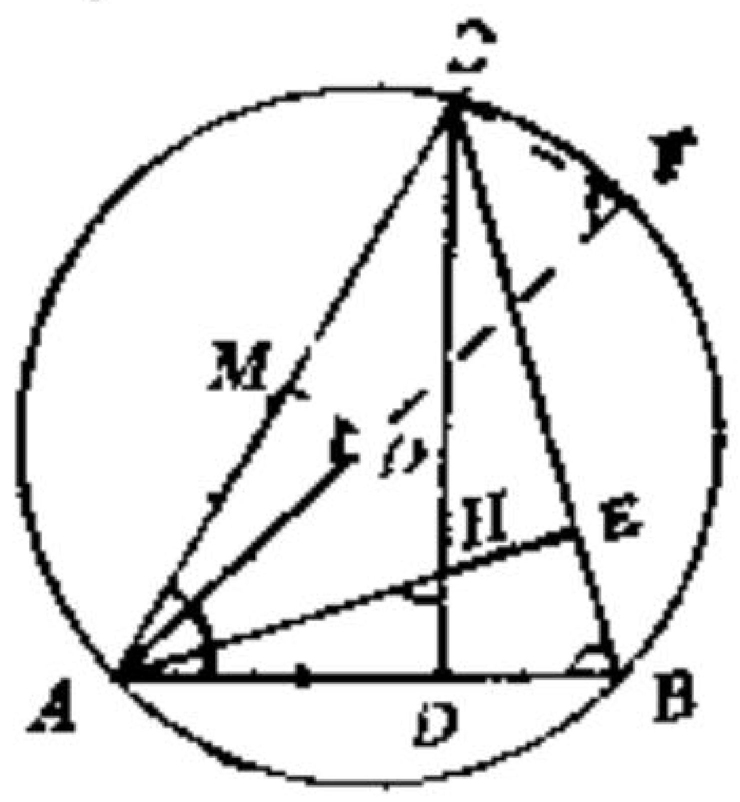


图11—10a

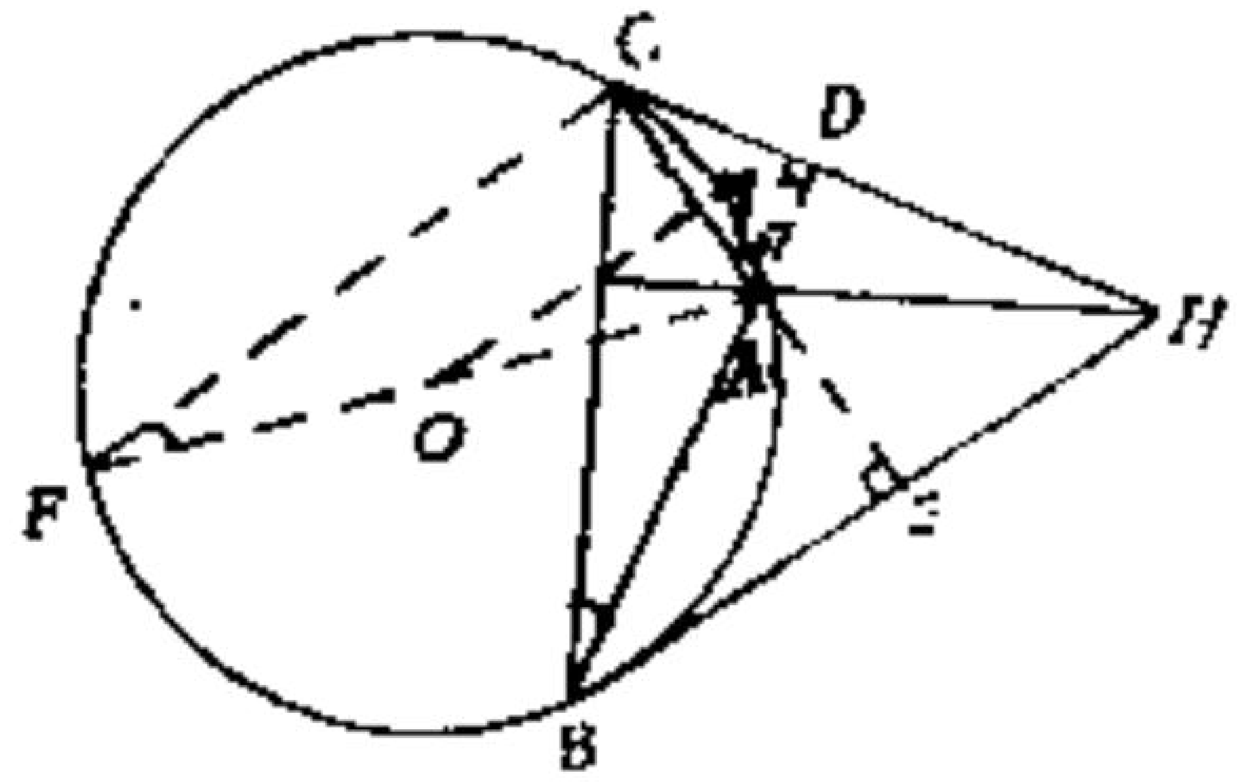


图11—10b

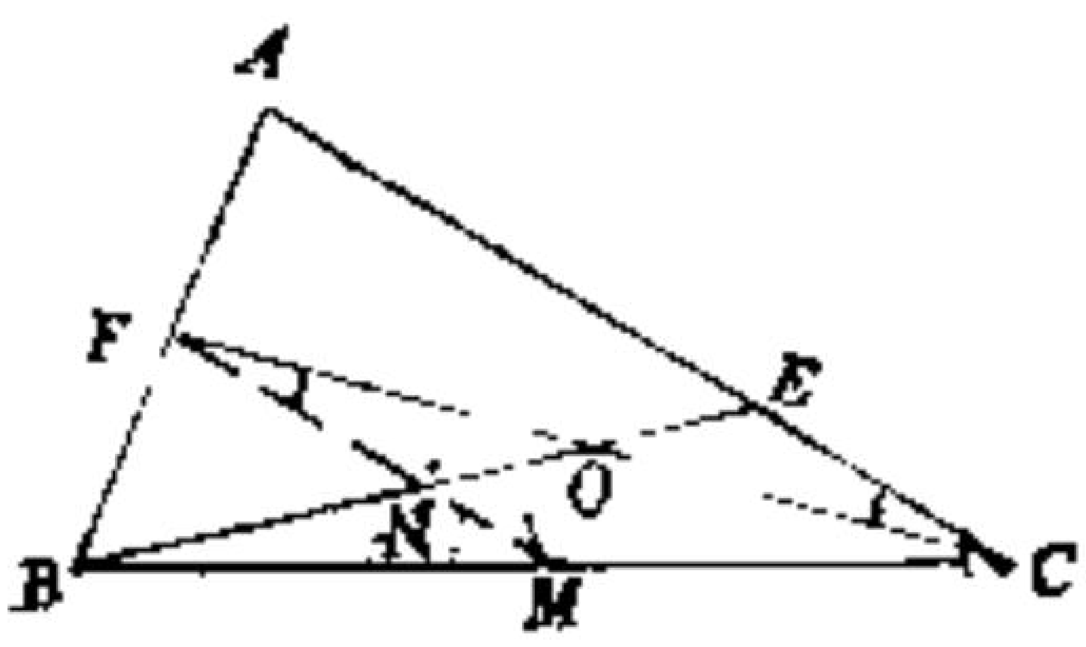
提要：当$\angle A=60°$时$\angle ACD=30°$，有$AD=AM$.
又H、E、B、D共圆，有$\triangle AHD\cong\triangle AOM$；

当$\angle A=120°$时$\angle CHB$为$60°$，亦有$AD=AM$，

及$\triangle AHD\cong\triangle AOM$.

11. 在$\triangle ABC$中，F是AB边的中点，E是AC边上的三分之二处的点（自A量起），连BE、CF交于O，求证：

$OE=\frac{1}{4}BE$，　$OF=\frac{1}{2}CF$.



提要：（1）取 M 为 BC 的中点则 $FM//AC$；

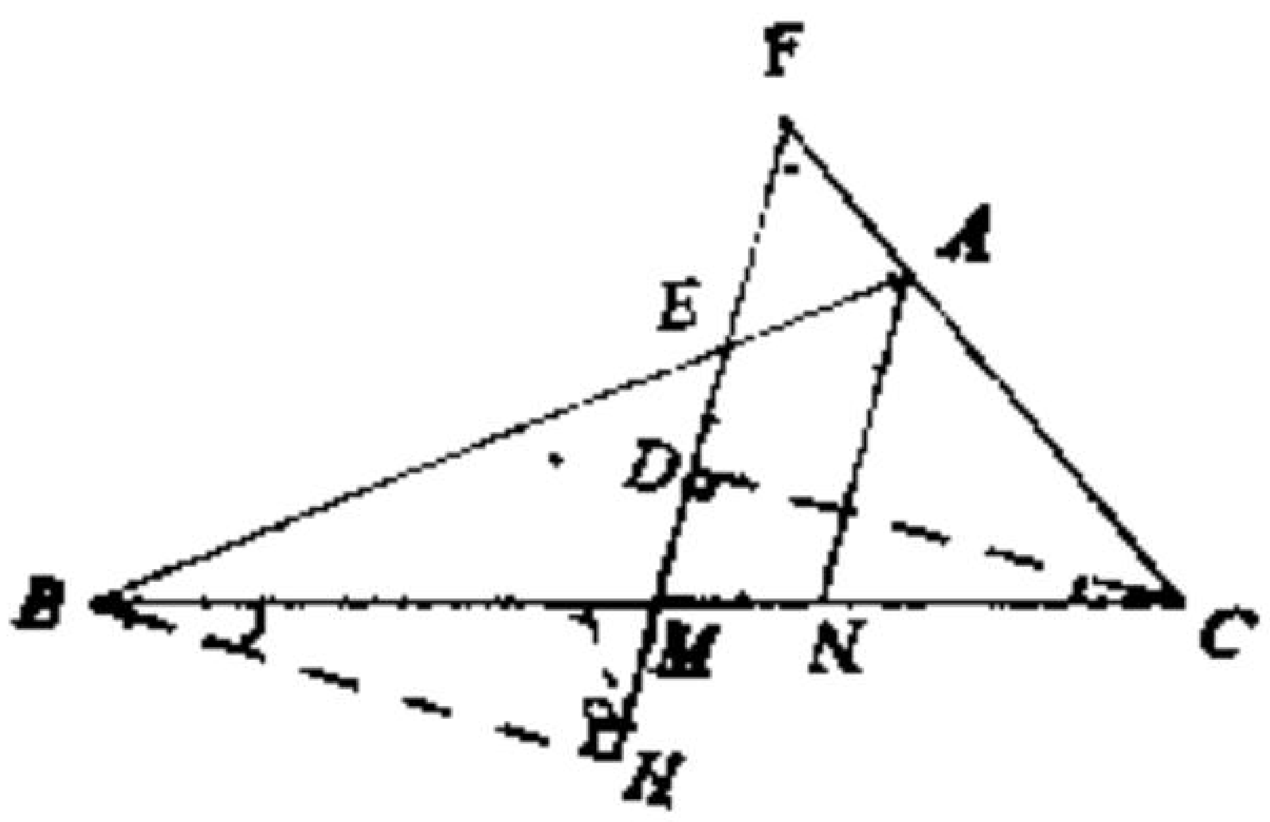
(2) $FN=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{3}AC=CE$；

（3）$\triangle OFN\cong\triangle OCE$.

图11—11

12．过$\triangle ABC$ 的 BC 边的中点，作直线平行于 A 角的平分线而交直线 AB、AC 于 E、F。求证：

$$BE=CF=\frac{1}{2}(AB+AC).$$



提要：(1) $\triangle MBH\cong\triangle MCD$

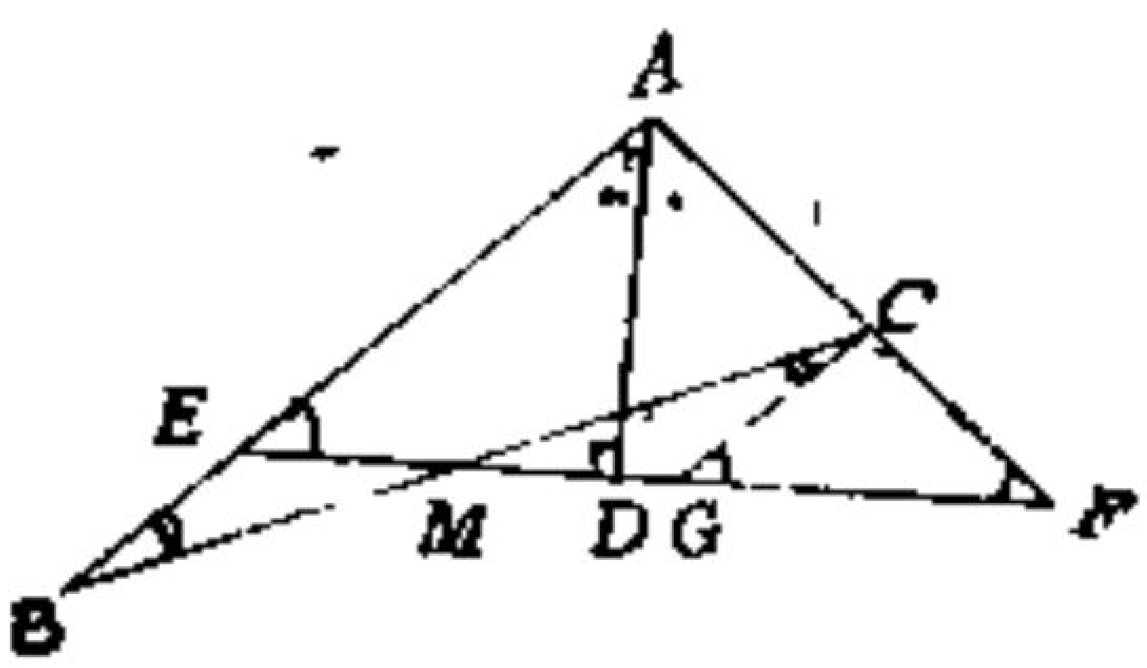
(2) $\triangle BEH\backsim\triangle CFD$

(3) $AE=AF$

图11—12

13．在上题中，若所作直线垂直于$\angle A$ 的平分线，则

$$BE=CF=\frac{1}{2}|AB-AC|.$$



提要：（1）作 $CG//AB$；

(2) $\triangle BEM\backsim\triangle CGM$；

（3）$CG=CF$.

图11—13

14．四点两两连成四个三角形．求证它们的内切圆中任两圆的公切线，等于他两圆的公切线，但这些公切线以落在各连线上面的为限．

提要：

(1) $AP+AF=AC-PC+AB-FB=AB+AC-(BG+GC)=AB+AC-BC$

即 $AP=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$

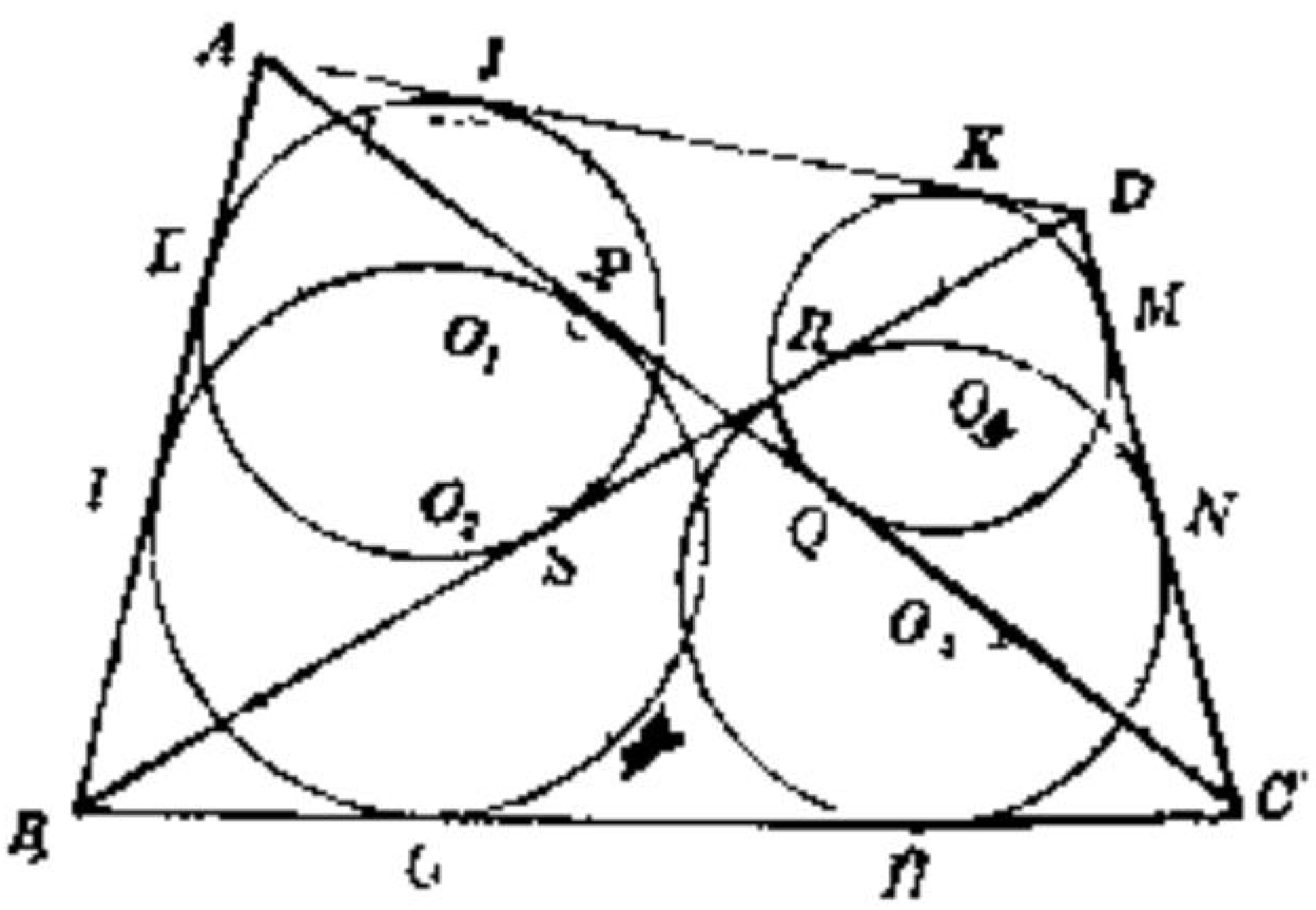


图11—14

同理可得：

$BS=\frac{1}{2}(BA+BD-AD)$

$CQ=\frac{1}{2}(CA+CD-AD)$，　$DR=\frac{1}{2}(DB+DC-BC)$.

(2) $PQ=AC-(AP+CQ)$

$$=AC-\left[\frac{1}{2}(AB+AC-BC)+\frac{1}{2}(CA+CD-AD)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(AD+BC)-(AB+CD)\right]$$

$RS=BD-(BS+DR)$

$$=BD-\left[\frac{1}{2}(BA+BD-AD)+\frac{1}{2}(DB+DC-BC)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(AD+BC)-(AB+CD)\right]$$

$\therefore\quad PQ=RS$

(3) 同理有 $EF=MN$，$JK=GH$.

15. 直角三角形的直角顶在两锐角平分线上的射影之距离，等于内切圆的半径.

提要：（1）H、D、G在以 AO 为直径的圆上；

（2）$\angle DAG=\angle GOC$

$=\angle OBC+\angle OCB$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$

$=45^\circ=\angle OAH$；

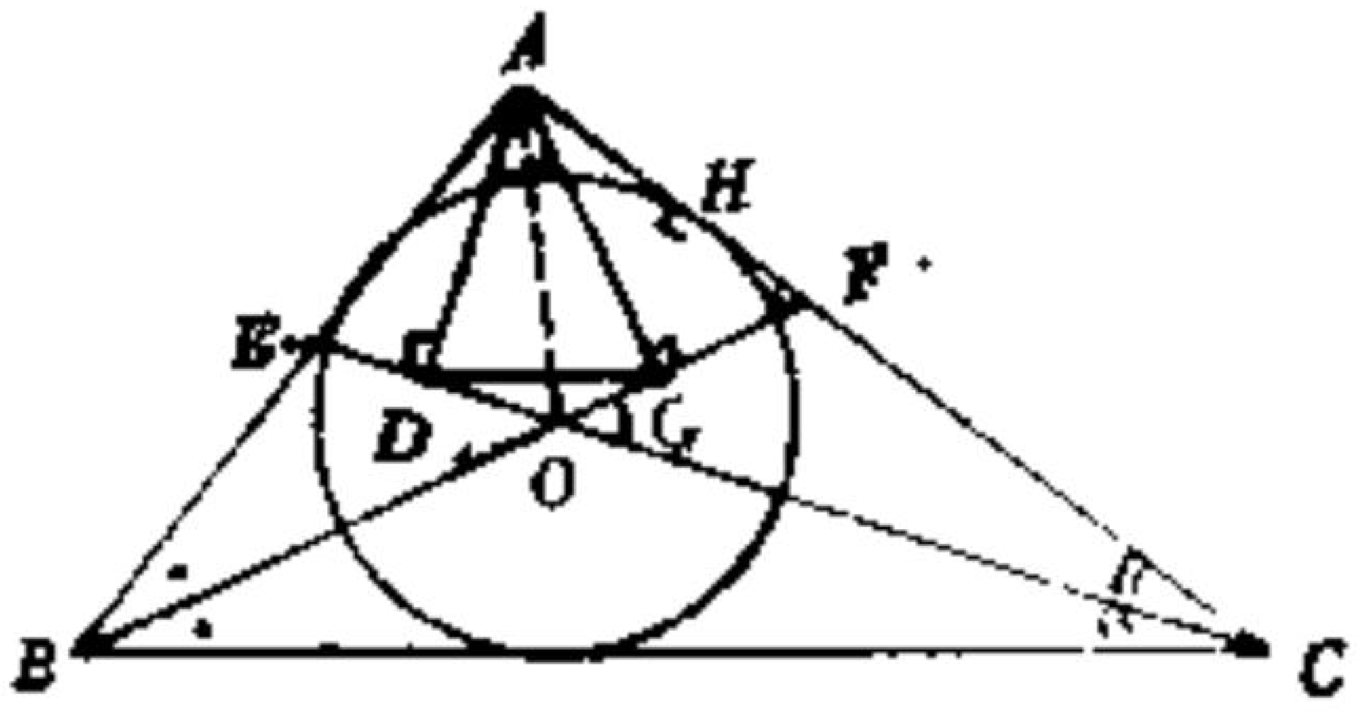


图 11—15

（3）在同圆中，等角对等弦，故 $DG=OH$.

16．直角三角形的弦高，分原形为两三角形，求证所得两三角形与原三角形的内切圆半径和等于该高的长．

提要：

$\gamma=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)$

$r_1=\frac{1}{2}(AD+CD-AC)$

$r_2=\frac{1}{2}(BD+CD-BC)$

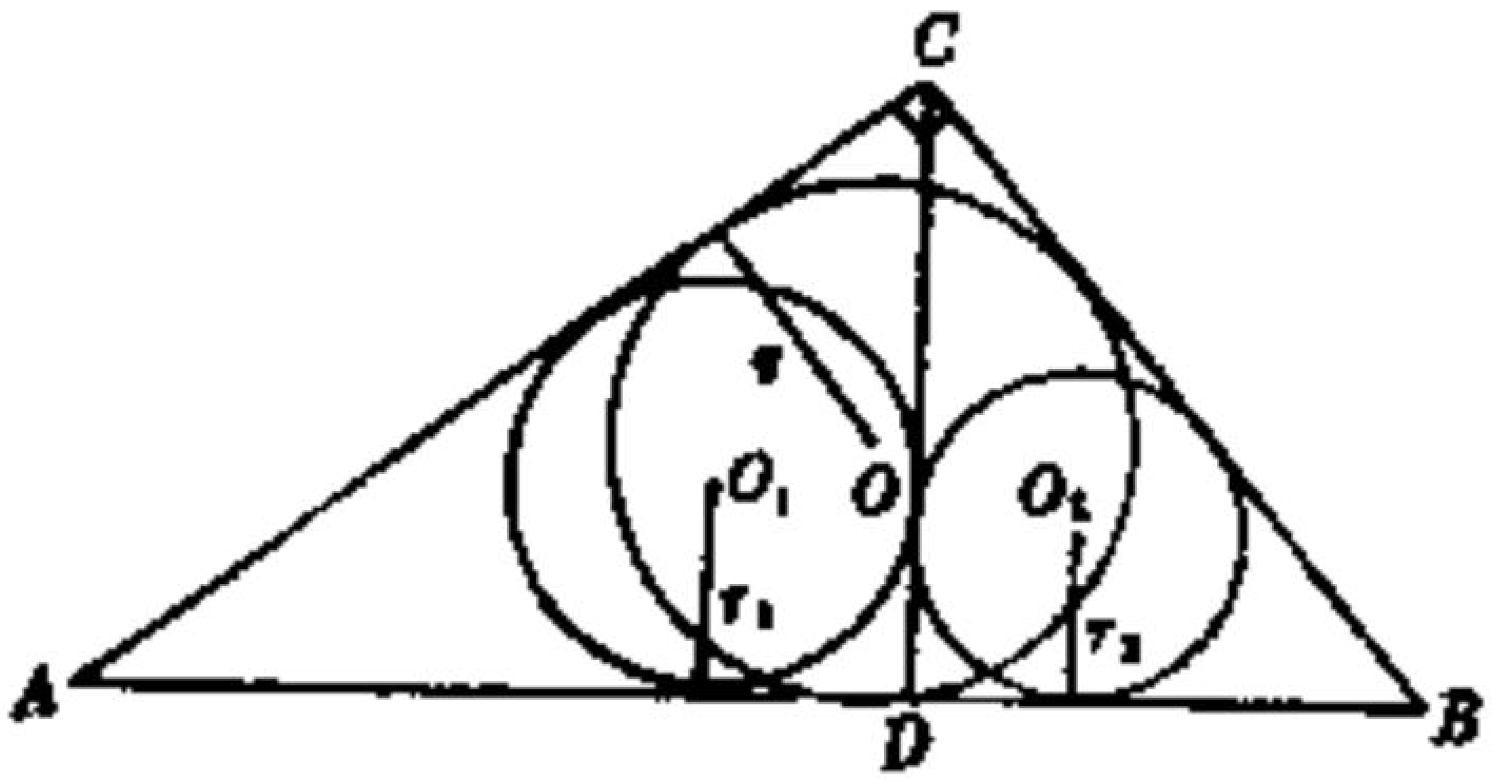


图 11—16

17．在$\triangle ABC$ 中，作$\odot APB$ 使切于BC，又作$\odot APC$使切于 AB，求证：$\angle BPC=\angle A+\angle B$.

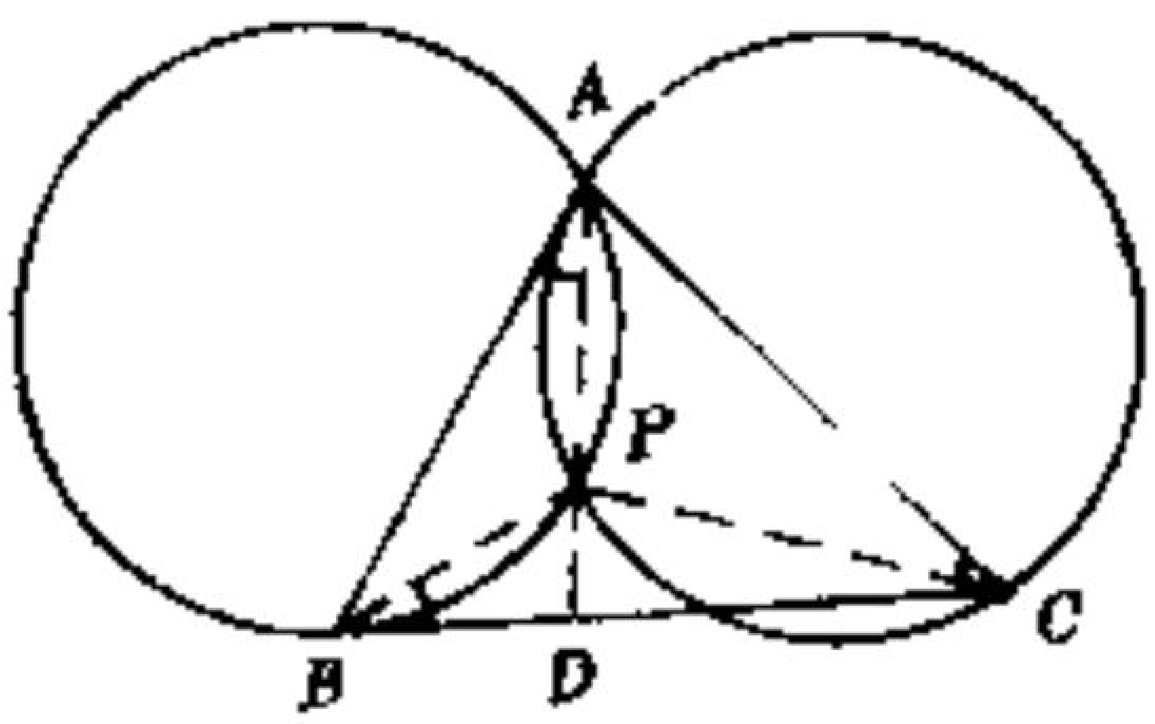


图 11—17

提要：（1）$\angle PBC=\angle PCA$；

（2）$\angle BPC=180^\circ-\angle C$

18．三角形顶角的平分线与底边的高所夹的角，等于两底角的半差．

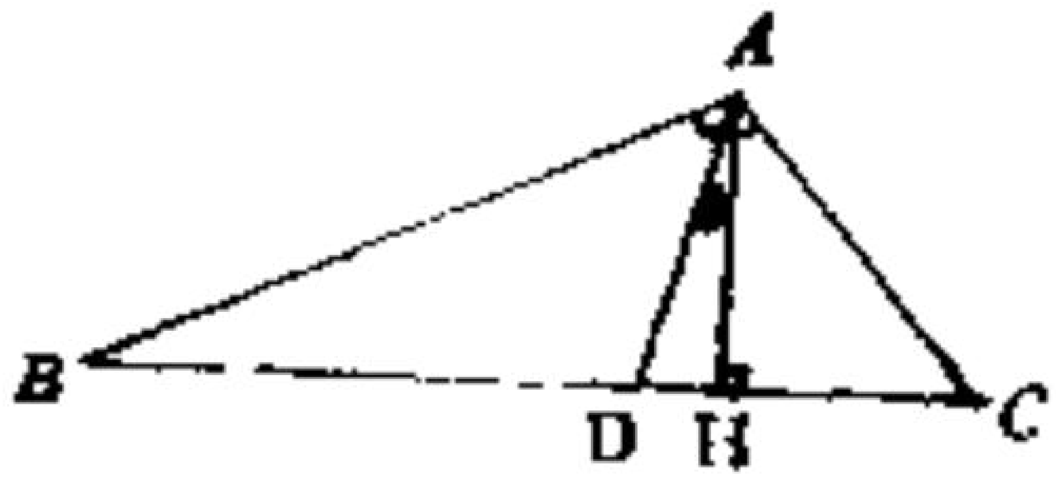


图11—18

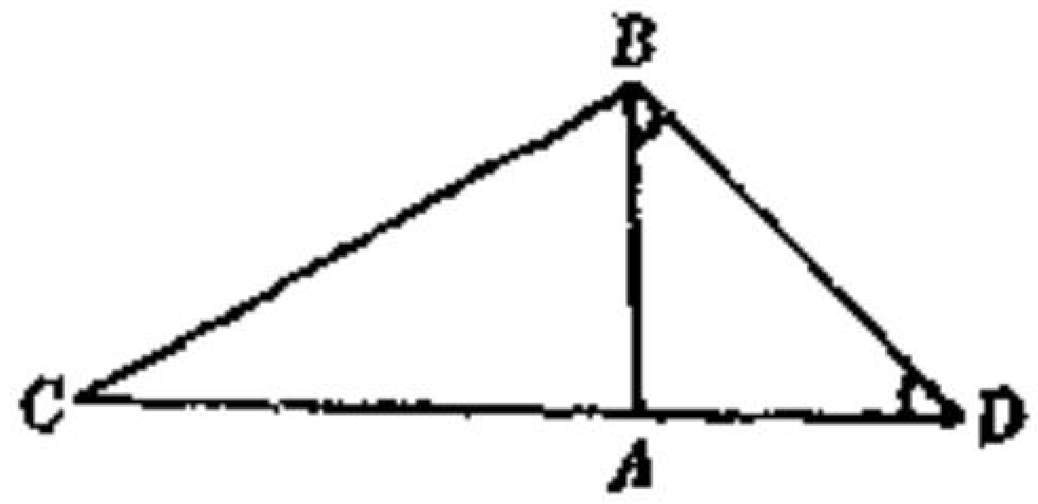


图11—19

提要：$2\angle\theta=(\angle BAH-\angle BAD)+(\angle CAD-\angle CAH)$
$=(90^\circ-\angle B)-(90^\circ-\angle C)=\angle C-\angle B.$

19．在$\triangle ABC$的CA延长线上，截$AD=AB$，则$\angle CBD=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle ABC-\angle ACB)$．

提要：$2\angle CBD=(\angle ABC+\angle ABD)+[180^\circ-(\angle C+\angle D)]$
$=180^\circ+\angle ABC-\angle C.$

20．简单四边形一双对角的平分线所交成的角，有一等于他双对角（内角）的半差．

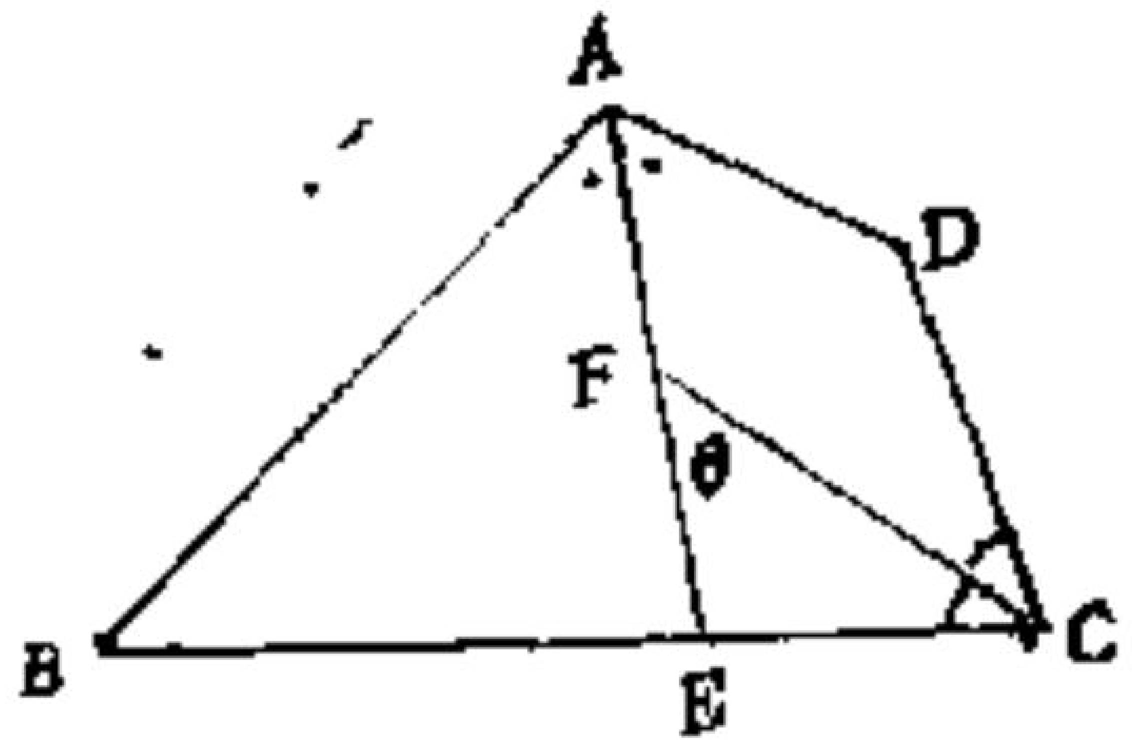


图11—20

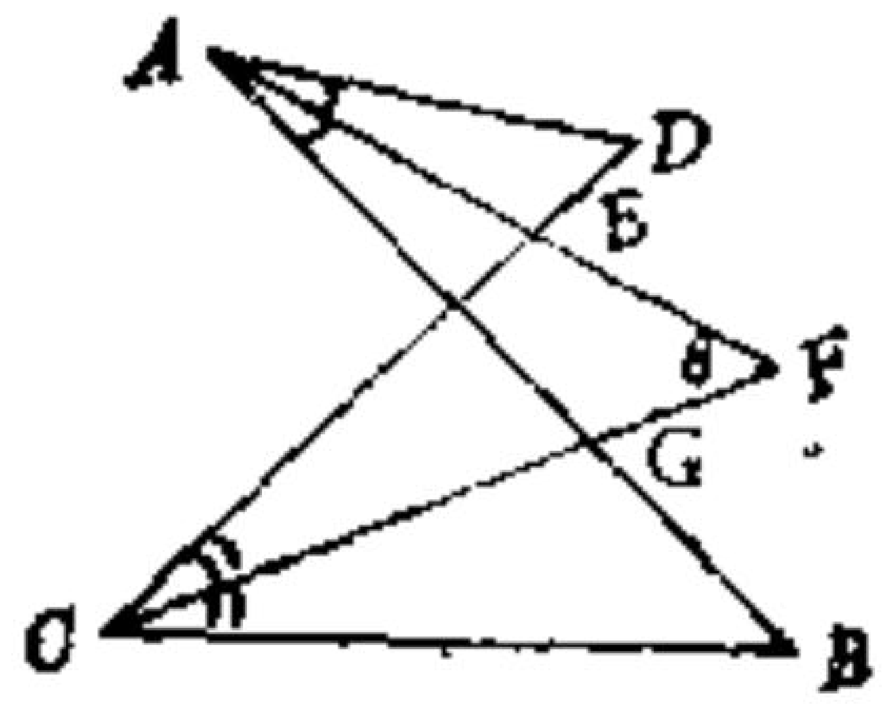


图11—21

提要：$2\angle\theta=(\angle AEB-\angle ECF)+(180^\circ-\angle AFC)$
$=[180^\circ-(\angle B+\angle EAB)]-\angle ECF+180^\circ$
$-[360^\circ-(\angle FAD+\angle D+\angle DCF)]$
$=\angle D-\angle B$

21．折四边形一双对角的平分线所交成的角，有一等于他双对角的半和．

提要：（1）$\angle\theta+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}\angle A+\angle D$;

（2）$\angle\theta+\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle C+\angle B$

22．AB 是⊙O 的直径，弦 CD 交半径 OA 于 P，若 $PC=PO$，则 $\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{3}\overset{\frown}{BD}$.

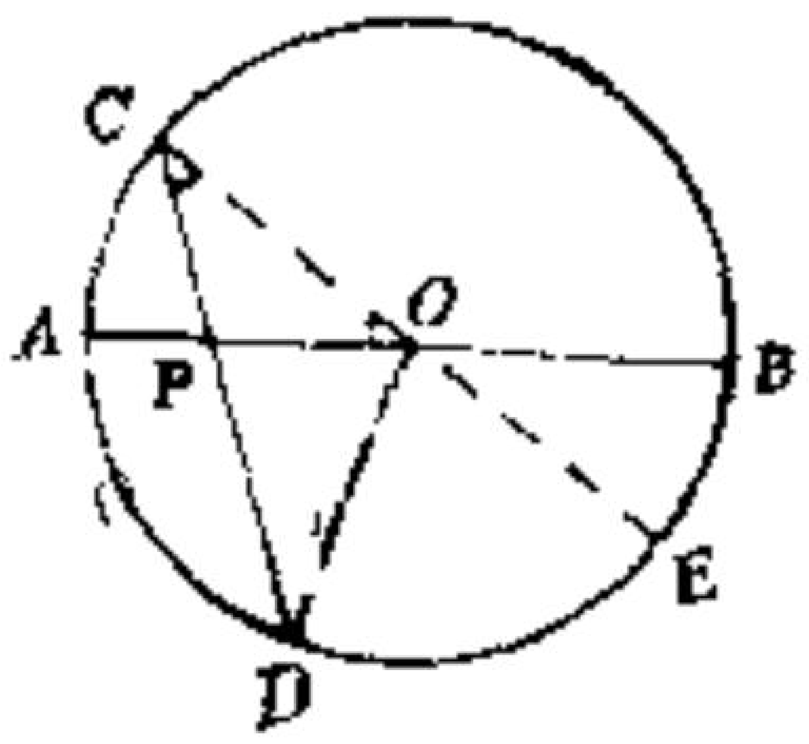


图11—22

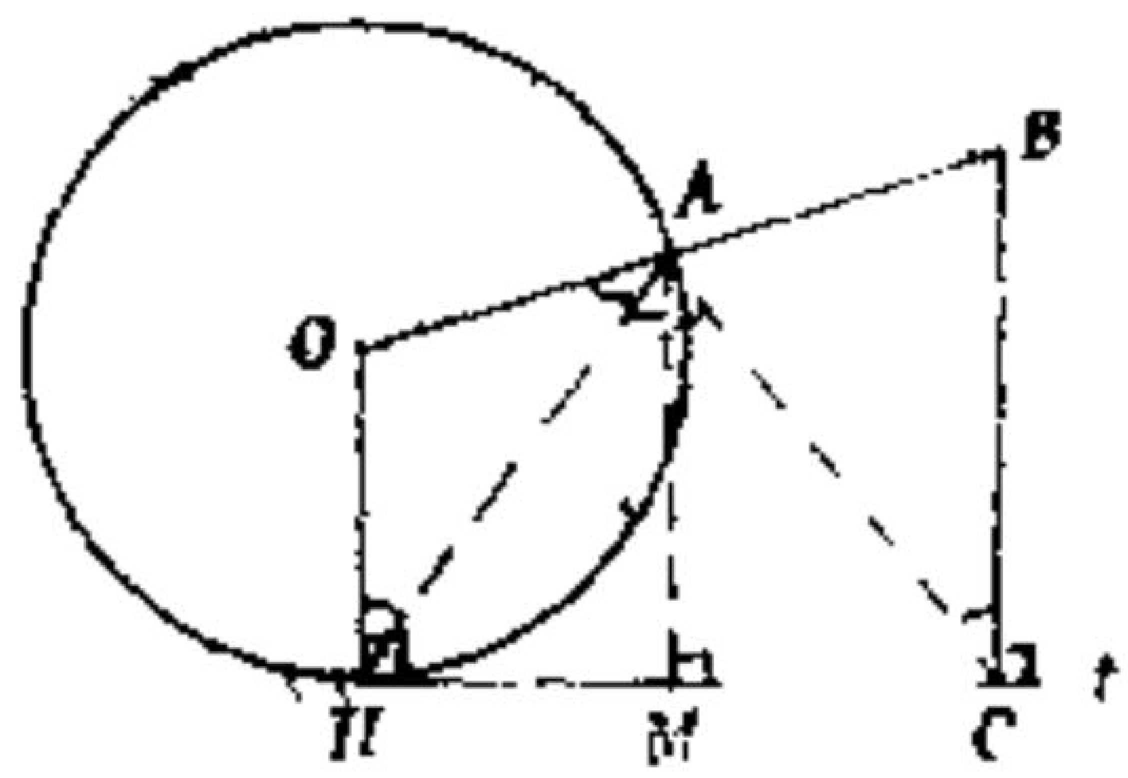


图11—23

提要：$\angle DOE=2\angle C=2\angle POC$

23．延长⊙O 的半径 OA 至 B，使 $AB=OA$，t 是不穿过 A 与 B 之间的一条切线，C 是 B 在 t 上的射影．求证：

$\angle ACB=\frac{1}{3}\angle CAO$.

提要：（1）作 $AM\perp t$，有 $MH=MC$，故 $\angle HAM=\angle CAM$;

（2）$\angle HAM=\angle AHO=\angle HAO$.

24．两圆切于 P 点，一直线交其中一圆于 A、B，交他圆于 A'、B'，若两圆

（1）外切，则 $\angle APA'+\angle BPB'=180°$.

（2）内切，则 $\angle APA'=\angle BPB'$.

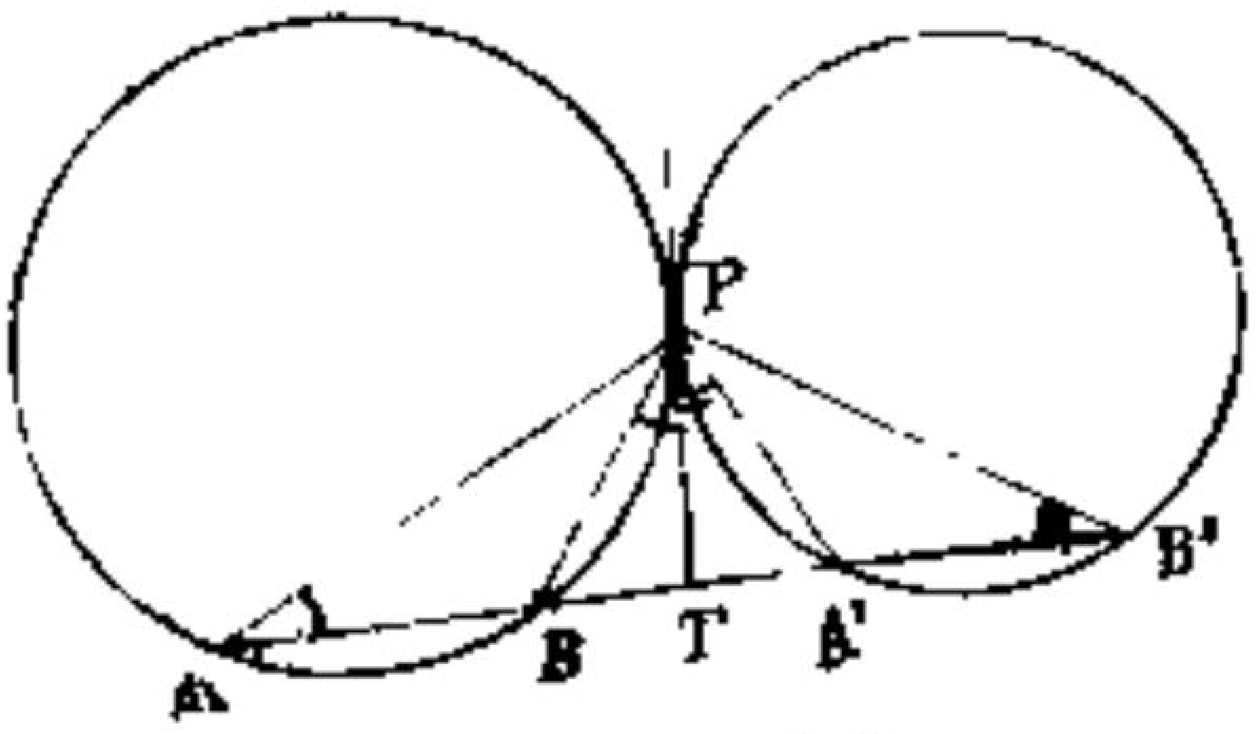


图11—24(1)

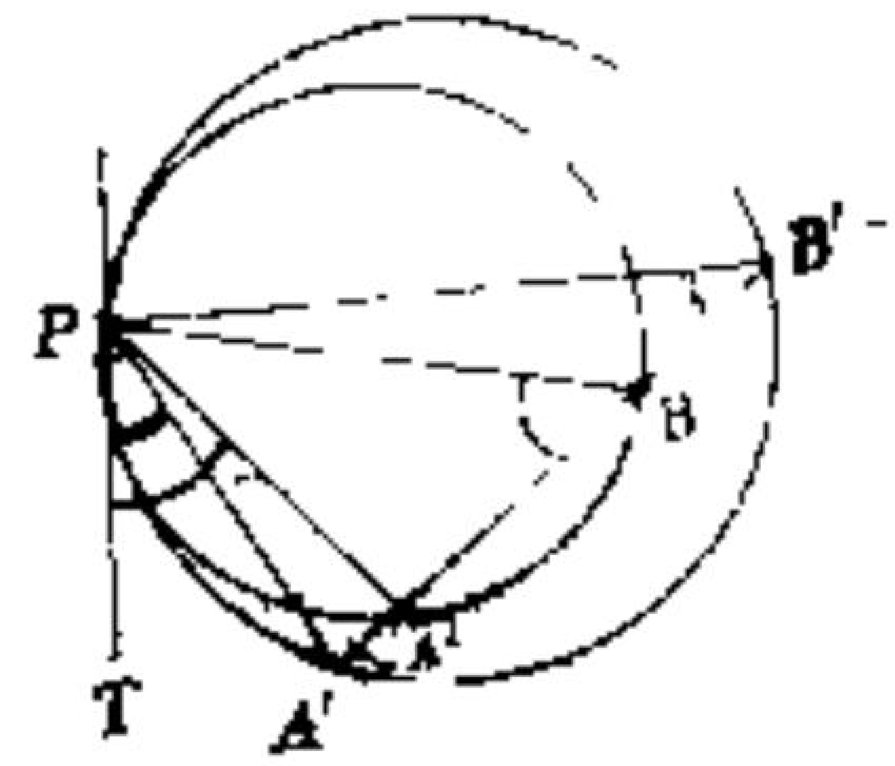


图11—24(2)

25．两圆交于 P、Q 两点．一外公切线切它们于 A、B．求证：$\angle APB+\angle AQB=180^{\circ}$．

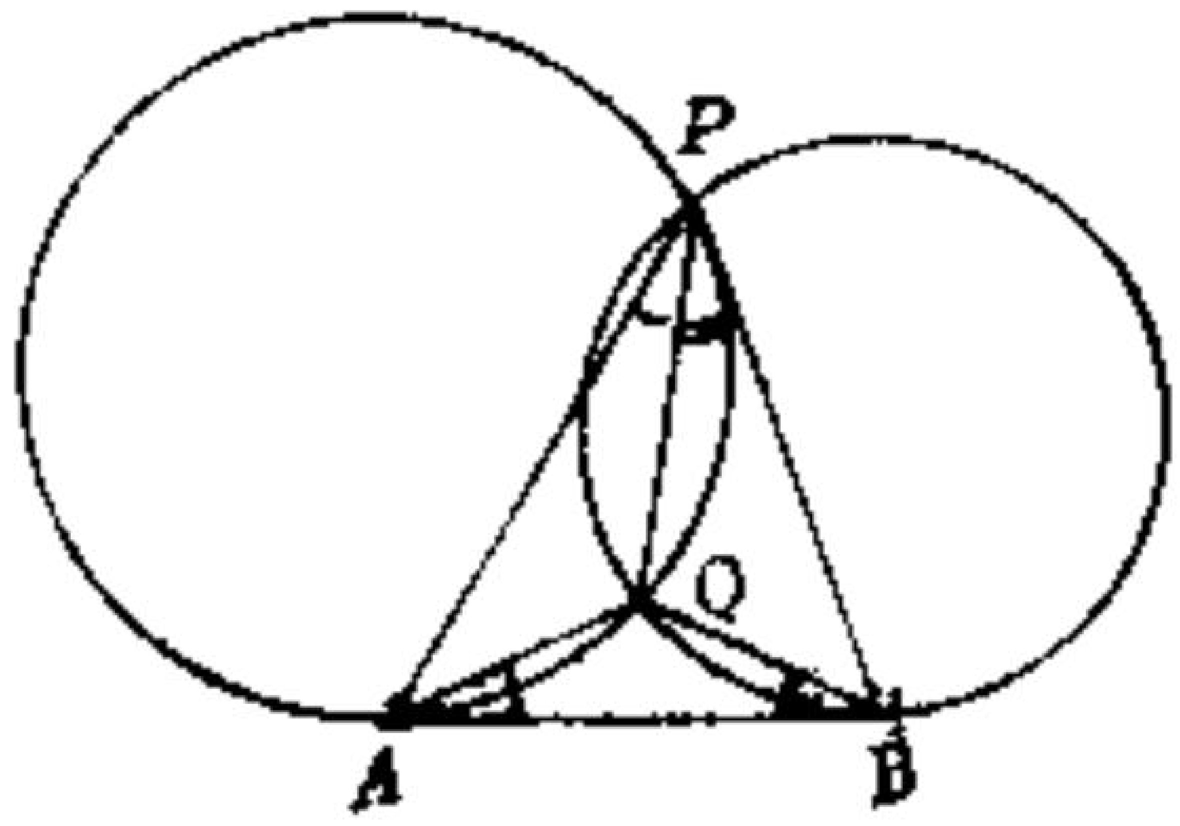


图11—25

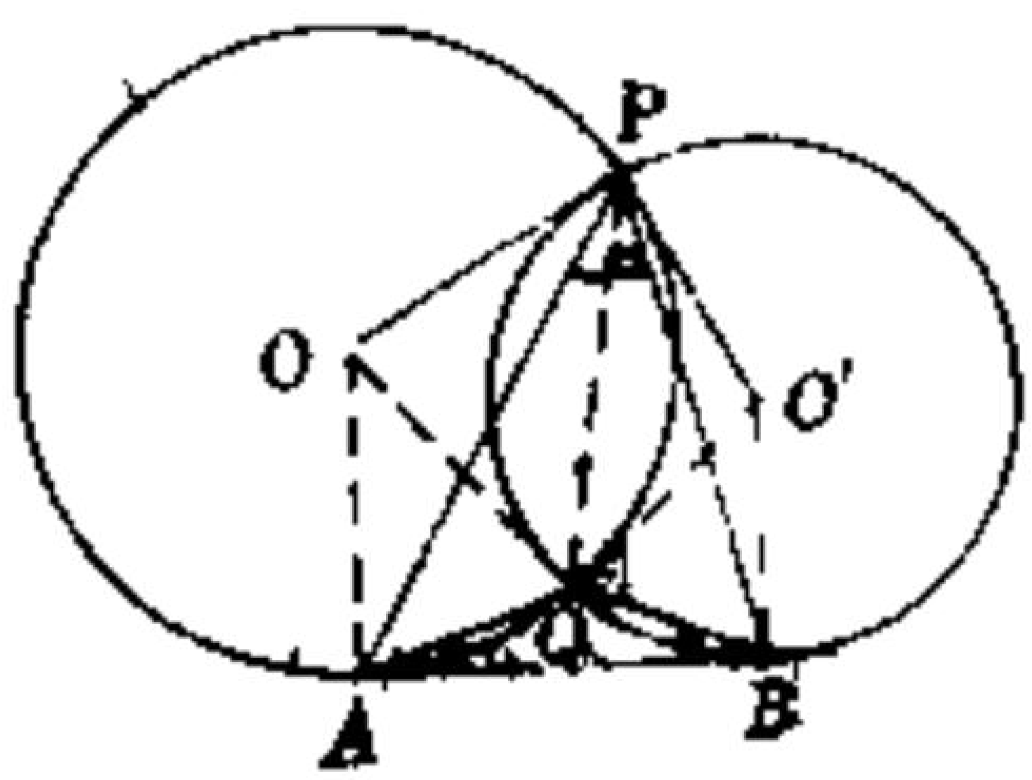


图11—26

26．$\odot O$ 与 $\odot O'$ 交于 P、Q 两点，一外公切线切它们于 A、B．求证：$\angle APB$ 与 $\angle AQB$ 两角中，其小者等于 $\frac{1}{2}\angle OPO'$，大者等于 $180^{\circ}-\frac{1}{2}\angle OPO'$．

提要：$\angle OAP=90^{\circ}-\angle PAB$，$\angle O'BP=90^{\circ}-\angle PBA$

27．在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3BC$，设 E、F 是 CD 边的三等分点，$CE=EF=FD$，求证：

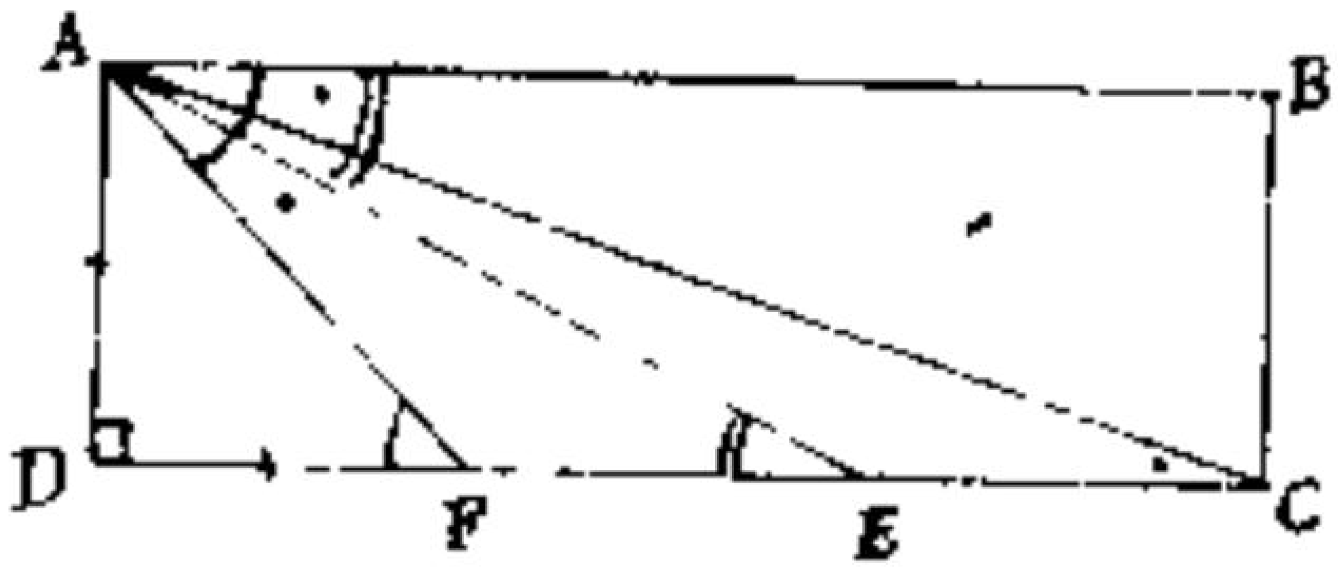


图 11—27

$\angle BAC + \angle BAE + \angle BAF$
$= 90°$

提要：由 $\frac{AF}{EF} = \frac{CF}{AF} = \sqrt{2}$

得 $\triangle AFE \backsim \triangle CFA$.

28．三角形的底边为 a，高为 h．今有一正方形，它的一边落在三角形底边所在的直线上，他两顶点分别落在三角形的两腰上．求证：这个正方形的边长等于 $\frac{ah}{a+h}$.

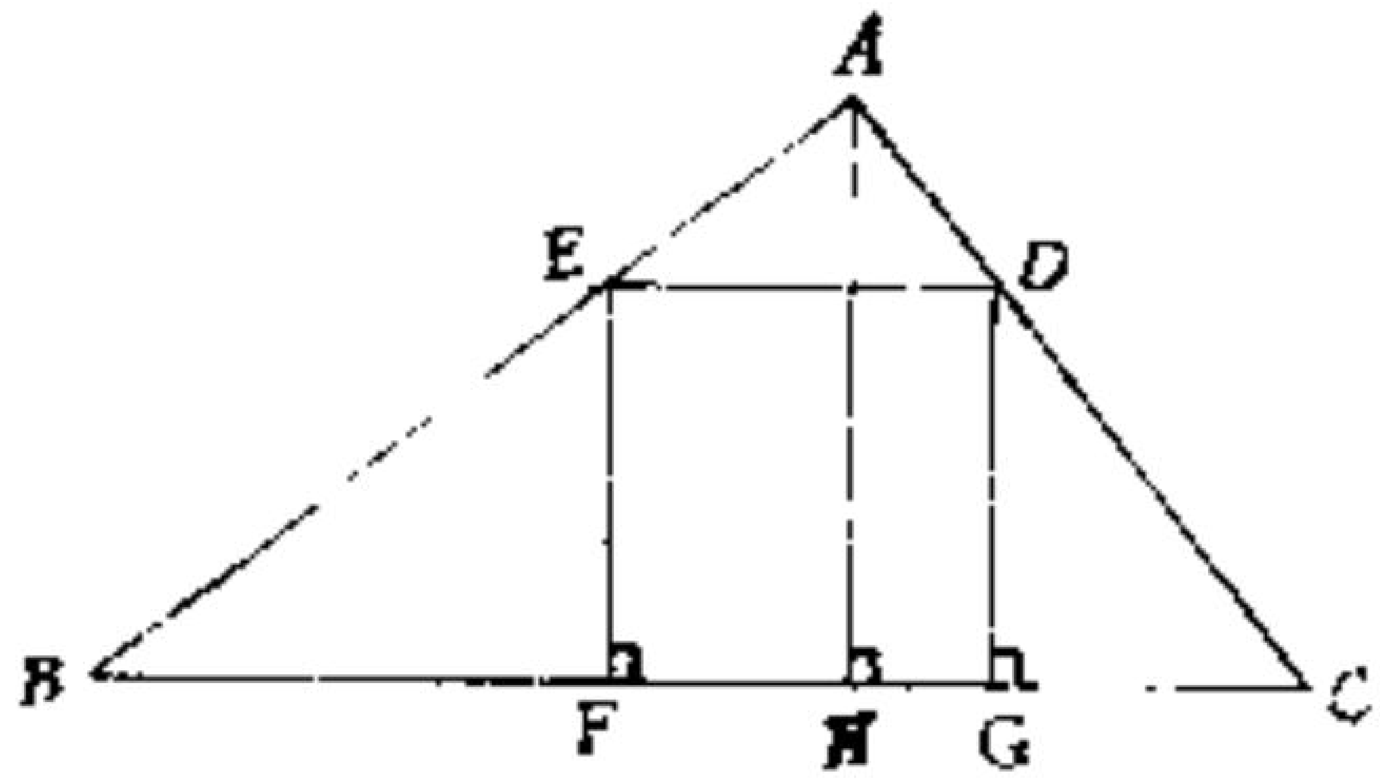


图 11—28

提要：令正方形边长为 x，

则由 $\triangle AED \backsim \triangle ABC$，

得 $\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$.

29．正三角形外接圆上任一点至三顶点的距离之平方和，等于此正三角形边长平方的二倍．

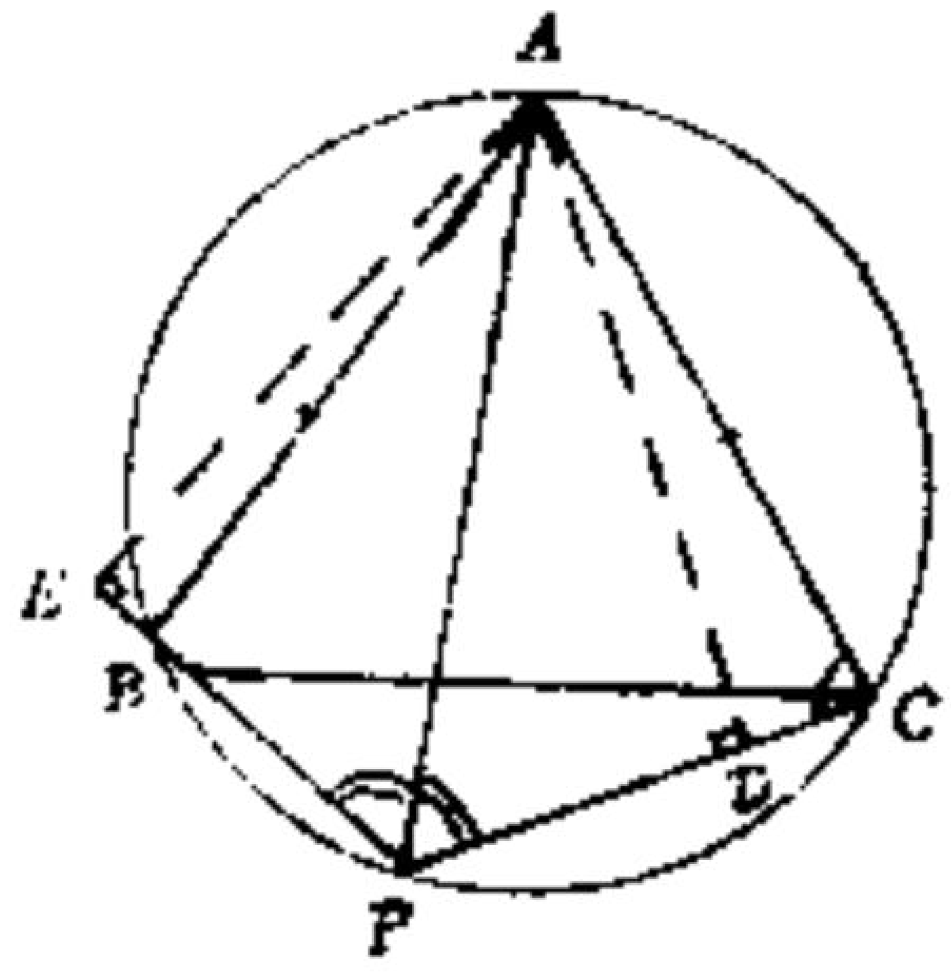


图 11—29

提要：（1）$\triangle AEB \cong \triangle ADC$；

$\triangle AEP \cong \triangle ADP$，

（2）由 $PA = PB + PC$，

得 $PA^2 + PB^2 + PC^2$

$= 2(PA^2 - PB \cdot PC)$；

（3）$AB^2 = AE^2 + BE^2$

$= PA^2 - PE^2 + BE^2$

$= PA^2 - (PE + BE)(PE - BE)$

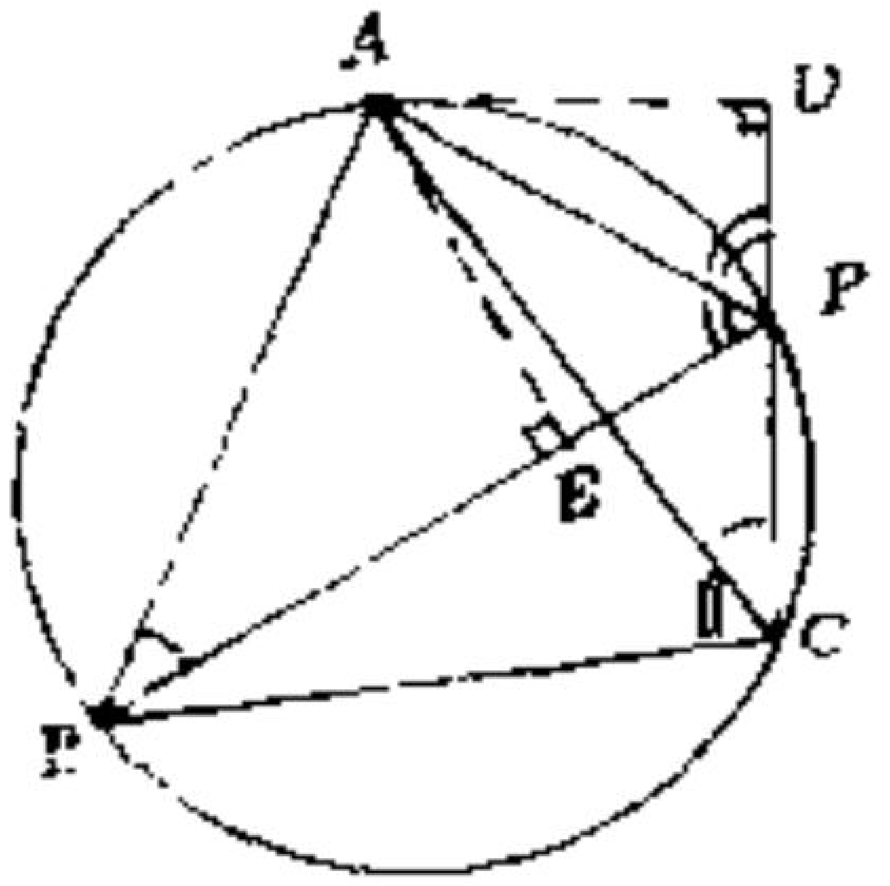
$= PA^2 - (PD + DC)PB$

$= PA^2 - PB \cdot PC$.

30. 设 P 是正三角形 $\triangle ABC$ 外接圆上的一点，当

（1）P 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上时，则 $AB^2 = PA^2 - PB \cdot PC$

（2）P 在 $\overset{\frown}{BAC}$ 上时，则 $AB^2 = PA^2 + PB \cdot PC$



提要：$\triangle AEB \cong \triangle ADC$，

$\triangle AEP \cong \triangle ADP$

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 = PA^2 - PE^2 + BE^2$$
$$= PA^2 + (BE + PE)(BE - PE)$$
$$= PA^2 + PB \cdot (DC - DP)$$
$$= PA^2 + PB \cdot PC$$

图 11—30(2)

31. 圆上任一点至内接正 n 边形各顶点的距离之平方和，等于半径平方的 $2n$ 倍.

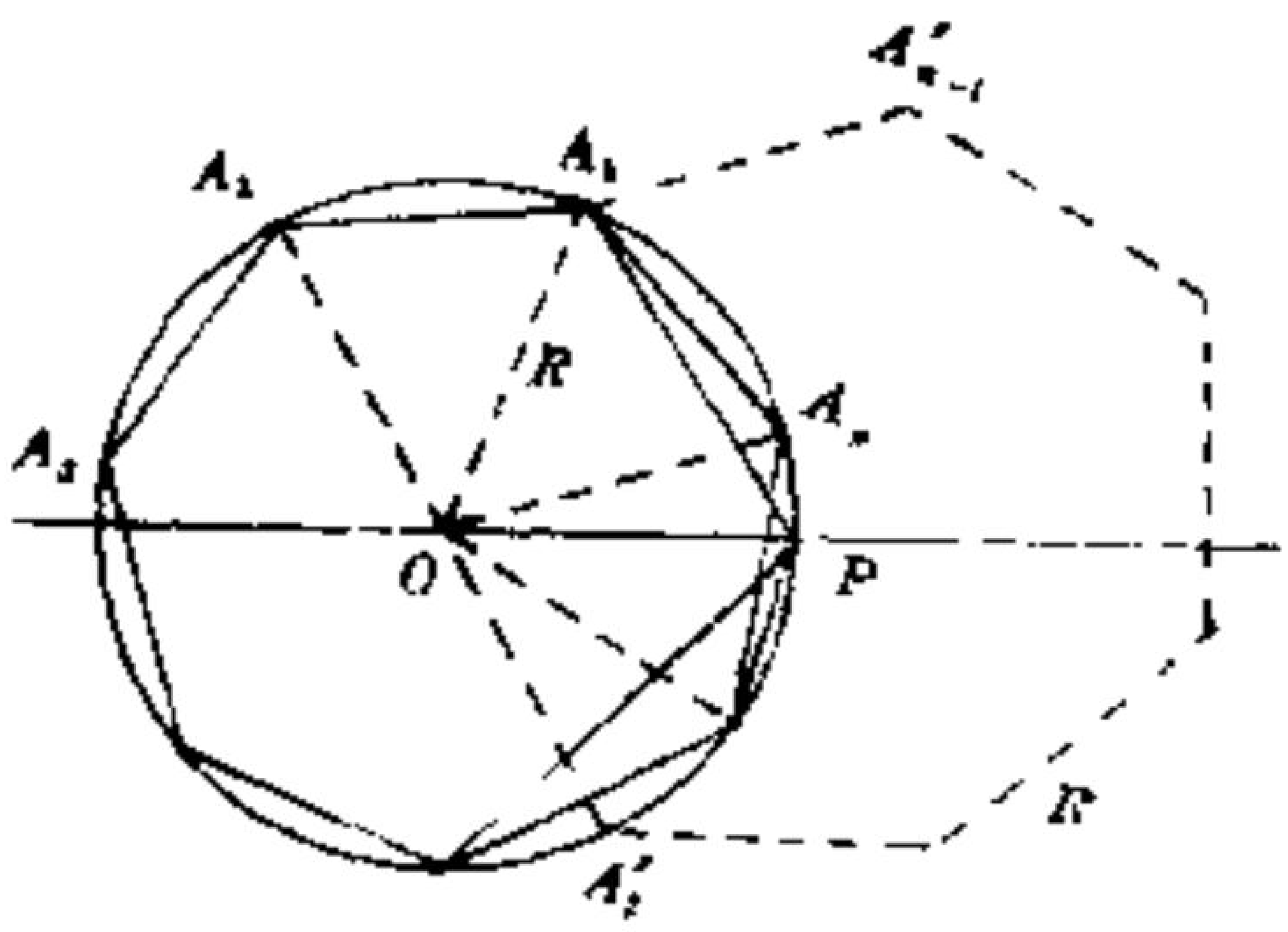


图 11—31

提要：（1）由广勾股定理：

$PA_i^2 = OA_i^2 + OP^2 - 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{Oh_i}$

这里 $\overline{Oh_i}$ 是 OA_i 在 $\overline{OP}$ 上的射影．i 由 $1 \to n$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} PA_i^2 = 2nR^2 - 2R\sum_{i=1}^{n} \overline{Oh_i}$$

（2）以 R 为边长作如图的正 n 边形 $A_1OA_2'A_3' \cdots A'_{n-1}$

则该正n边形在OP上的射影即$\sum_{i=1}^{n}\overline{OA_i}$. 由于该正$n$边形是封闭折线，故其在$OP$上的射影为零.

32. 正n边形所有边与所有对角线的平方和，等于外接圆半径平方和的n^2倍。

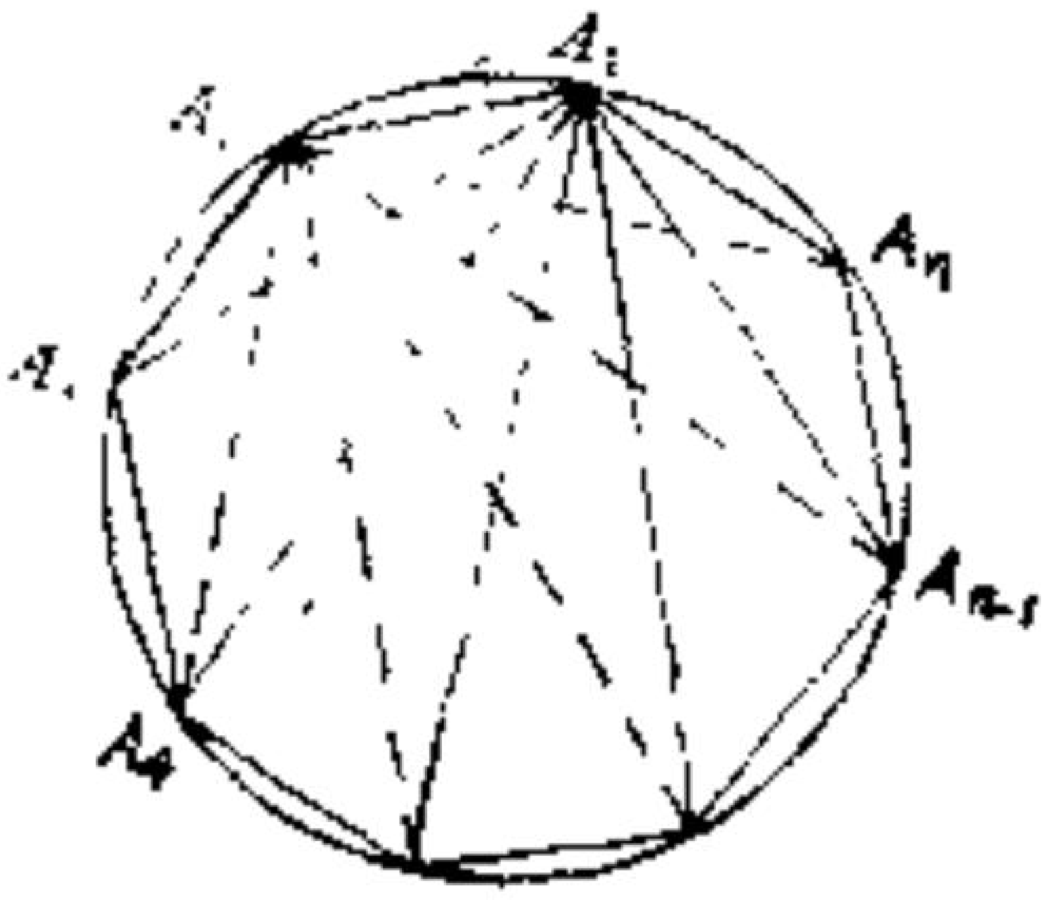


图11—32

提要：由上题知，当P取在A_1时，有$\sum_{i=1}^{n}A_1A_i=2nR^2$

当P取遍A_i时，有n个$2nR^2$. 由于在上述取遍的过程中所有边与所有对角线均出现两次，故$n\cdot 2nR^2$应除以2.

第三节　不等　习题十二

1. 设三角形有两个角的平分线相等，则这两角的对边必相等。

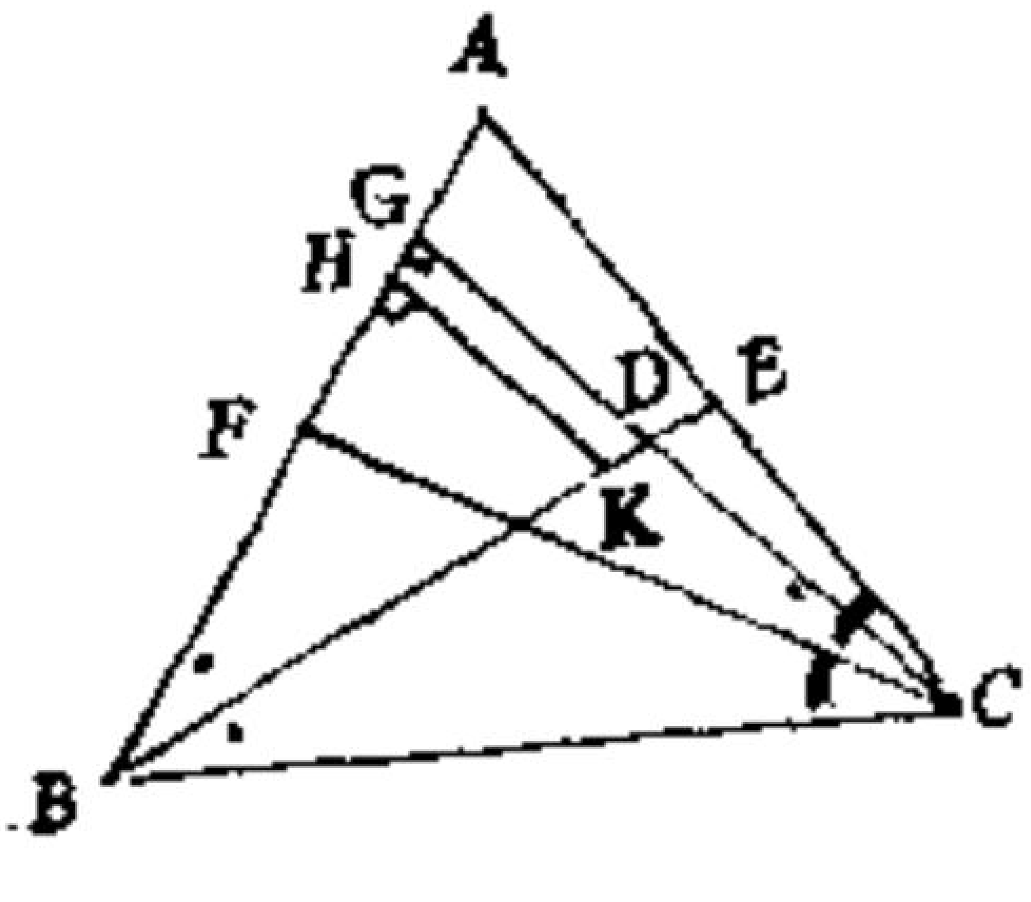


图12—1

证：用反证法。若$AB>AC$，则$\angle ACF>\angle ABE$

作$\angle FCG=\angle ABE$，有$BG>CG$.

截$BH=CG$并作$HK\parallel GC$，

则$\triangle BHK\cong\triangle CGF$. $\therefore BK=CF$,

这与$BE=CF$矛盾；故$AB>AC$不成立.

同理可得$AB<AC$也不成立。

2. 梯形 $ABCD$ 中，AB 为大底。若 $AD>BC$，则 $\angle A<\angle B$.

提要：作 $DE\parallel CB$

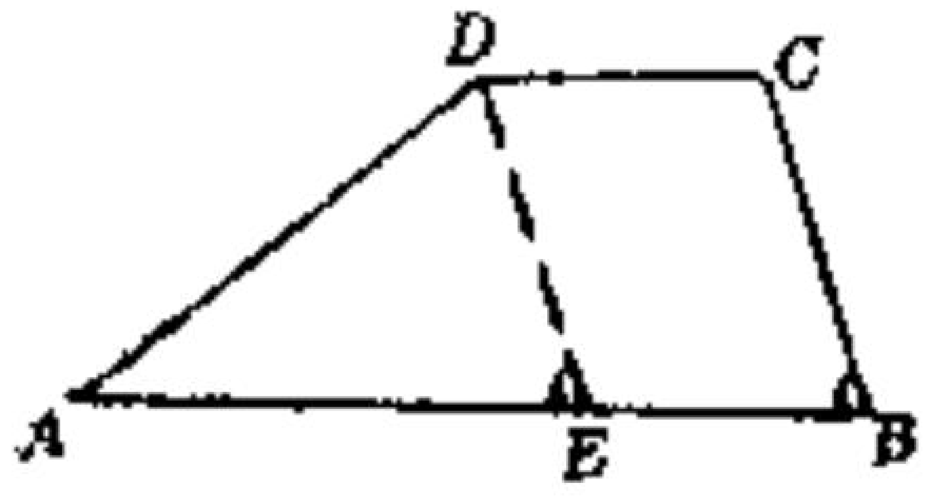


图 12—2

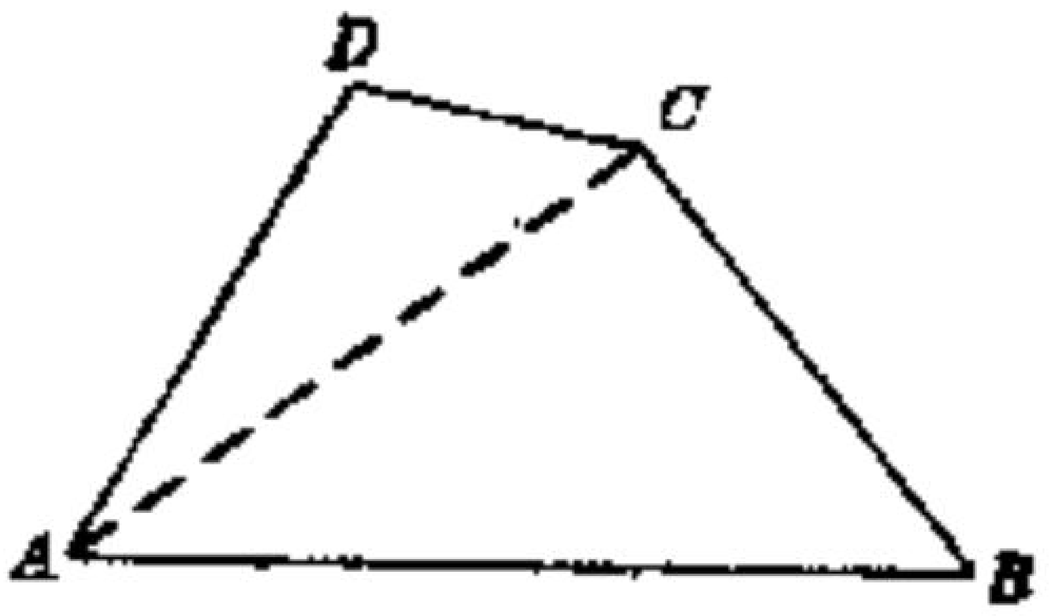


图 12—3

3、在凸四边形 $ABCD$ 中，AB 边最长，CD 边最短。求证：$\angle A<\angle C$ 且 $\angle B<\angle D$.

提要：$\angle CAB<\angle ACB$；$\angle CAD<\angle ACD$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，设 E、F 各是 AB、AC 两边上的点，且 $BE=CF$。求证：$EF<BC$。

提要：(1) $\angle CFB>\angle ABF$；

(2) 由 $\triangle CFB$ 与 $\triangle EBF$，可得 $EF<BC$.

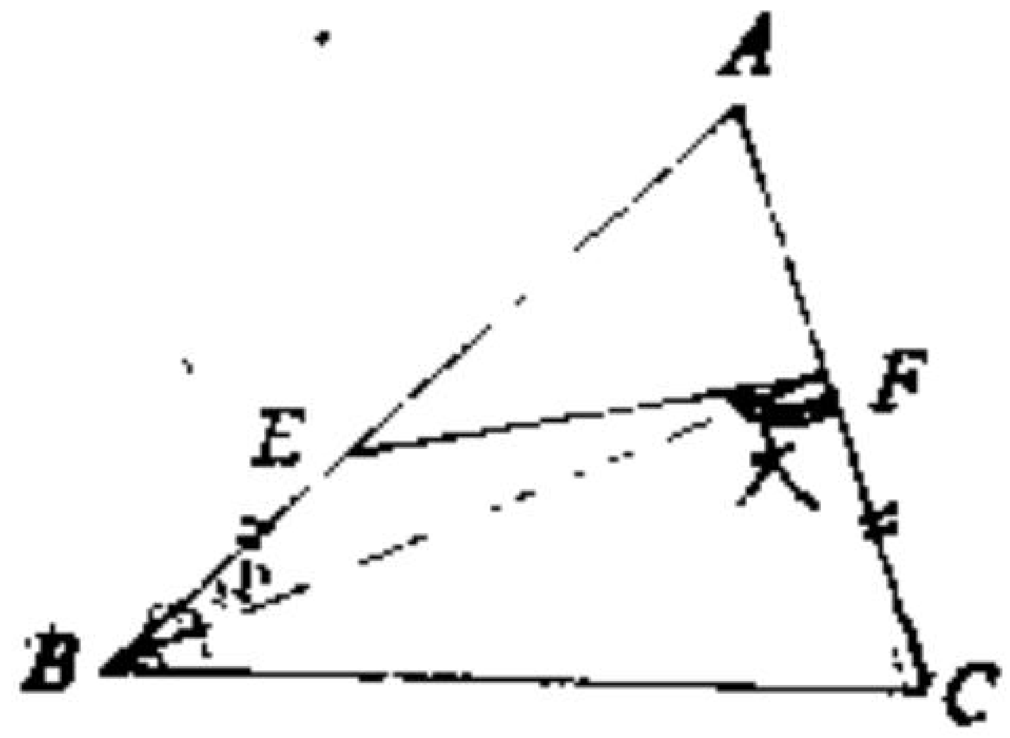


图 12—4

5. 设 M 是等腰三角形 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中点，P 是 $\triangle ABM$ 内部的任意点，则

$\angle APB>\angle APC$.

提要：

$\angle APB>\angle ADB=\angle ADC>\angle APC$

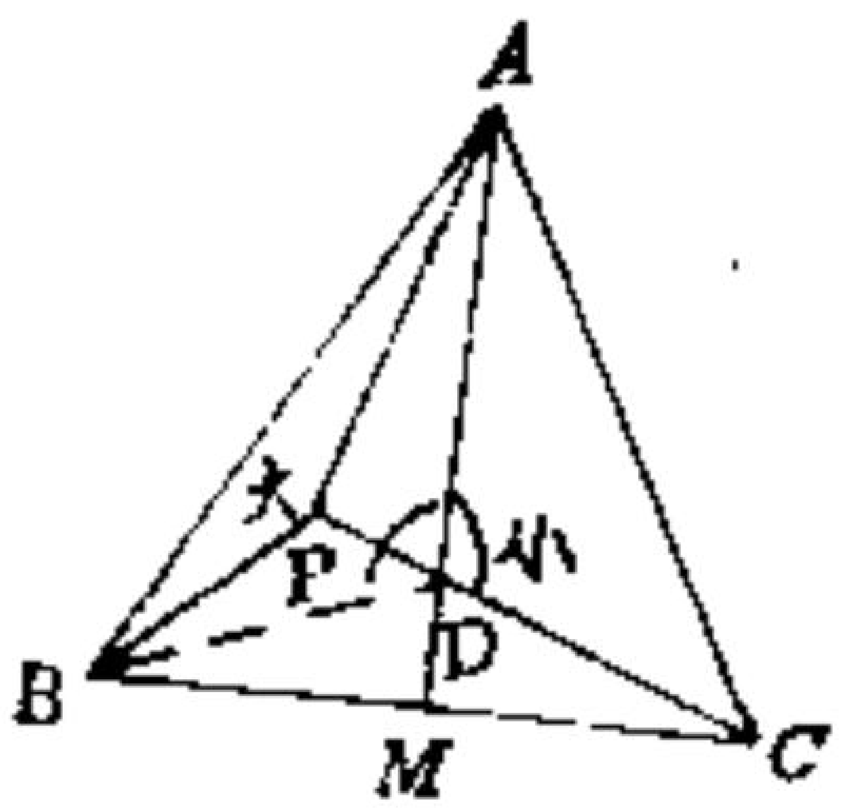


图 12—5

6．$\triangle ABC$中，M是BC边的中点，若$\angle A \overset{<}{\underset{>}{=}} 90^\circ$，则

则$\angle MAB \overset{<}{\underset{>}{=}} \angle B$，且$\angle MAC \overset{<}{\underset{>}{=}} \angle C$.

提要：当$\angle A<90^\circ$时，
取$MP=MB=MC$，
则$\angle MAB<\angle MPB<\angle B$
$\angle MAC<\angle MPC<\angle C$

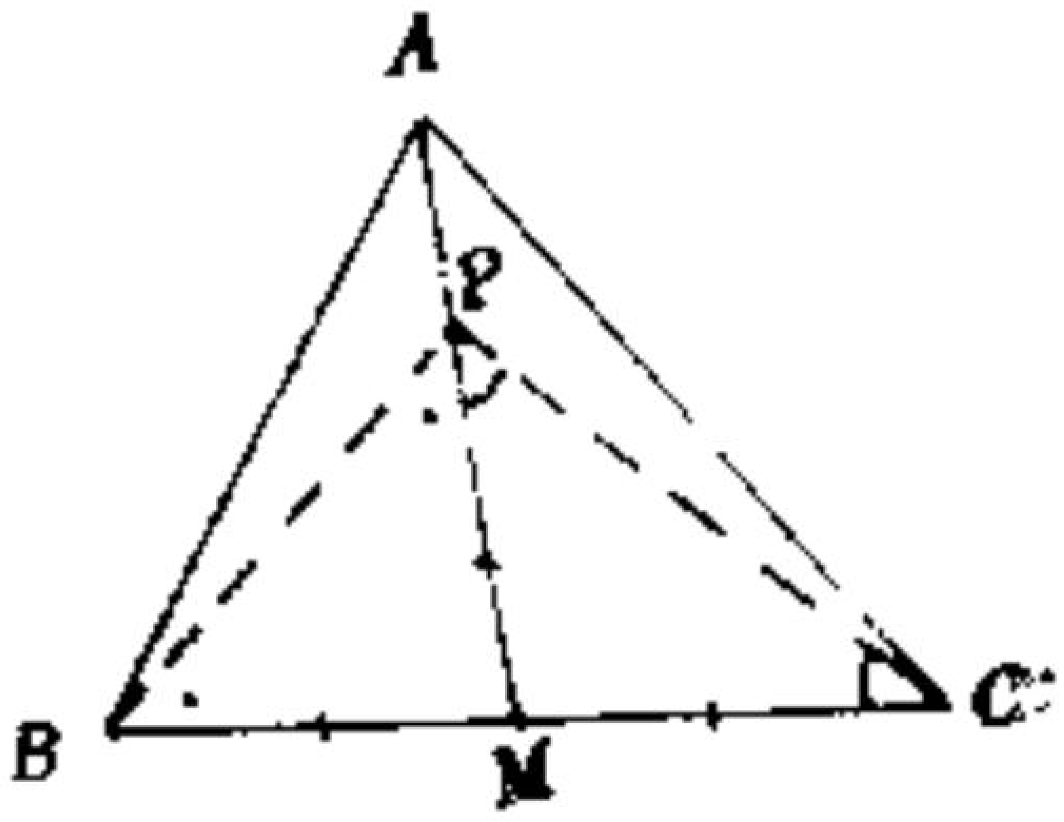


图12—6

7．$\triangle ABC$中，$\angle A>\angle B>\angle C$，若$\angle B \overset{<}{\underset{>}{=}} 60^\circ$，则

$\angle A-\angle B \overset{>}{\underset{<}{=}} \angle B-\angle C$.

提要：当$\angle B<60^\circ$时，$\angle A+\angle C>120^\circ>2\angle B$
$\therefore\ \angle A-\angle B>\angle B-\angle C$.

8．直角三角形的弦与它的高的和，大于勾与股的和。
证：由$AB\cdot CD=AC\cdot BC$，

有$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{AB-BC}{AC-CD}>1$

$\therefore\ AB-BC>AC-CD$

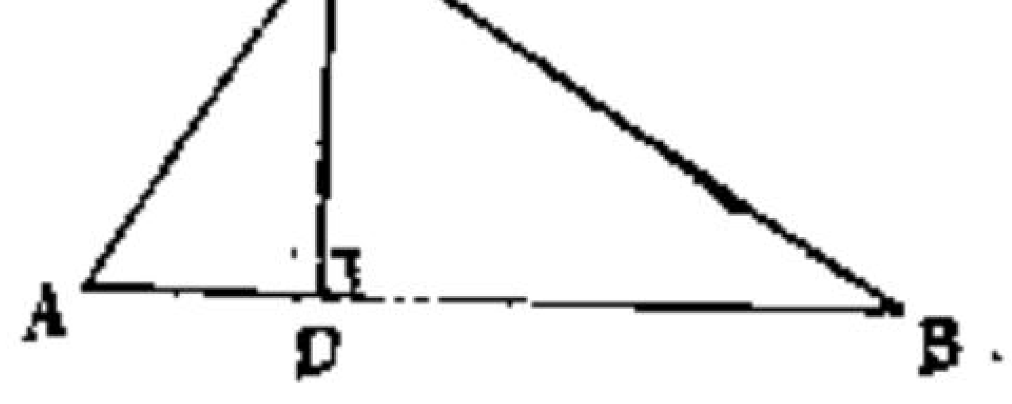


图12—8

9．在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，设$\angle A=\angle A'\geqslant 90^\circ$，

$BC=B'C'$，$AB>A'B'$，则 $AC<A'C'$.

提要：

$\angle AA'C<\angle A'AC'$.

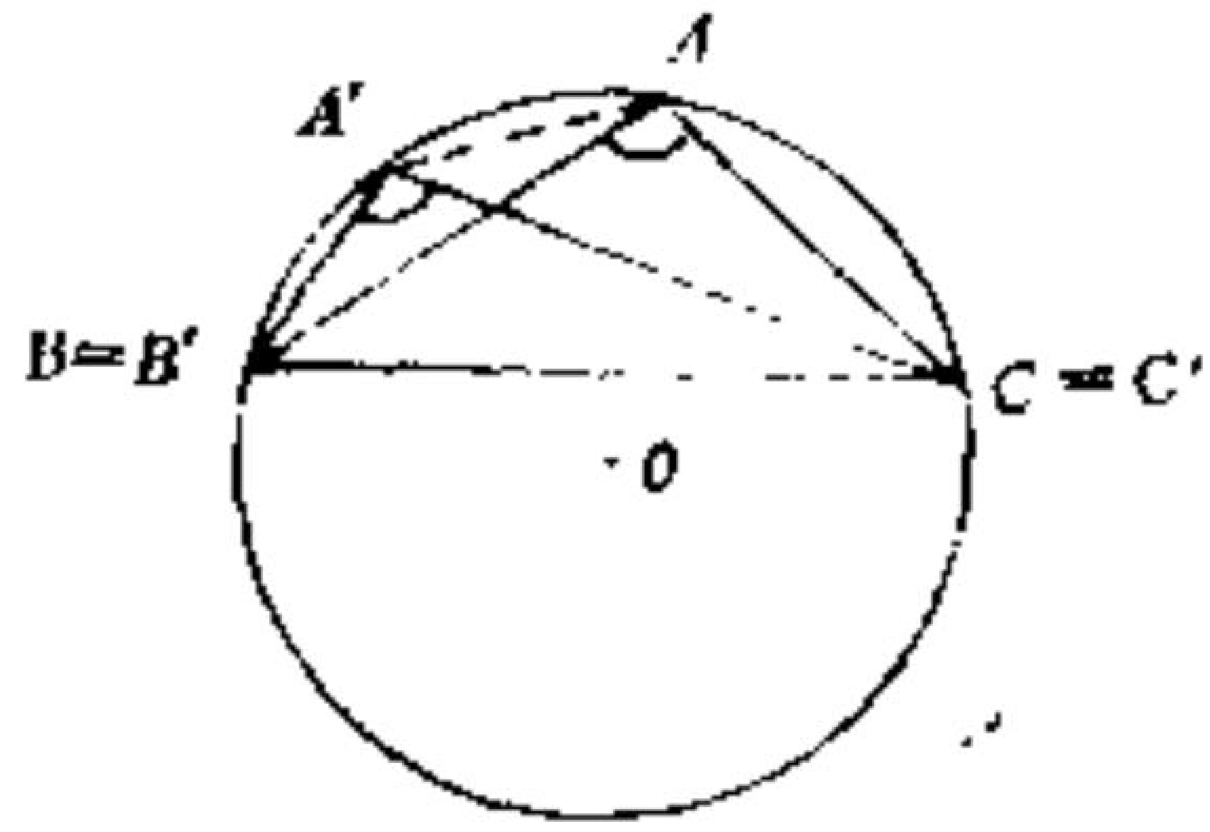


图 12—9

10. 三角形中较长的边，它的中线较短。逆命题亦真。

证：令 $AB>BC>CA$，由$\triangle BCF$与$\triangle CAF$，得

$\angle BFC>\angle AFC$

由$\triangle EGF$与$\triangle AGF$，得$EG>AG$

∴ $BE>AD$.

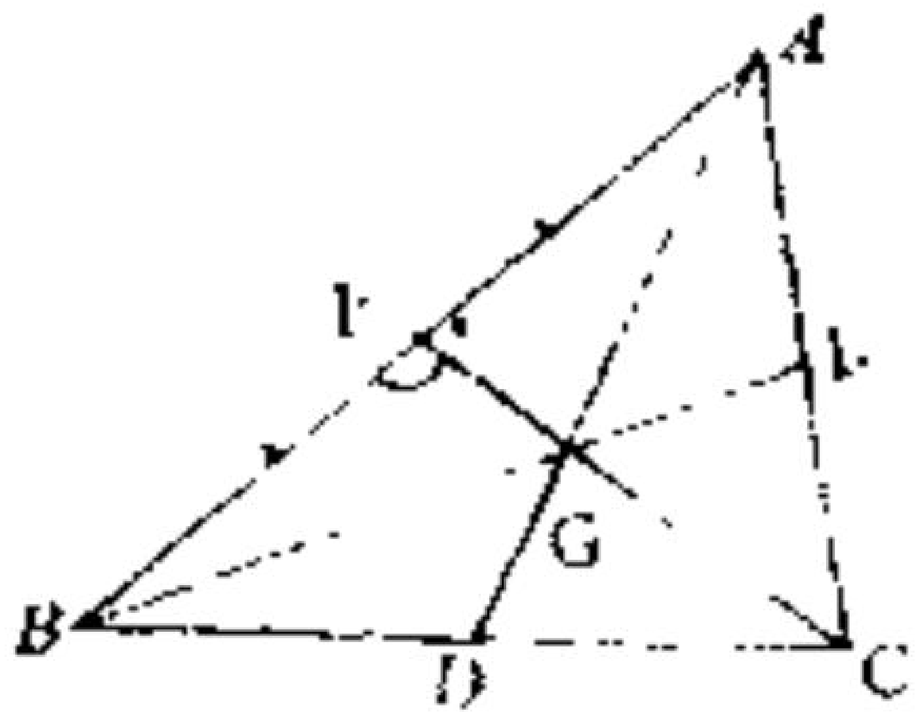


图 12—10

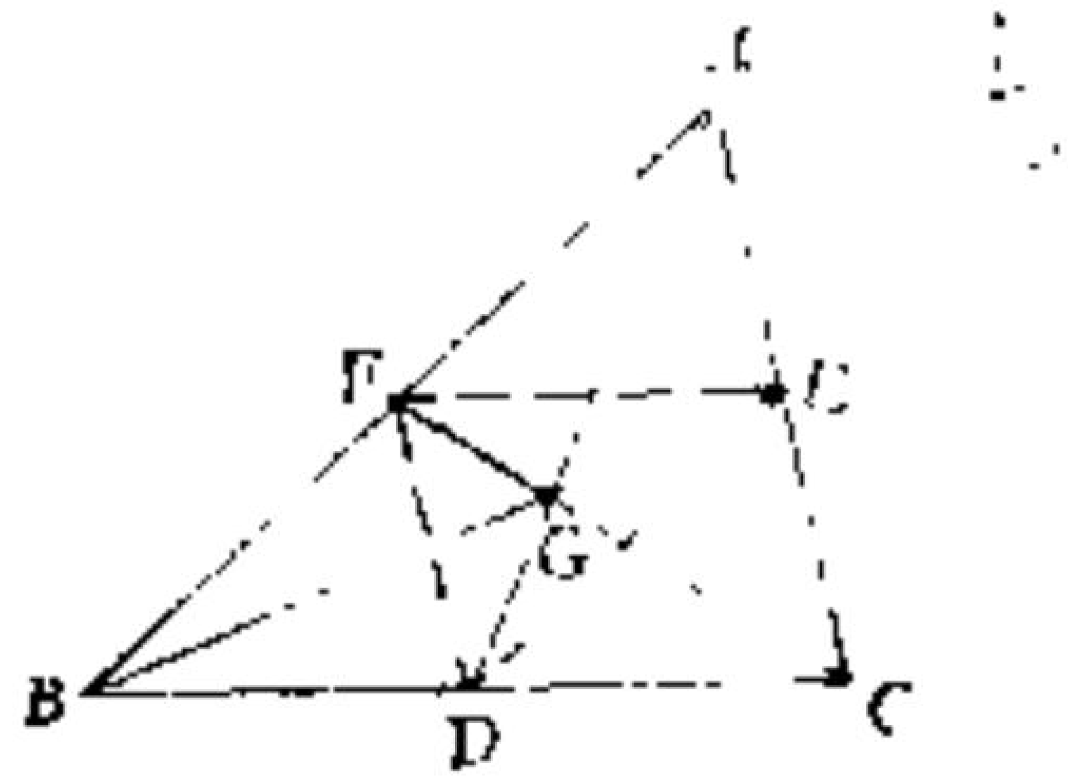


图 12—11

11. 三角形三中线的和介于周长与周长四分之三之间.

证：(1) $GB+GC>a$，$GC+GA>b$，$GA+GB>c$.

∴ $GA+GB+GC>\frac{1}{2}(a+b+c)$

即 $\frac{2}{3}(m_a+m_b+m_c)>\frac{1}{2}(a+b+c)$.

(2) $AD<AF+FD$，$BE<BD+DE$，$CF<CE+EF$.

∴ $m_a+m_b+m_c<a+b+c$.

12. 三角形中较大的边，距重心较近，逆命题亦真.

证：由习题五第 4 题有：

$\triangle GAB=\triangle GBC=\triangle GCA$

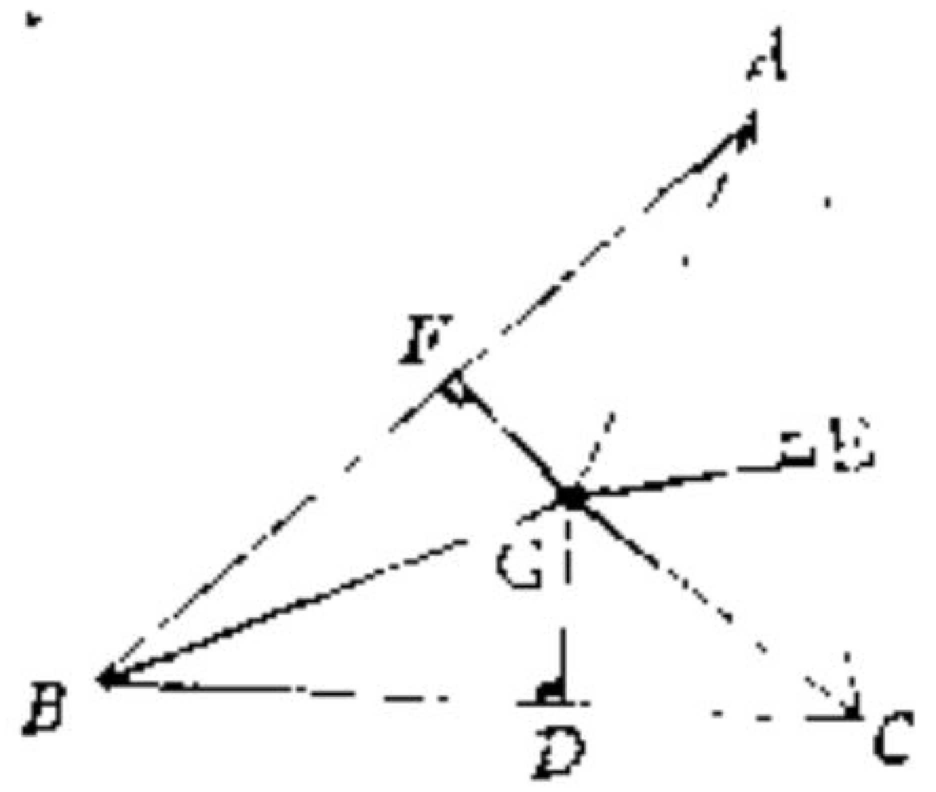


图 12—12

13．三角形中，较大的边，它的高较短。逆命题亦真．（限定不用比例定理证明）

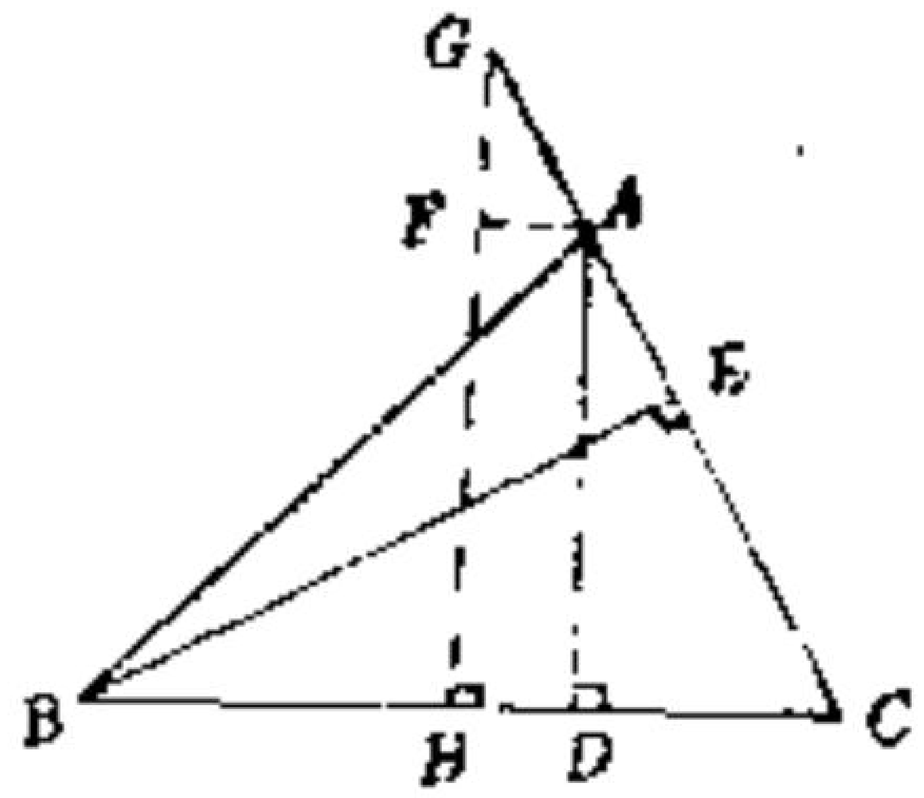


图 12—13

证：设 $BC>AC$，延长 CA 至 G，使 $BC=GC$，作 $BE\perp GC$，$GH\perp BC$，有

$BE=GH>FH=AD$.

14．三角形中较大的角，其顶点距垂心较近。逆命题亦真．

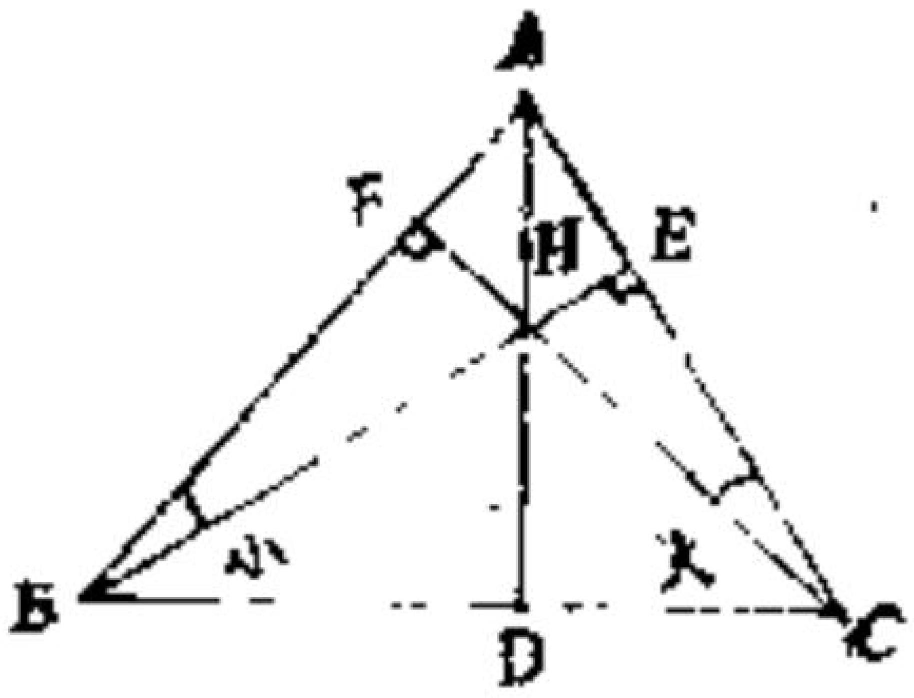


图 12—14

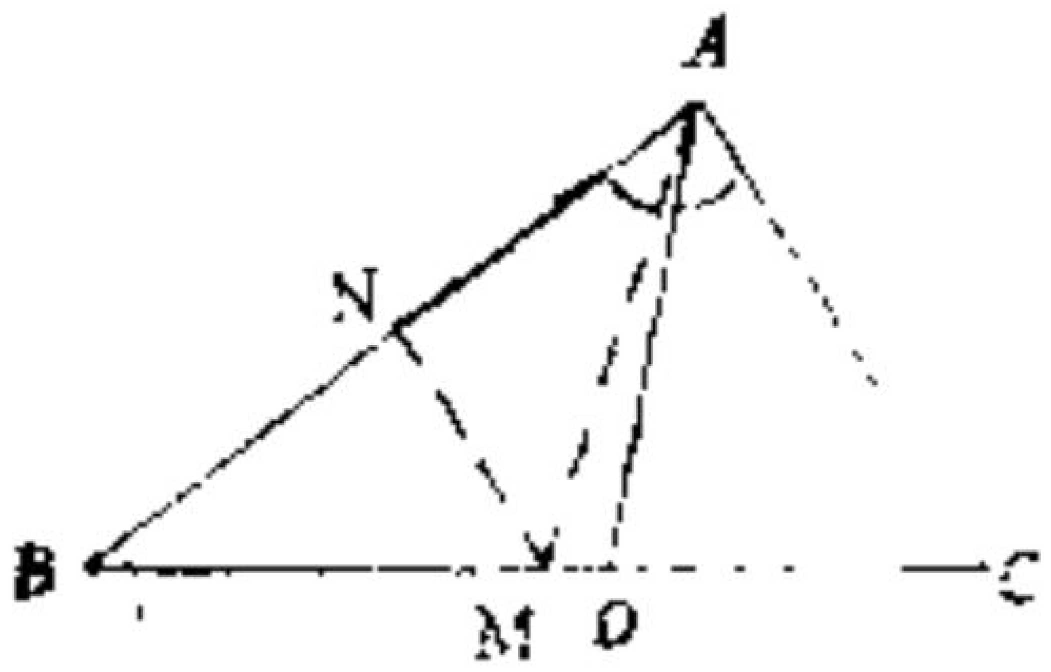


图 12—15

证：若 $\angle ACB>\angle ABC$，由 B、C、E、F 四点共圆，有 $\angle HCB>\angle HEC$ $\quad\therefore\ HC<HB$

15．三角形任一角的平分线，小于两夹边的半和．

证：设 $AB>AC$，AD 是 $\angle A$ 的平分线，由定理112知 $BD>CD$，故中点 M 在 BD 之间。作 $MN\parallel CA$，由 $\angle ADM$ 为钝角．$\therefore\ AD<AM<NA+NM=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

16．O是$\triangle ABC$的外心，I是内心。若$AB>BC>CA$，则$\angle OAI>\angle OBI$及$\angle OCI$．

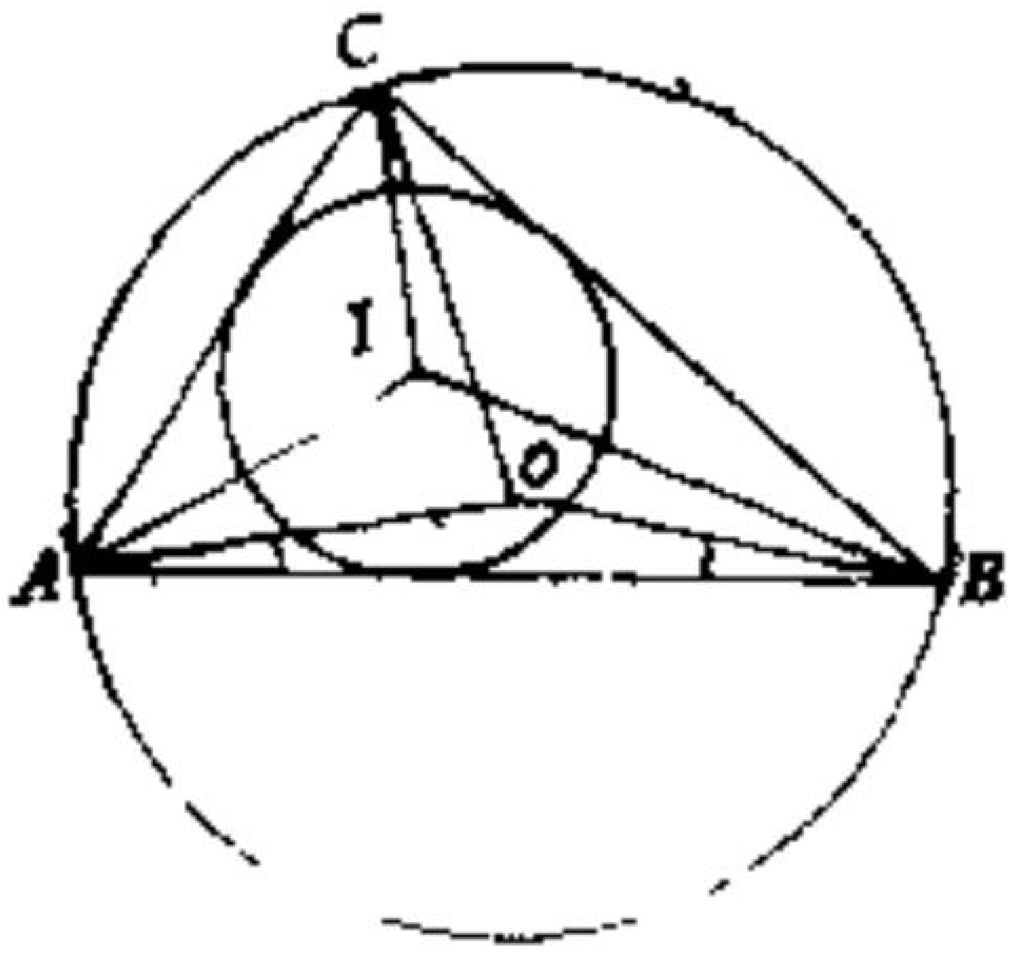


图12—16

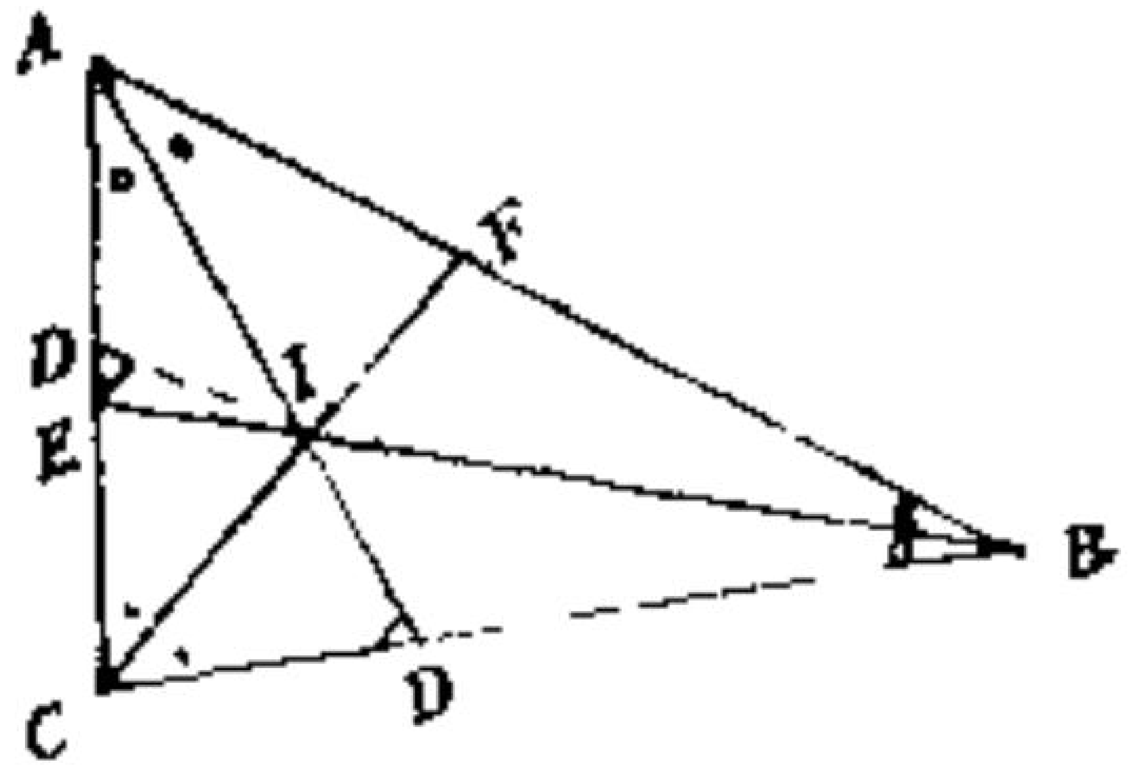


图12—17

提要：$\angle IAB \quad \angle IBA$．

17．I是$\triangle ABC$的内心。直线AI、BI、CI各交BC、CA、AB于D、E、F．若$\angle C>\angle A>\angle B$，则线段$ID$大于$IE$及$IF$．

提要：(1) $\angle CID=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$，

$$\angle CIE=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)．$$

$\therefore \quad \angle CID \quad \angle CIE$．　　故作$CD'=CD$

D'在AE之间，且$ID'=ID$．

(2) $\angle IED'=\angle C+\frac{1}{2}\angle B>90°$，故$ID'>IE$．

18．三角形内任意点至三边（所在直线）距离和，介于最长与最短高线之间。

证：(1) 令$BE<AD<CF$，则$AC>BC>AB$．

(2) 令P点至三边的距离为P_a、P_b、P_c，则

$\frac{1}{2}AC\cdot BE$

$=\frac{1}{2}(BC\cdot P_a+CA\cdot P_b+AB\cdot P_c)$

$<\frac{1}{2}(AC\cdot P_a+AC\cdot P_b+AC\cdot P_c)$.

$\therefore\quad BE<P_a+P_b+P_c$.

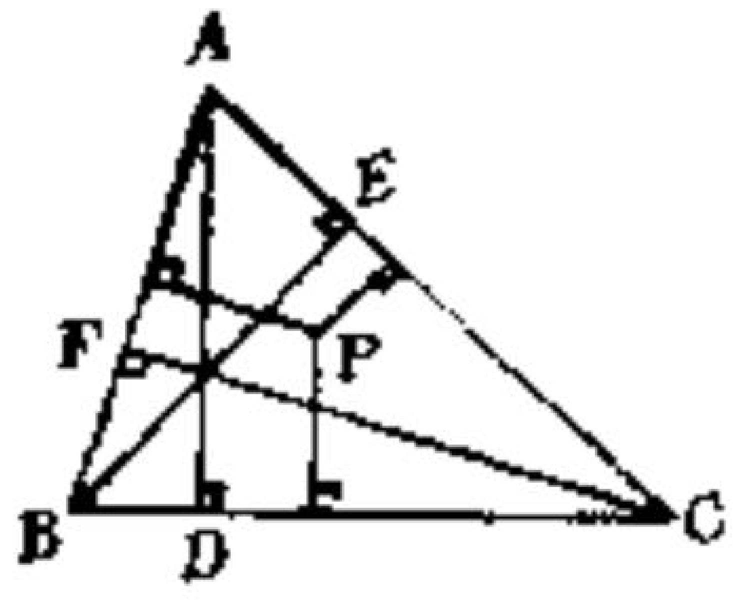


图12—18

(3) $\frac{1}{2}AB\cdot CF=\frac{1}{2}(BC\cdot P_a+CA\cdot P_b+AB\cdot P_c)$

$>\frac{1}{2}(AB\cdot P_a+AB\cdot P_b+AB\cdot P_c)$

$\therefore\quad CF>P_a+P_b+P_c$.

19. 设$\triangle ABC$是正三角形，P是任意点．求证：$PA\leqslant PB+PC$.

证：(1) 作正三角形$\triangle PCD$，则 $\triangle PCB\cong\triangle DCA$.

故 $DA=PB$，$PD=PC$.

(2) 当D点在PA上时，等号成立，例如当$\angle BPC$为120°且$\angle PBC=\angle PCB=30°$时，$D$点显然在$PA$上.



图12—19

20. 设$\triangle ABC$的$\angle A\geqslant 120°$，P是任意点．求证：

$PA+PB+PC\geqslant AB+AC$

提要：(1) 作正三角形$\triangle PCE$与$\triangle ACD$，则

$\triangle PAC\cong\triangle CED$.

(2) 折线BP、PE、ED环抱折线BA、AD.

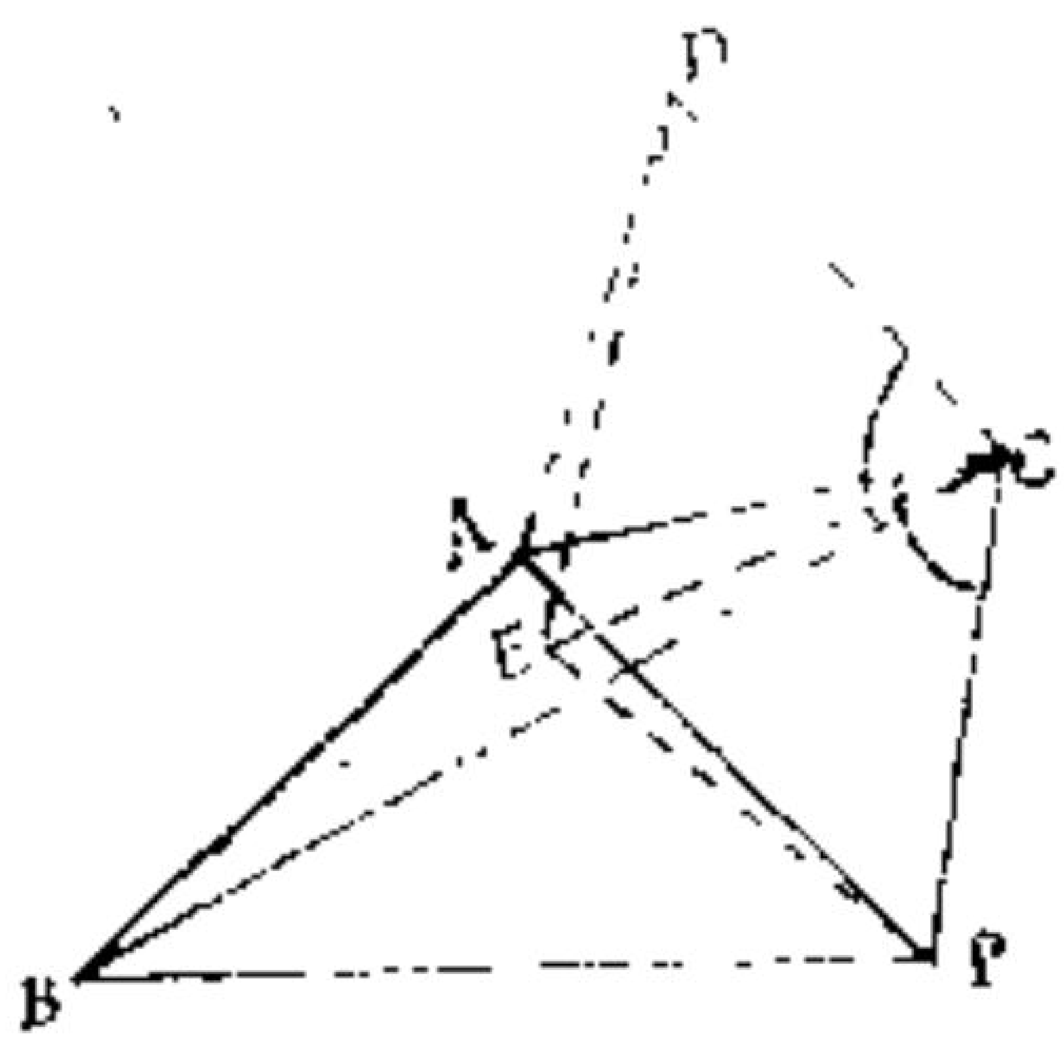


图12—20

21．设三角形的各角均小于120°，若一点对于三边的视角均相等，则这点至三顶点的距离和小于其他点至三顶点的距离和，且前者的平方不大于三边的平方和。

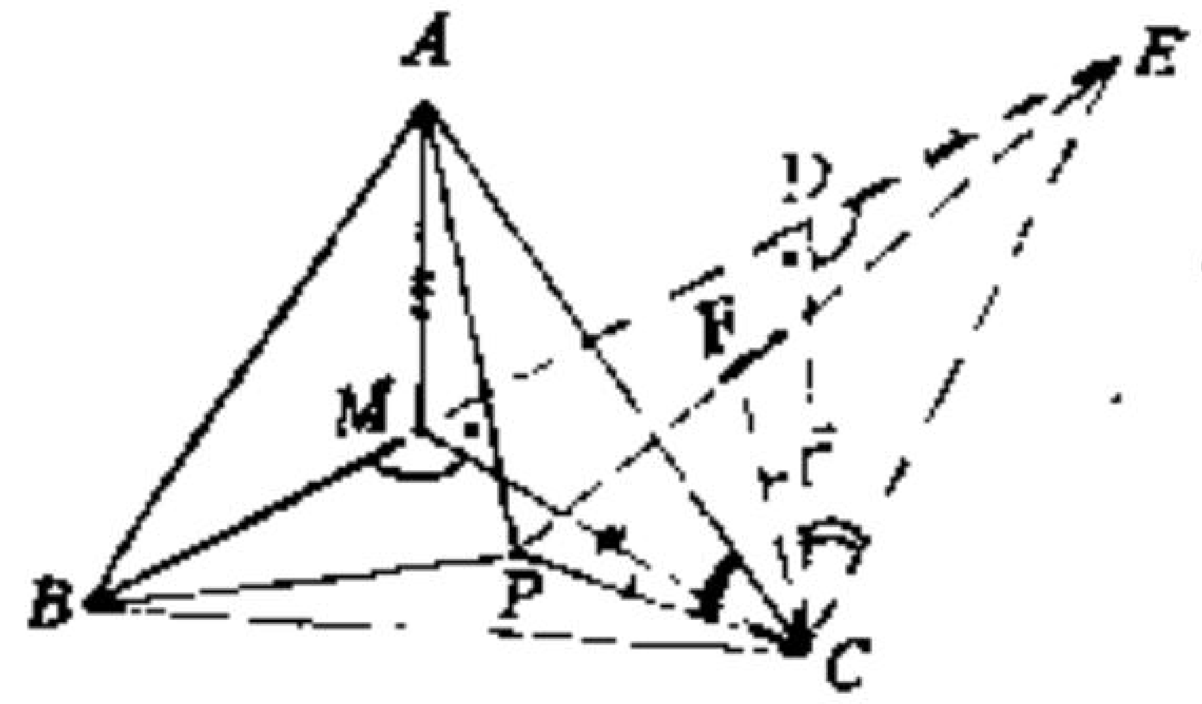


图12—21

证：(1) 延长 BM 至 MD 再至 DE，使 $MD=MC$，$DE=MA$．则$\triangle MAC\cong\triangle DEC$．

$\therefore\quad AC=EC$．

(2) 设P是任一点．作正三角形$\triangle PCF$，有$\angle PCM=\angle FCD$．

$\therefore\quad \triangle PAC\cong\triangle FEC$．　故 $FE=PA$，$PF=PC$．

(3) BP、PF、FE 为折线而 BM、MD、DE 为直线．

即　$MA+MB+MC<PA+PB+PC$．

(4) 令 x、y、z 表示 MA、MB、MC，由余弦定理有

$a^2=y^2+z^2+yz$，$b^2=z^2+x^2+zx$，$c^2=x^2+y^2+xy$．

$\therefore\quad a^2+b^2+c^2=2(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)$．

(5) 由$\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy$；$\dfrac{y^2+z^2}{2}\geqslant yz$，$\dfrac{z^2+x^2}{2}\geqslant zx$．

得　$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$．

故有　$(x+y+z)^2\leqslant a^2+b^2+c^2$．

22．钝角或直角三角形中，任一内接三角形的半周大于最大边的高．

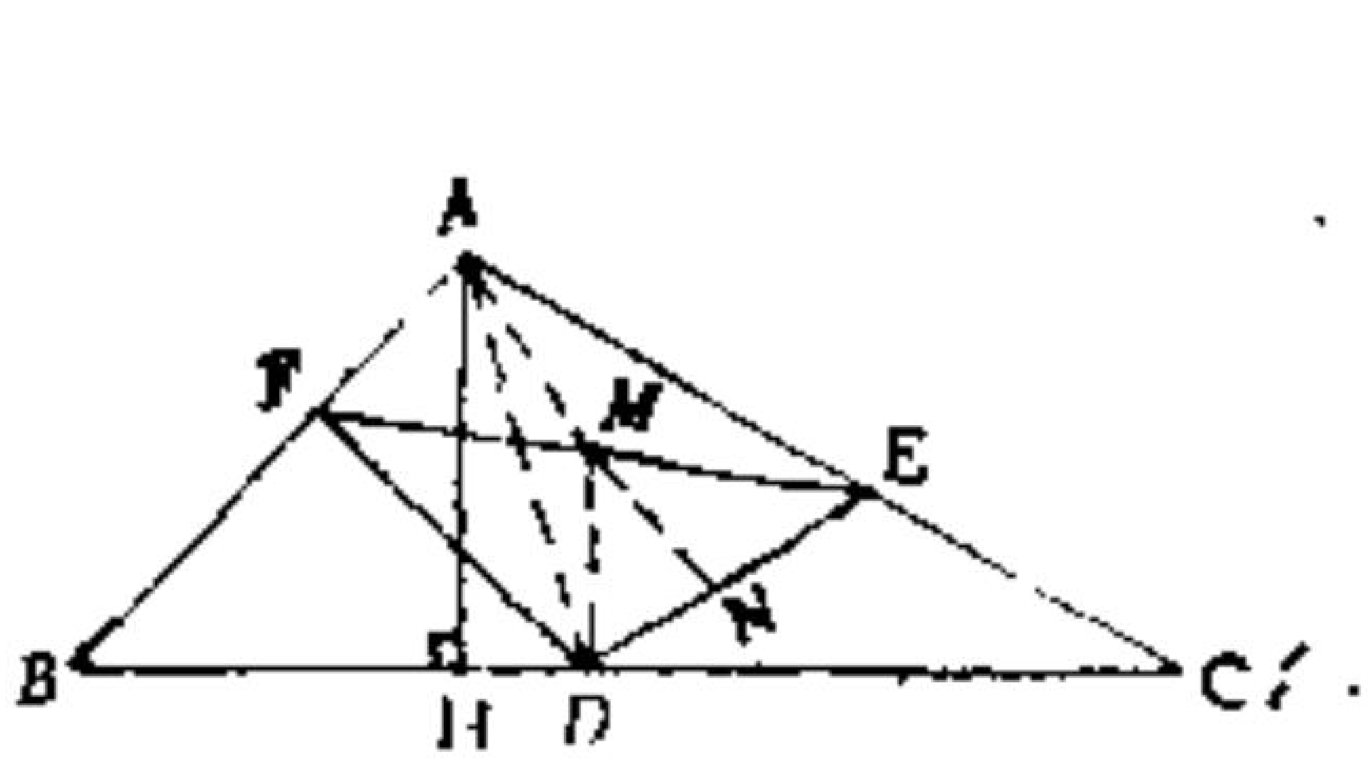


图12—22

若一个三角形的三顶点分别落在另一个三角形的三边上，则前者叫做后者的内接三角形。

证：M、N为 EF、DE 的中点．

有　　$MF>MA$.

由　　$ND+NM>MD$，得

得　　　$ND+NM+MF>MD+MA>AD>AH$.

23．锐角三角形中，所有内接三角形以垂足三角形的周长最短.

证：(1) 作 D、P 关于 AB、AC 的对称点 L、K，I、J，由复习题一第24题，可得垂足$\triangle DEF$的周长为LK，而任意内接$\triangle PQR$的周长大于IJ，且 $LK=2MN$、$IJ=2GT$.

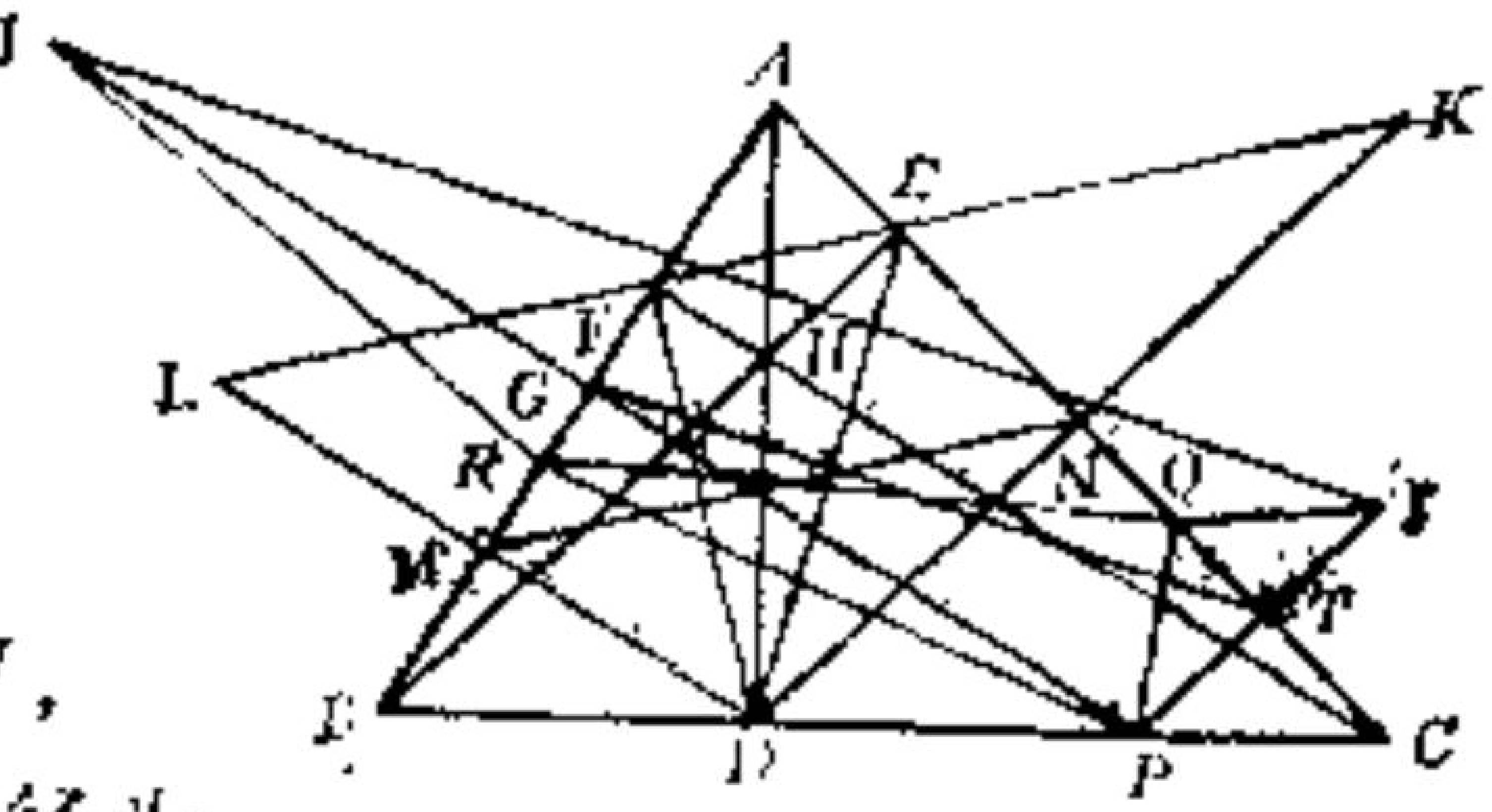


图12—23

(2) ∵　A、M、D、N，A、G、P、T 四点共圆且直径为 AD、AP，由正弦定理，

有 $\sin A=MN/AD=GT/AP$　　且　　$AP>AD$，

∴　　$GT>MN$

故　　$IJ>LK$.

24．锐角三角形的内接正方形中，立于较大边上的面积较小。

一个正方形的顶点若都落在一个三角形的周界上，则叫做这三角形的内接正方形，看这正方形的一边落在三角形的哪一边上，我们便说正方形立于三角形的哪边上。

证：(1) 令 a 上的高为 h_a，立于 a 上正方形的边长为 x；c 上的高为 h_c；立于 c 上正方形的边长为 y. 由相似三角形关系有：

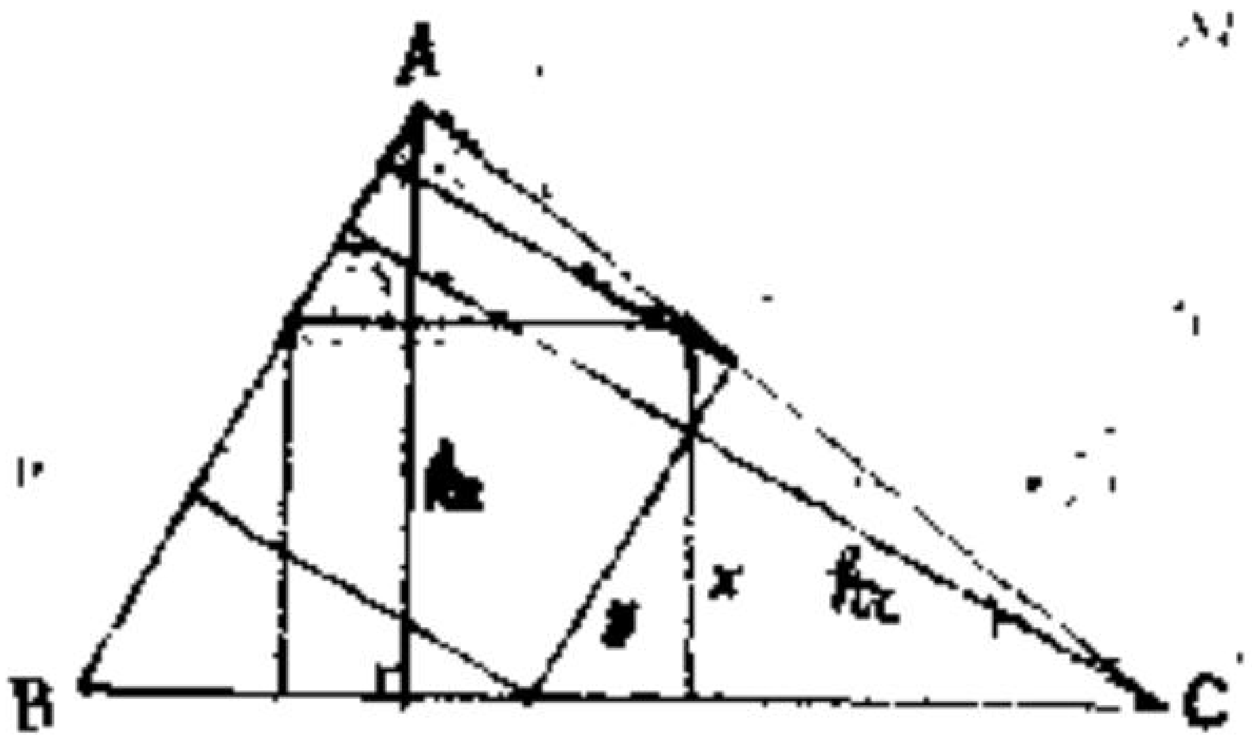


图12—24

$$\frac{x}{a}=\frac{h_a-x}{h_a}$$，故有

$$x=\frac{ah_a}{a+h_a} \text{ 与 } y=\frac{ch_c}{c+h_c}$$

且 $ah_a=ch_c$.

(2) 由例题27，若 $a>c$ 则 $a+h_a>c+h_c$.

第四节 垂直与平行

习题十三

1. 三角形的外心与三顶点的连线，分别垂直于垂足三角形的三边.

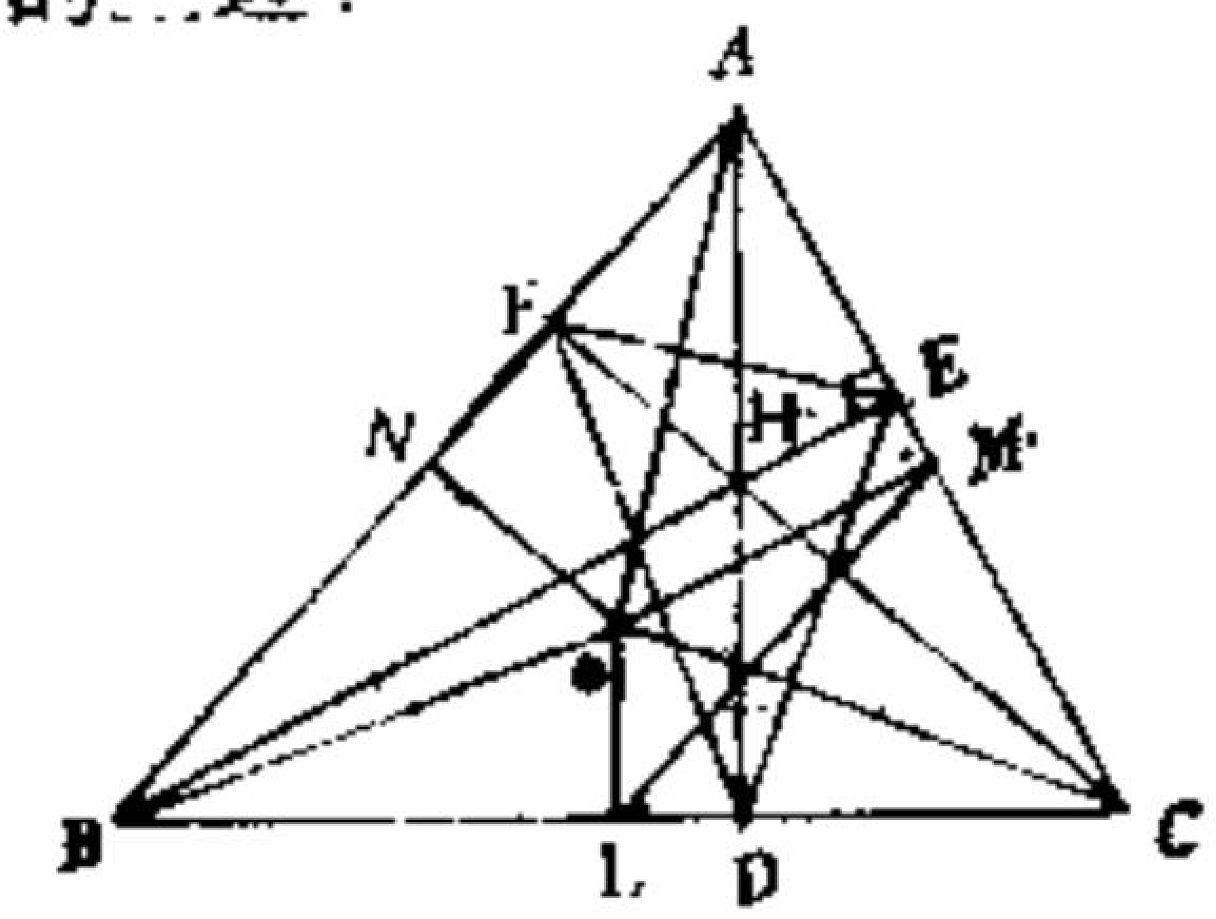


图13—1

证：(1)：由 $ML\perp AB$ 及 A、B、D、E 共圆，有 $\angle CML=\angle EAB=\angle EDC$.

(2)：由 C、M、D、L 四点共圆，有 $\angle CED=\angle CLM=\angle COM$.

(3)：$CO\perp DE$.

2. 设 H 是等腰三角形 $\triangle ABC$ 的垂心，D 是底边 BC 的中点，K 是 AH 的中点，E 是 BH 与 AC 的交点. 引 $EF\perp BC$ 于 F. 延长 AD 至 G，使 $DG=EF$. 求证：$\angle GBK=90°$.

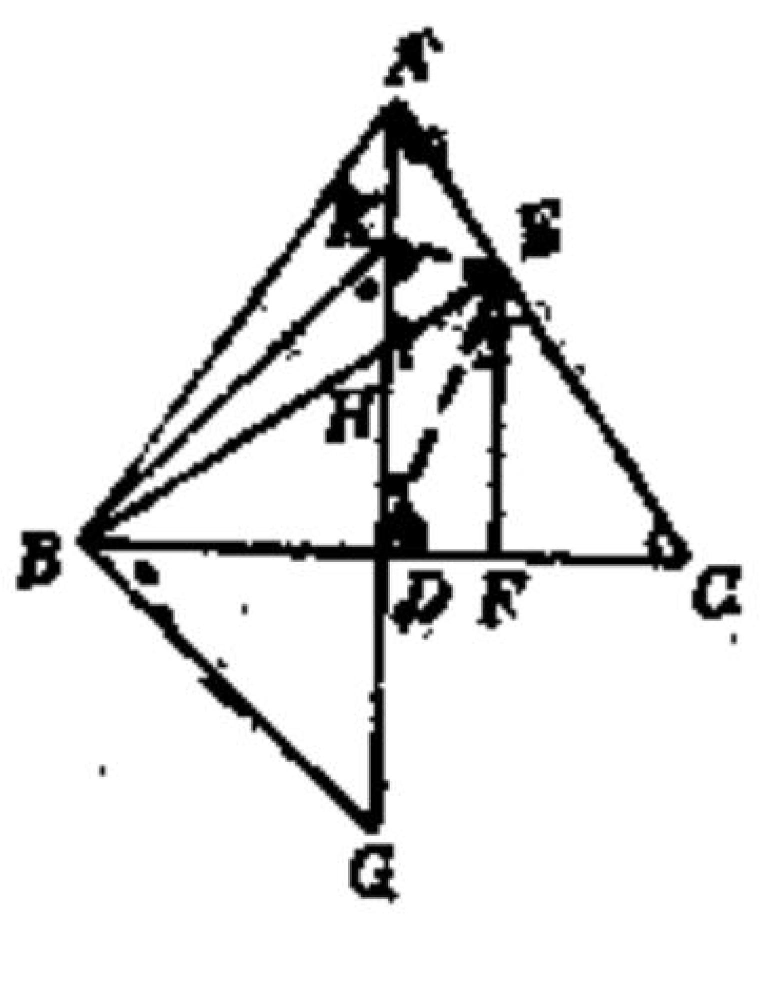


图13—2

证：(1)：K、D 是直角三角形的斜边 AH、BC 的中点. 故 $\triangle KHE$、$\triangle DCE$ 均为等腰三角形，且由 H、D、C、E 四点共圆，得 $\angle KHE=\angle DCE$.

$\therefore\ \angle EKD=\angle EDC$.

(2)：$\triangle KDE \backsim \triangle DEF$，故 $DE^2=DB^2=KD\cdot EF=$ $=KD\cdot DG$．由 $\triangle BDG \backsim \triangle KDB$，得 $\angle GBK=90°$

3.设 D 是等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中点．过 C、D 两点但不过 A 点任作一圆交直线 AC 于 E，连 DE 交此圆于 F，则 $AF\perp BE$．

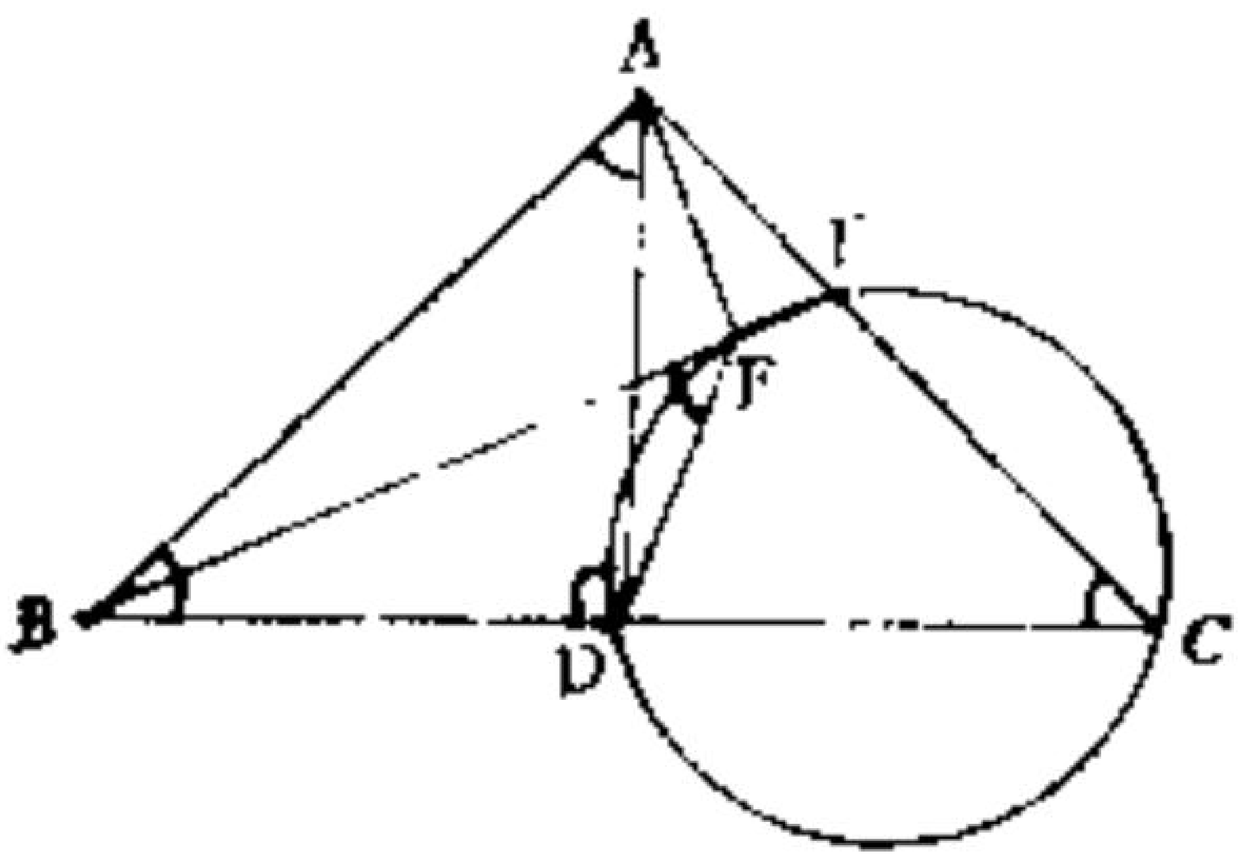


图 13—3

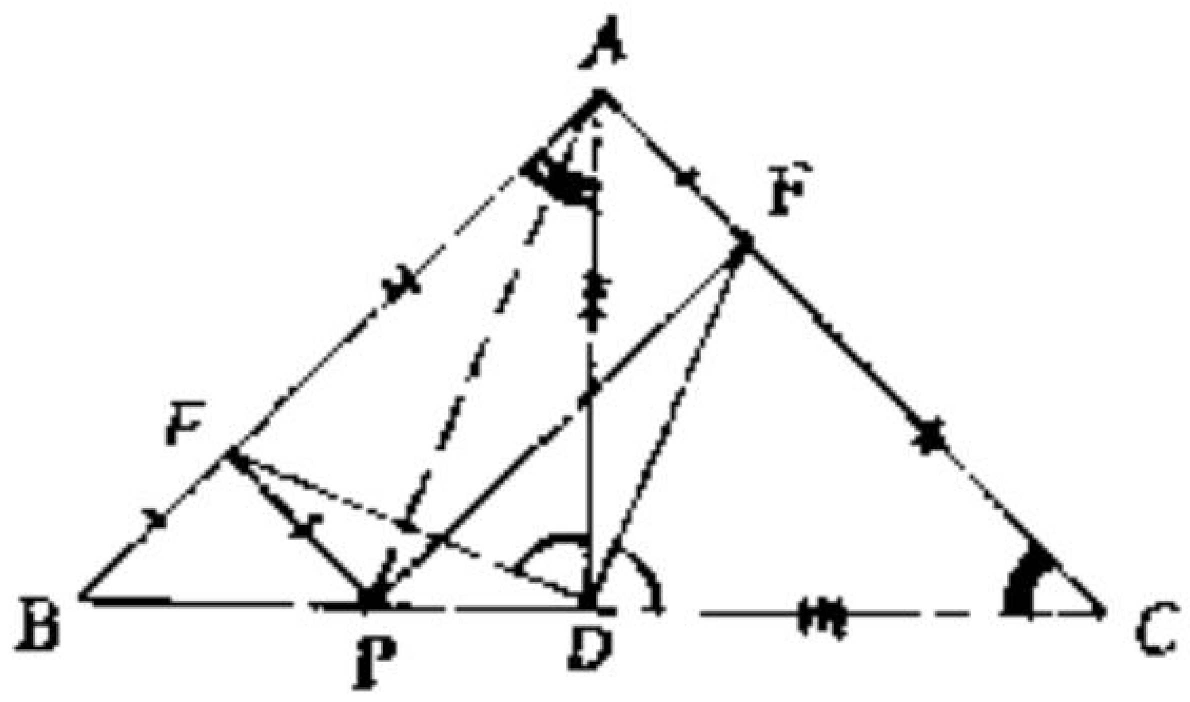


图 13—4

4.设 D 是等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 底边 BC 的中点，P 是直线 BC 上的任一点．引 $PE\perp AB$ 于 E，$PF\perp AC$ 于 F．求证：DE 与 DF 相等且垂直．

提要(1)：$\triangle DEA \cong \triangle DFC$．

(2)：由 $\angle EDA=\angle FDC$，得 $DE\perp DF$．

5.设 $ABCD$ 是正方形，P 是直线 BD 上的任一点．引 $PE\perp BC$ 于 E，$PF\perp CD$ 于 F．求证：AP 与 EF 相等且垂直．

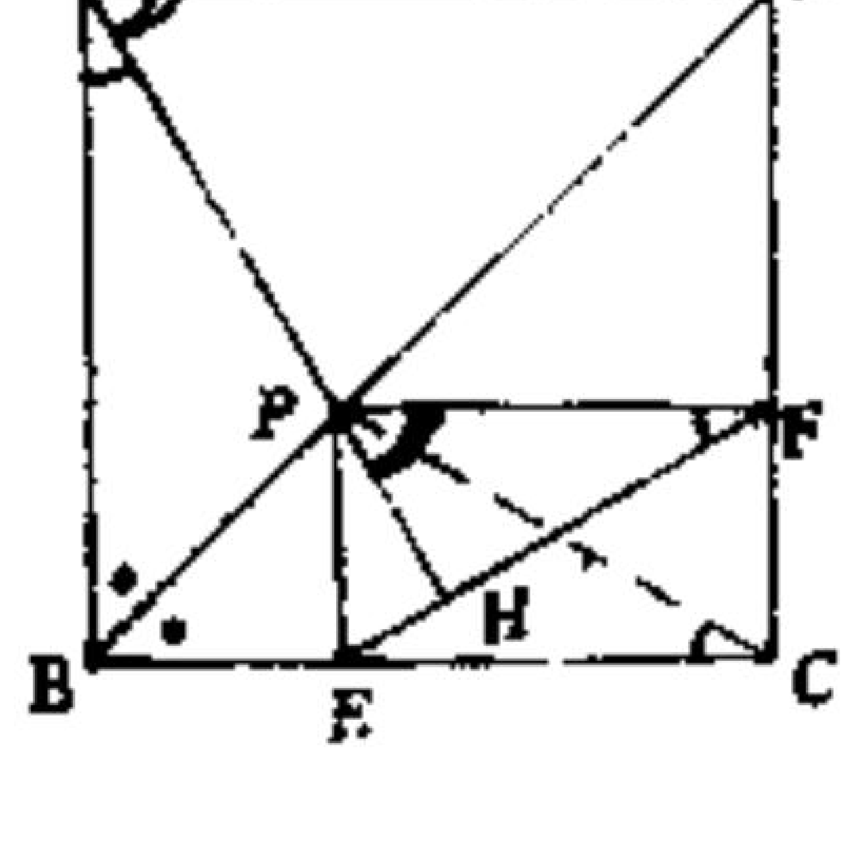


图 13—5

提要(1)：$AP=CP=EF$；

(2)：$\angle FPH=\angle DAH$，$\angle PFE=\angle PCE$ $=\angle PAB$．

6. 在$\triangle ABC$的外边作正方形$ABEF$和$ACGH$. 求证：BH与CF相等且垂直.

提要：$\triangle ACF\cong\triangle AHB$.

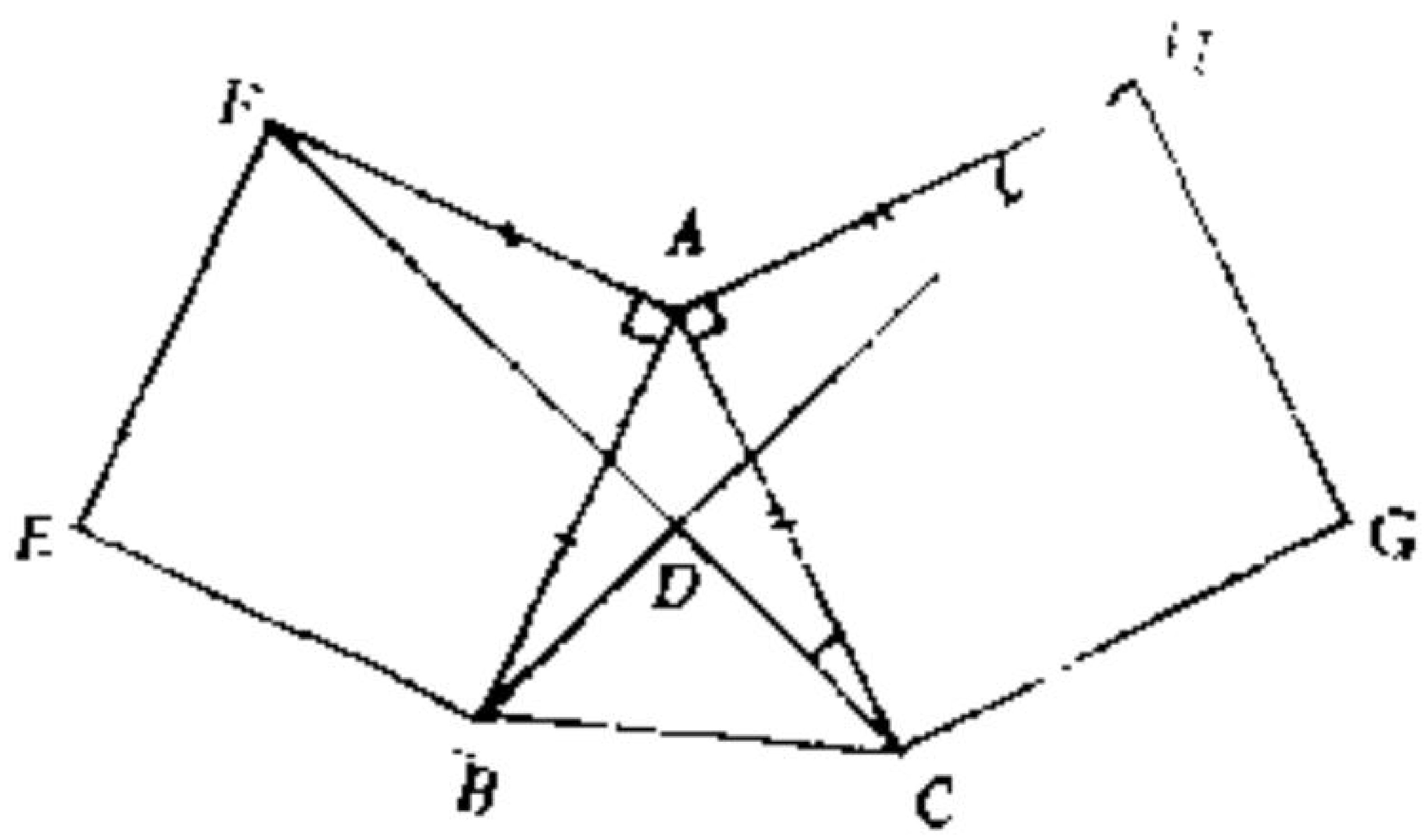


图13—6

7. 在上题中，作出$\square FAHD$. 求证：AD与BC相等且垂直.

提要（1）：$\triangle ADF\cong\triangle BCA$;

（2）：$\angle ABP=\angle FAD$.

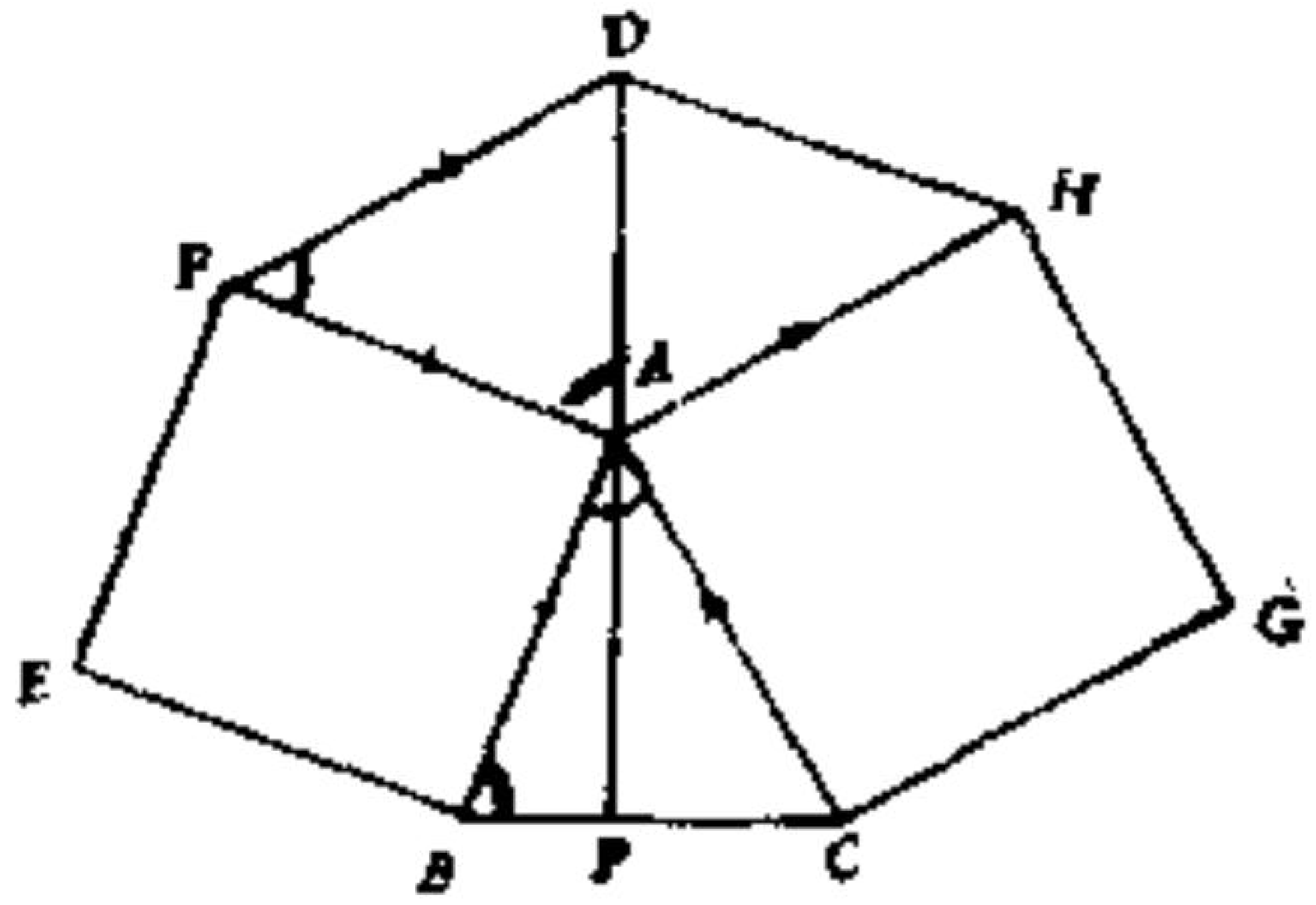


图13—7

8. 仍承前题. 设M、N各是BC、FH的中点，P、Q各是所作两个正方形的中心. 求证$MPNQ$是一个正方形.

证：由第6题知BH与CF相等且垂直，故有PM与PN相等且垂直.

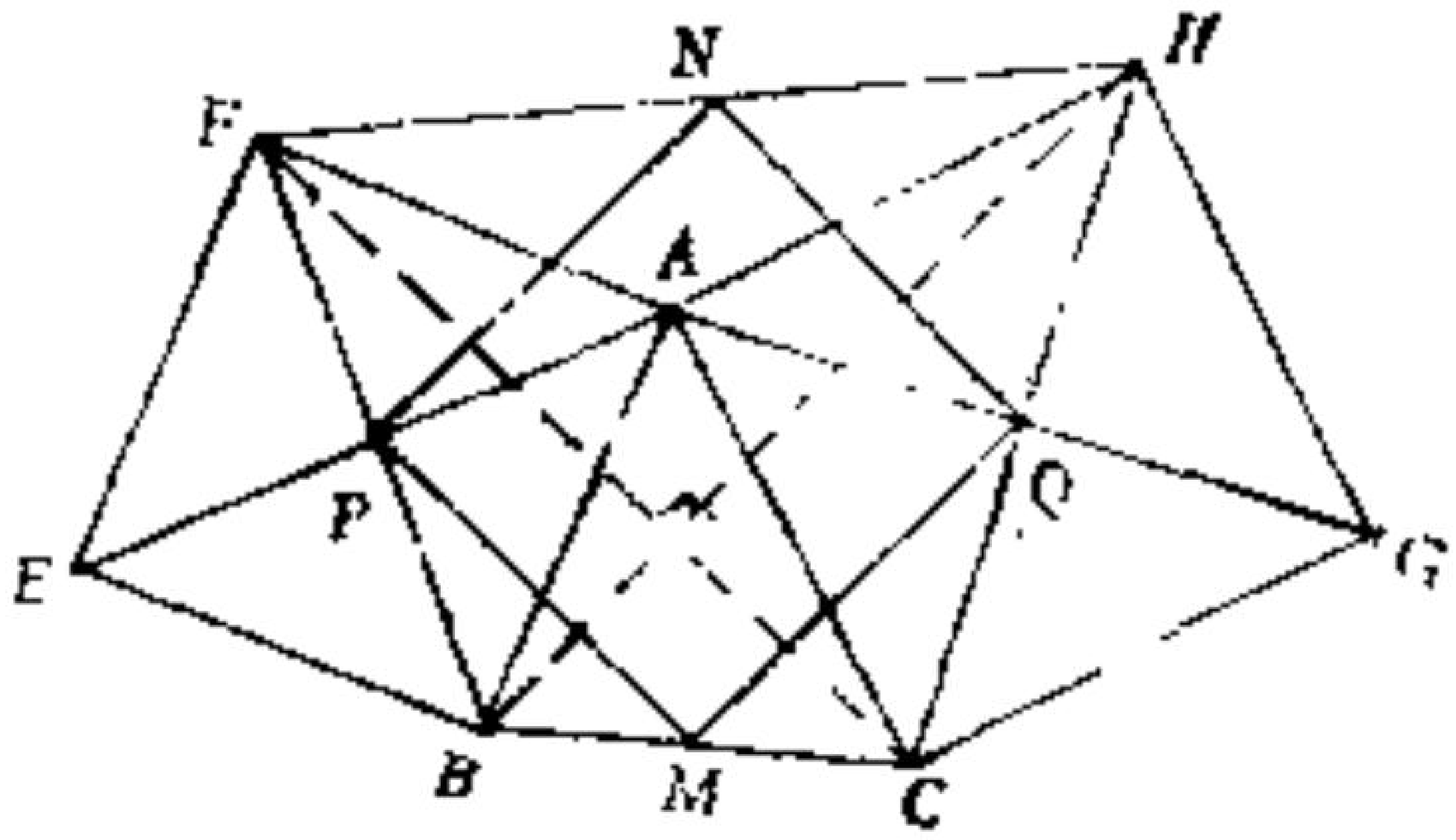


图13—8

9. 以一简单四边形的每一边向外侧各作正方形. 求证相对二形的中心连结线与他二形的中心连结线相等且垂直.

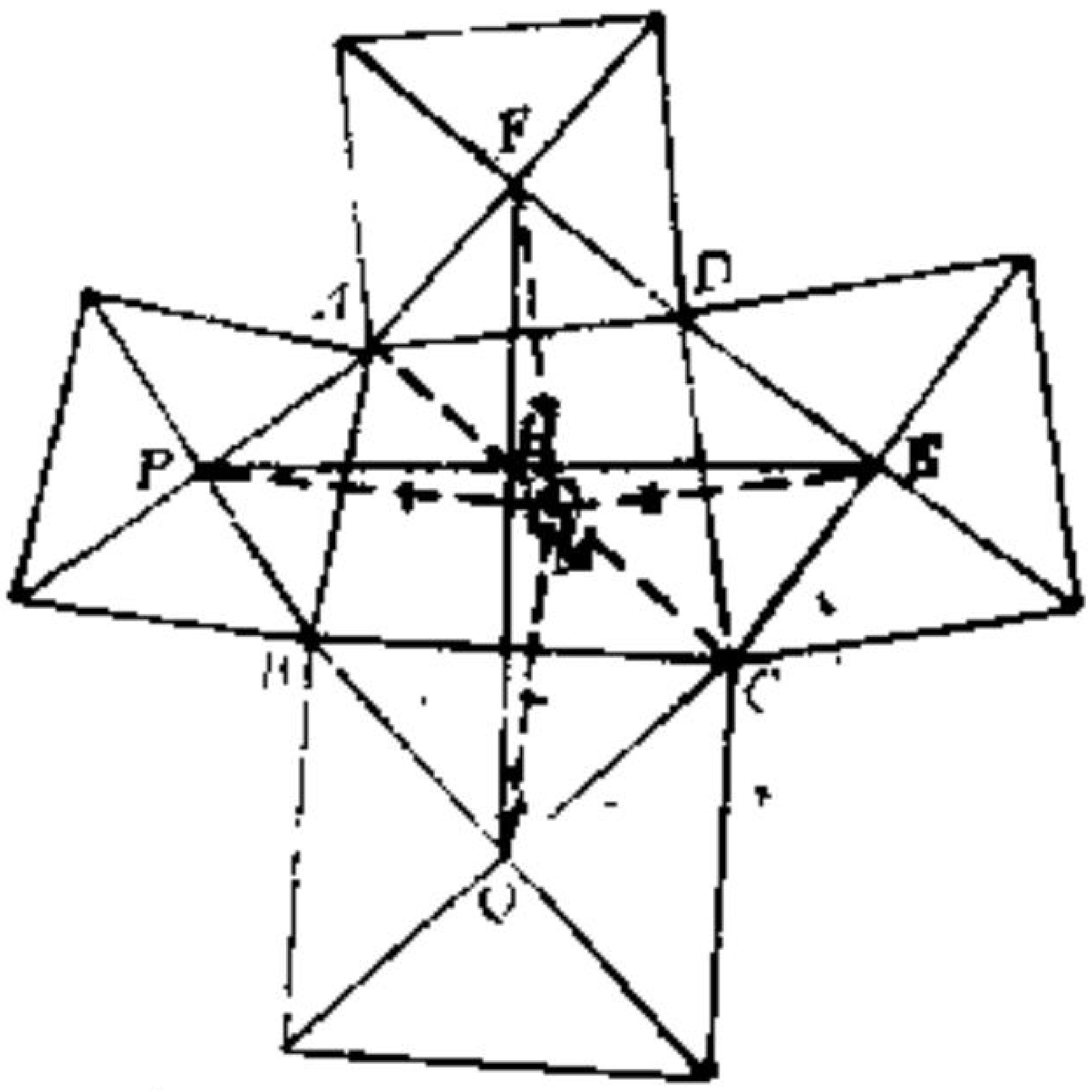


图13—9

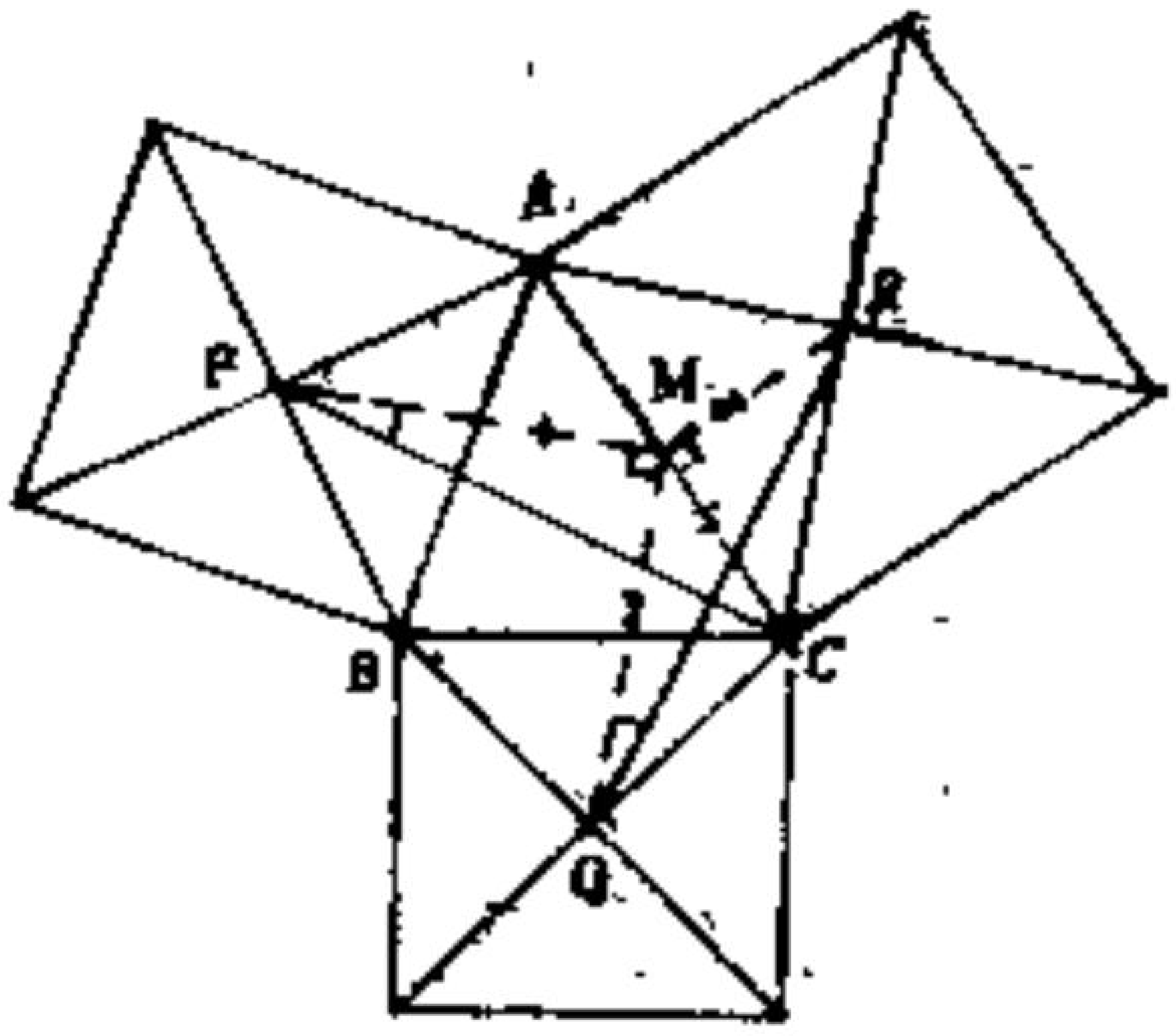


图13—10

证：(1)：由上题，MP与MQ相等且垂直；ME与MF相等且垂直．有$\triangle PME\cong\triangle QMF$．

(2)：$\angle HPM=\angle HQM$，故$PE\perp QF$．

10．以一三角形的每边为一边，向外边各作正方形．求证：三角形的顶点至立于对边上那个正方形的中心连结线，与他二正方形中心的连结线相等且垂直．

提要：M为AC的中点．有$MP\perp MQ$，

且$\triangle PMC\cong\triangle QMR$．

11．设BE、CF同是$\triangle ABC$的高，在半线BE上截$BP=AC$，在半线CF上，截$CQ=AB$．求证：AP与AQ相等且垂直．

提要(1)：$\triangle APB\cong\triangle AQC$；

(2)：由$\angle Q=\angle BAP$得$AP\perp AQ$．

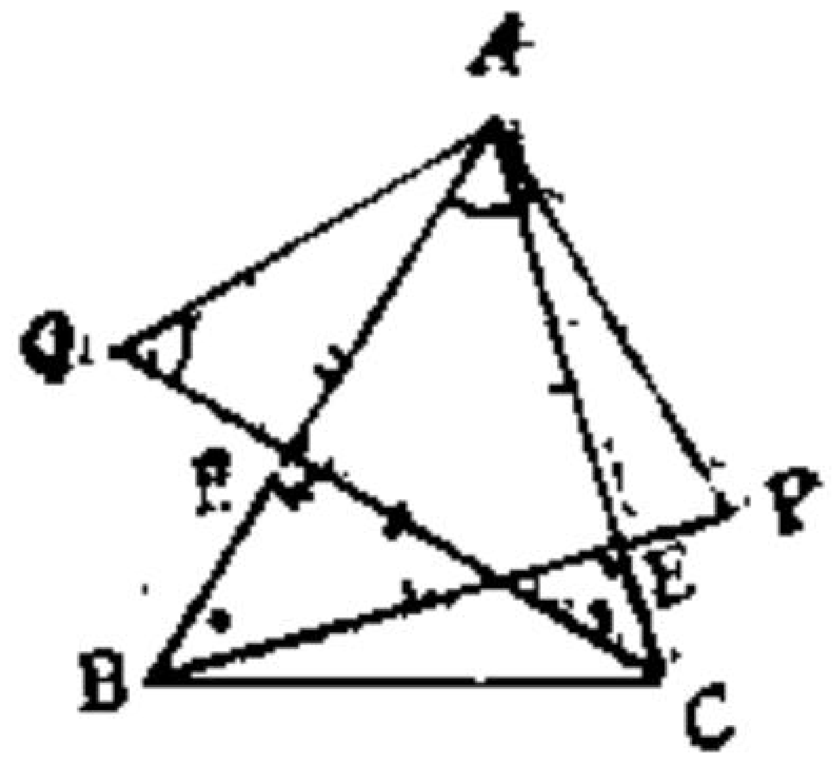


图13—11

12．设$\odot O$与$\odot O'$外切于P，一条外公切线各切$\odot O$、$\odot O'$于M、

N. 今过 P 任作一直线各交⊙O、⊙O' 于 A、B.

求证：$AM \perp BN$.

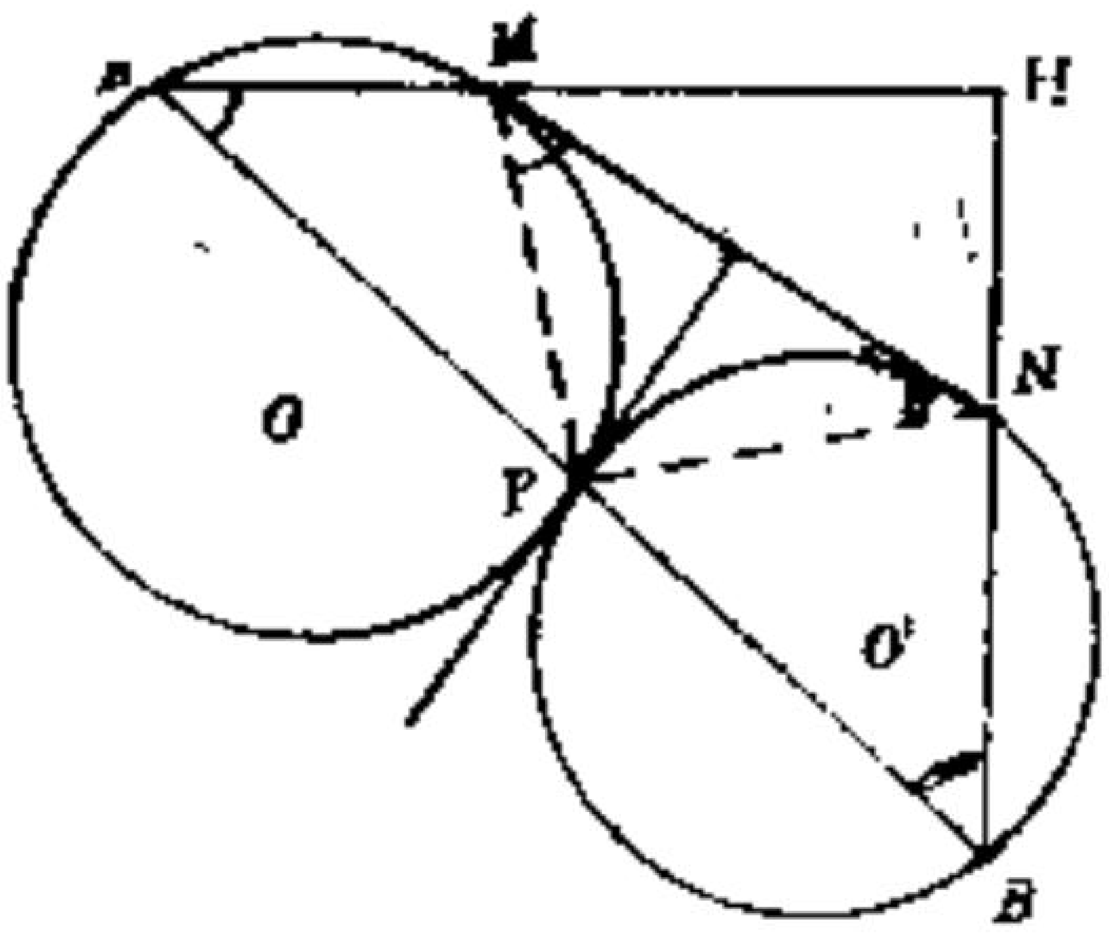


图13—12

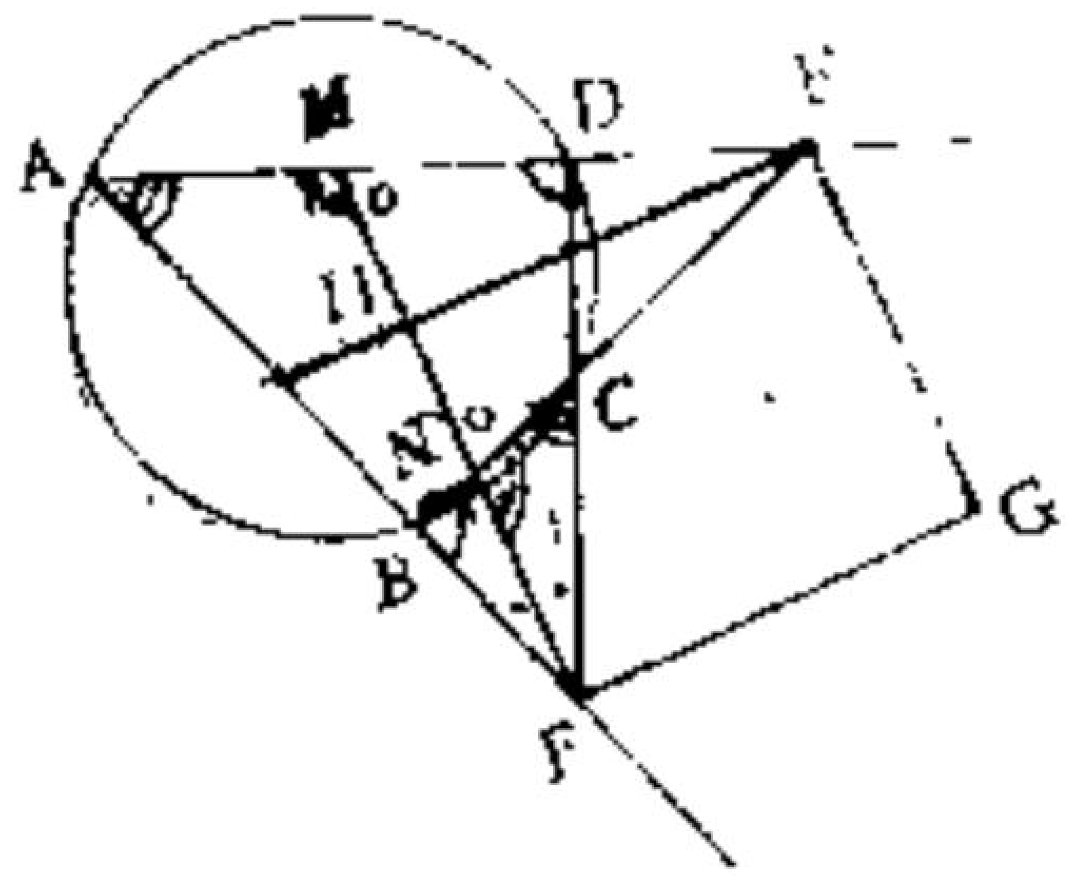


图13—13

提要：(1)：$\angle PMN + \angle PNM = 90^\circ$

(2)：$\angle PMN = \angle PAM$，$\angle PNM = \angle PBN$.

13.设作一圆内接四边形每双对边所在直线的交角平分线，则所作四线交成一个矩形.

提要：(1)：由 $\triangle FBN \backsim \triangle FDM$，得 $\triangle EMN$ 为等腰三角形；(2)：$EH \perp MN$.

14.圆上四点两两连成四个三角形，它们的内心是一个矩形的顶点.

证(1)：由习题二第21题(1)有 $\angle AI_1B = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ACB$.

$\angle AI_2B = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADB$.

$\because \angle ACB = \angle ADB$

$\therefore \angle AI_1B = \angle AI_2B$.

故 A、I_2、I_1、B 四点共圆.

同理，B、I_1、I_4、C 四点共圆.

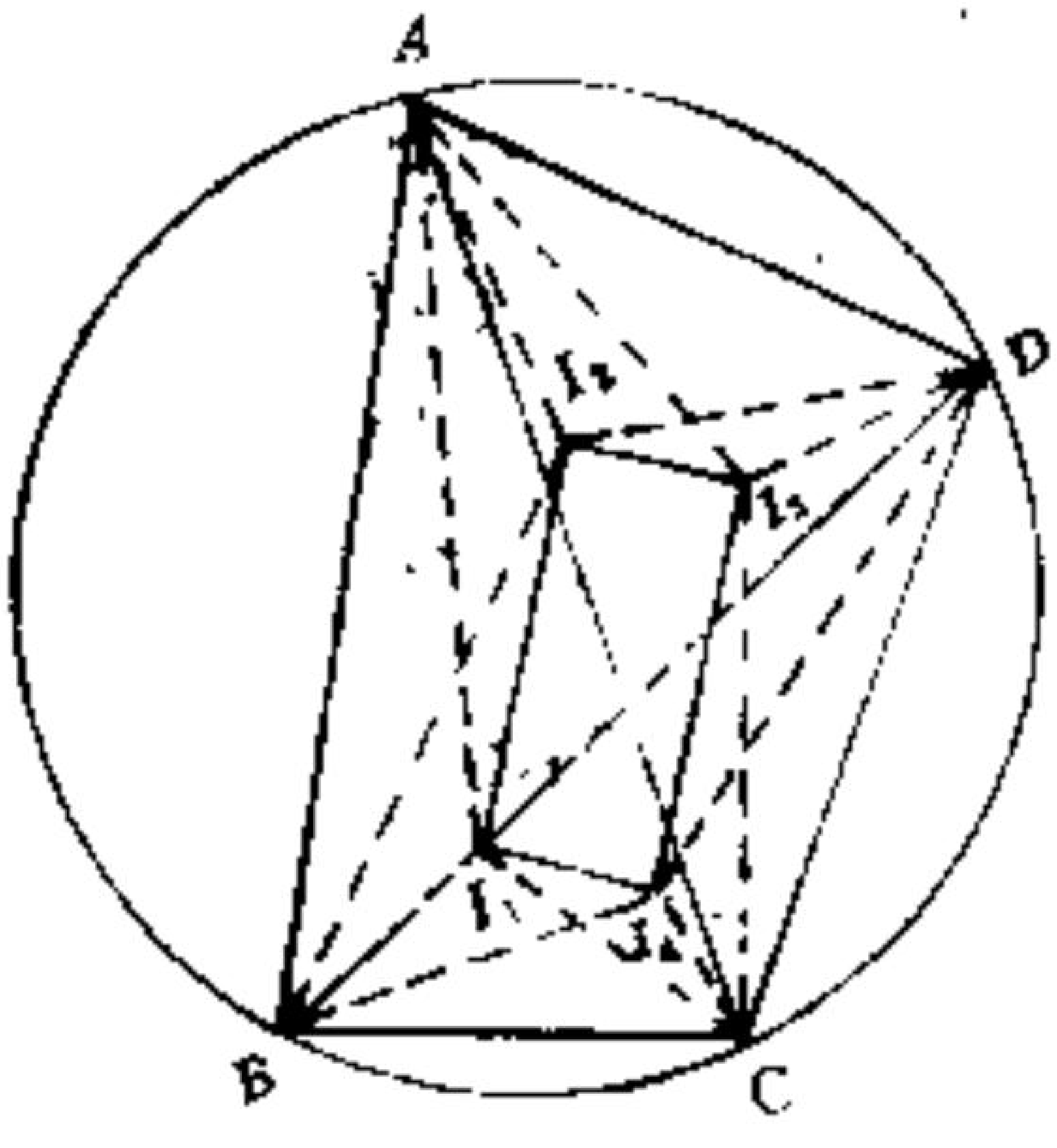


图13—14

(2)：$\angle I_2I_1I_4=\angle I_2AB+I_4CB$

$$=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=90^\circ$$

15.在四边形 $ABCD$ 中，设 $AD\neq BC$，今内、外分 AB 边于 E、F；又内外分 CD 边于 G、H，使

$\frac{EA}{EB}=\frac{FA}{FB}=\frac{GD}{GC}=\frac{HD}{HC}=\frac{AD}{BC}$，求证：$EG\perp FH$。

证(1)：由 $\triangle BPE\backsim\triangle BDA\backsim\triangle BQF$，有 $PE\parallel DA\parallel QF$，可得 $PE=DA\cdot BP/BD$。

由 $\triangle DPG\backsim\triangle DBC\backsim\triangle DQH$，有 $PG\parallel BC\parallel QH$，

可得 $PG=BC\cdot PD/DB$。

而 $BC\cdot PD=DA\cdot BP$，

$\therefore$ $PE=PG$，$QF=QH$。

(2)：$ER\parallel FQ$，$PG\parallel QH$，

$\therefore$ $\angle RPG=\angle FQH$，

即 $\angle EPG+\angle FQH=180^\circ$。

于是 $\angle PEG+\angle PGE+\angle QHF+\angle QFH=180^\circ$。

$\therefore$ $\angle PEG+\angle QFH=90^\circ$。

由于 $\angle K=\angle EGH-\angle KHG$

$=(\angle C+\angle PGE)$

$-(\angle QHC-\angle QHF)$

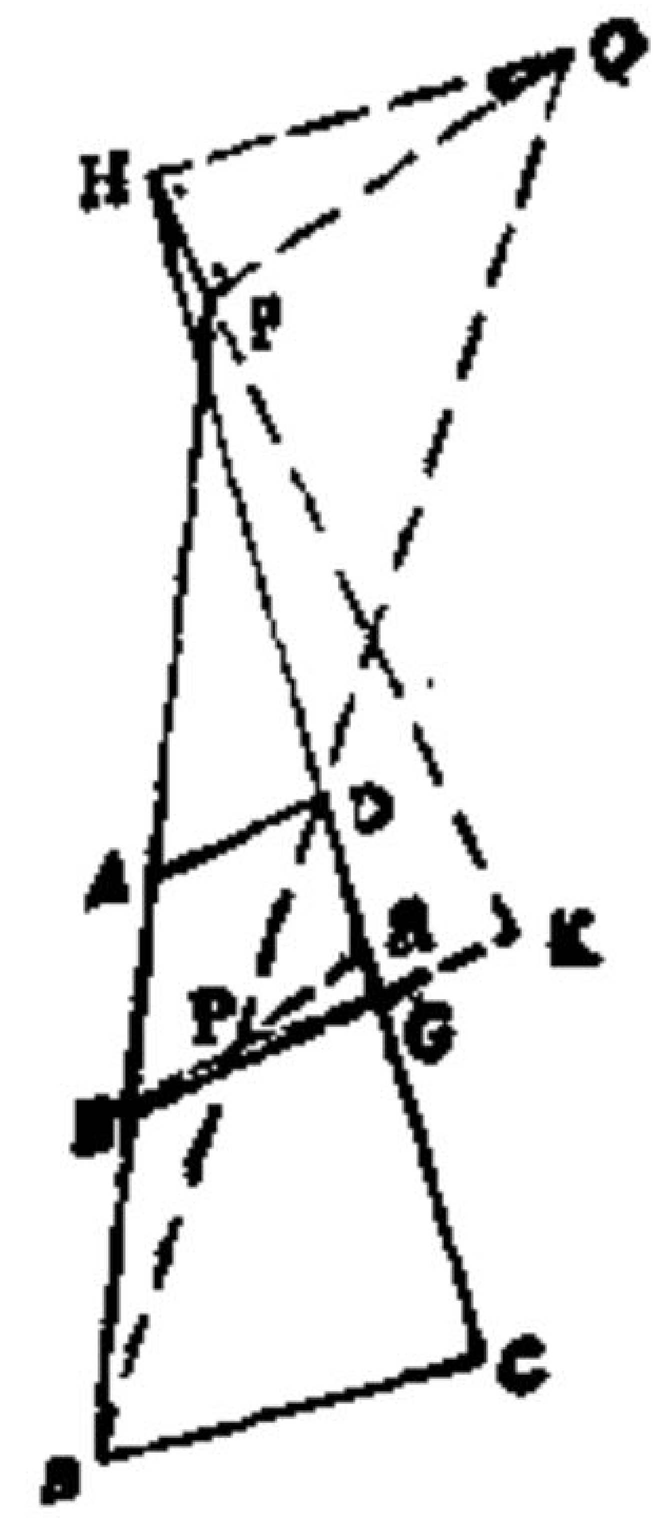


图13—15

$=\angle PGE+\angle QHF=\angle PEG+\angle QFH=90^\circ$。

$\therefore$ $EG\perp FH$。

16.设自三角形的一高线足引线垂直于他二高线，则二垂足的连线平行于他二高线足的连线。

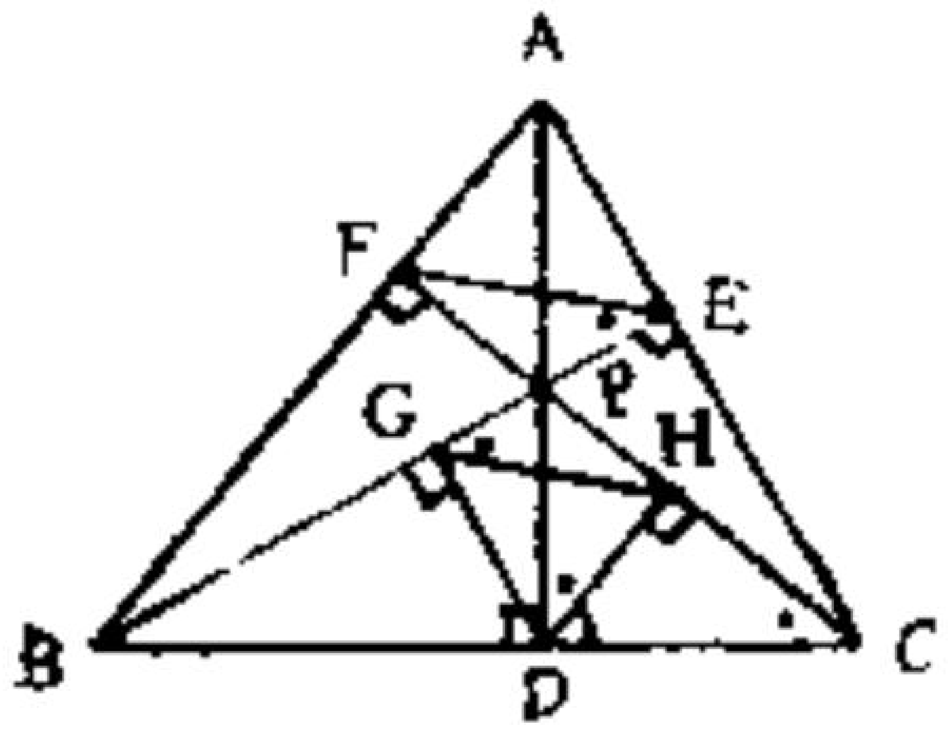


图13—16

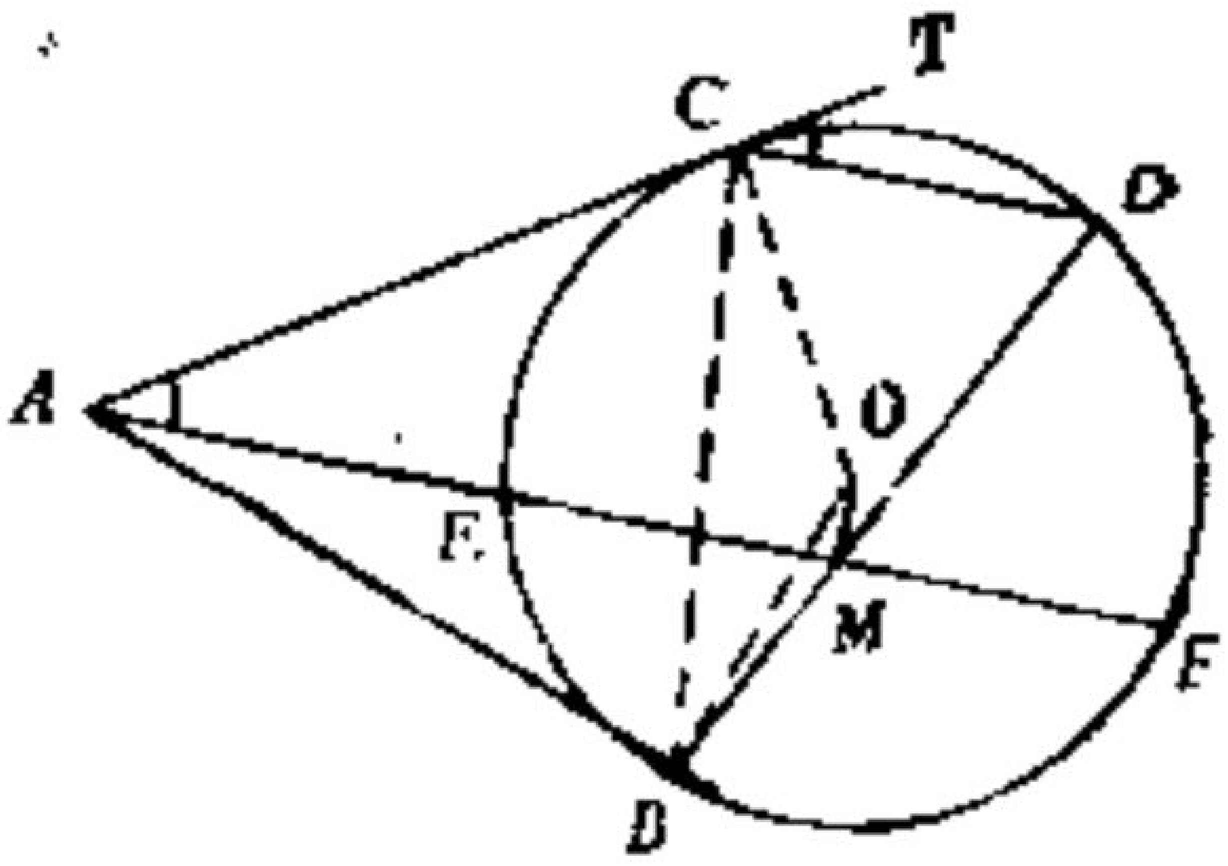


图13—17

提要（1）：B、C、E、F及G、D、H、P均四点共圆；

（2）：$\angle PDH$及$\angle DCH$均与$\angle HDC$互余．

17．设切线AB、AC切圆于B、C割线AEF交圆于E、F，弦BD平分弦EF，则$CD/\!/EF$．

提要（1）：$\angle TCD=\angle CBD$；

（2）：C、A、B、M在以OA为直径的圆上．

18．P是$\odot ABC$上一点，PA'、PB'、PC'分别是平行于BC、CA、AB的弦．求证：$AA'/\!/BB'/\!/CC'$．

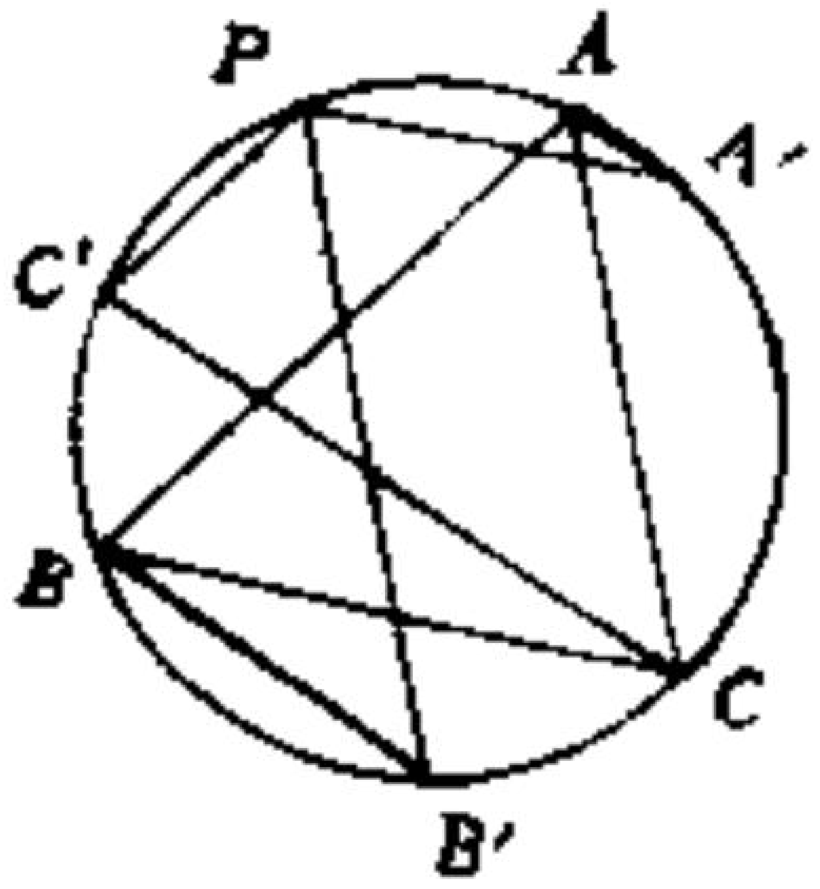


图13—18

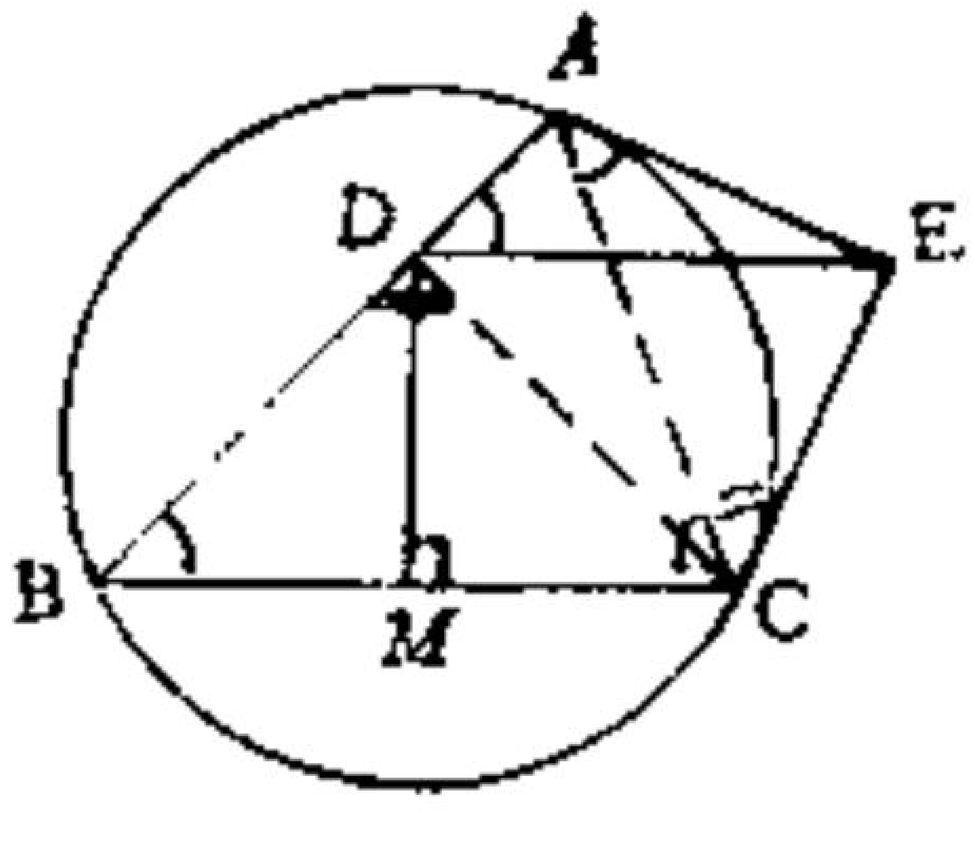


图13—19

提要：$\overset{\frown}{B'C}=\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{BC'}$．

19．在$\triangle ABC$中，设BC边的中垂线交直线AB于D．自A、C所作$\odot ABC$的切线交于E，则$DE/\!/BC$．

提要（1）：A、D、C、E四点共圆；

（2）：$\angle ADE=\angle ACE=\angle ABC$．

20. 在 $\triangle ABC$ 中，A 角的平分线交 BC 于 D. 自 A 所引 $\odot ABC$ 的切线与自 D 所引 AB 的平行线交于 E. 求证：$ADCE$ 是一个等腰梯形.

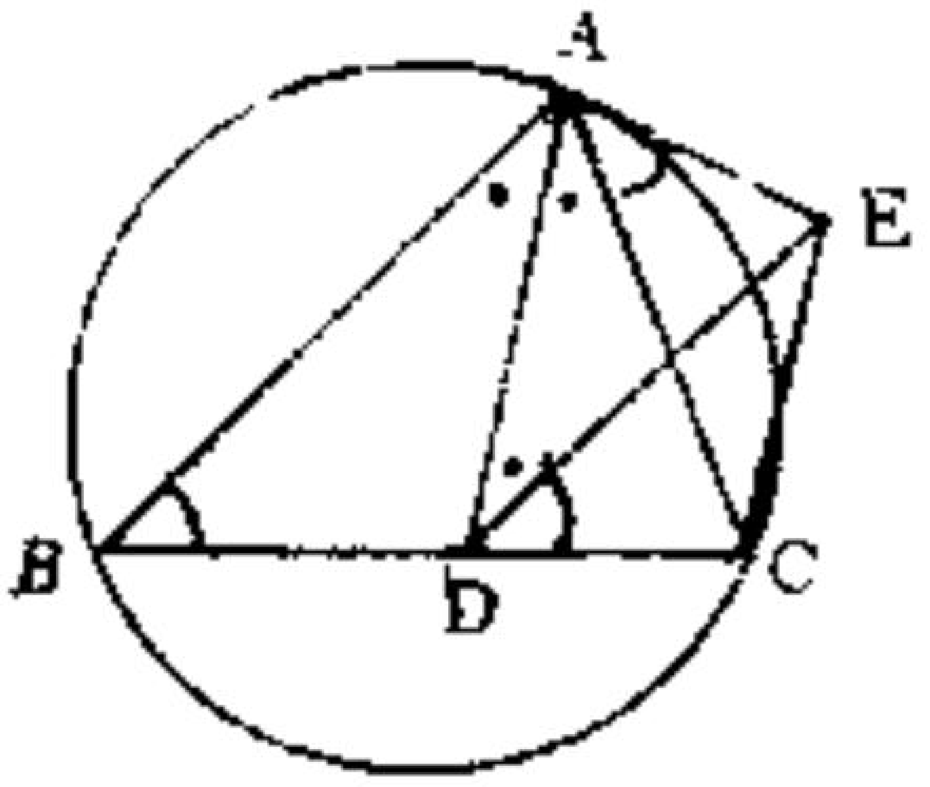


图 13—20

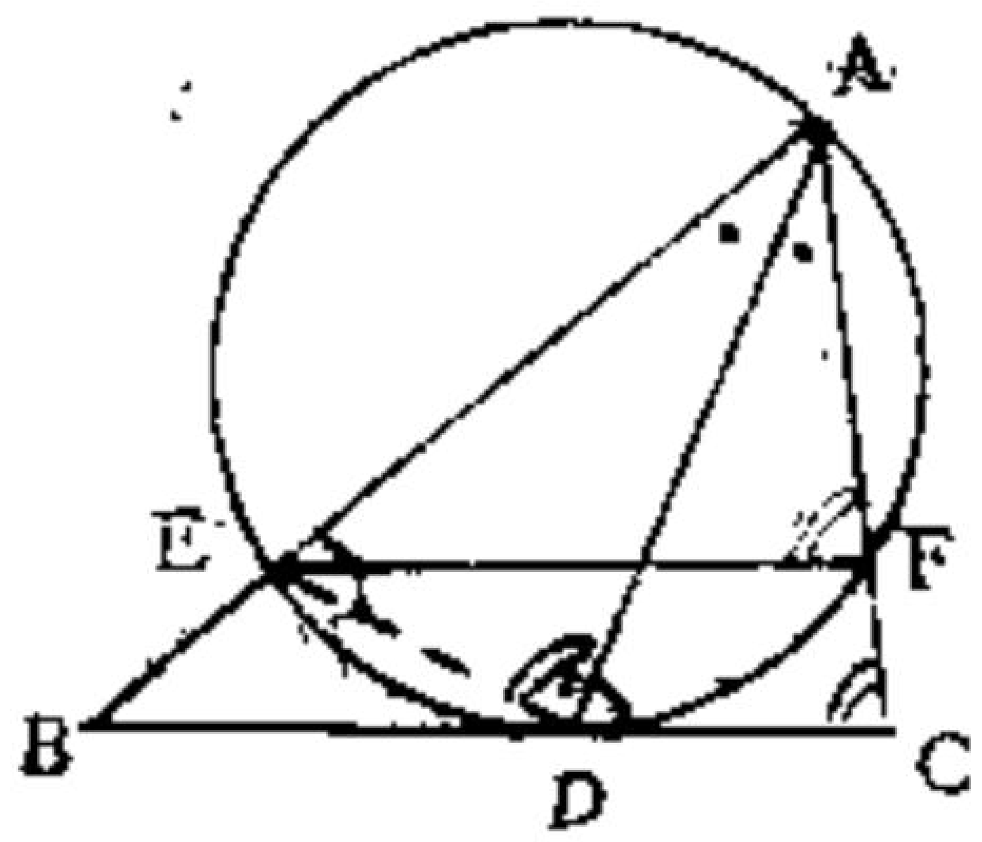


图 13—21

提要（1）：$\angle EAC = \angle B = \angle EDC$，故 A、D、C、E 共圆；

（2）：$\angle ADE = \angle DAB = \angle DAC = \angle DEC$.

21. 在 $\triangle ABC$ 中，A 角的平分线交 BC 于 D. 今过 A 作一圆，切 BC 于 D 而交 AB、AC 于 E、F. 求证：$EF \parallel BC$.

22. 以 $\triangle ABC$ 的 AB、AC 边为底，向外侧各作等腰三角形 $\triangle EAB$、$\triangle FAC$. 又以 BC 边为底向内侧作等腰三角形 $\triangle DBC$. 若所作等腰三角形均彼此相似，则 A、F、D、F 是一个平行四边形的顶点，或同在一直线上.

提要（1）：$\dfrac{EB}{BA} = \dfrac{DB}{BC} = \dfrac{FA}{AC}$；

(2) ∵ $\triangle EFD \backsim \triangle ABC$,

有 $\frac{ED}{FB}=\frac{AC}{AB}$. 又 $\frac{FA}{FB}=\frac{AC}{AB}$,

∴ $ED=AF$.

当等腰三角形底角取 $\theta=90^{\circ}-\frac{1}{2}\angle A$ 时，A、E、D、F在同一条直线上.

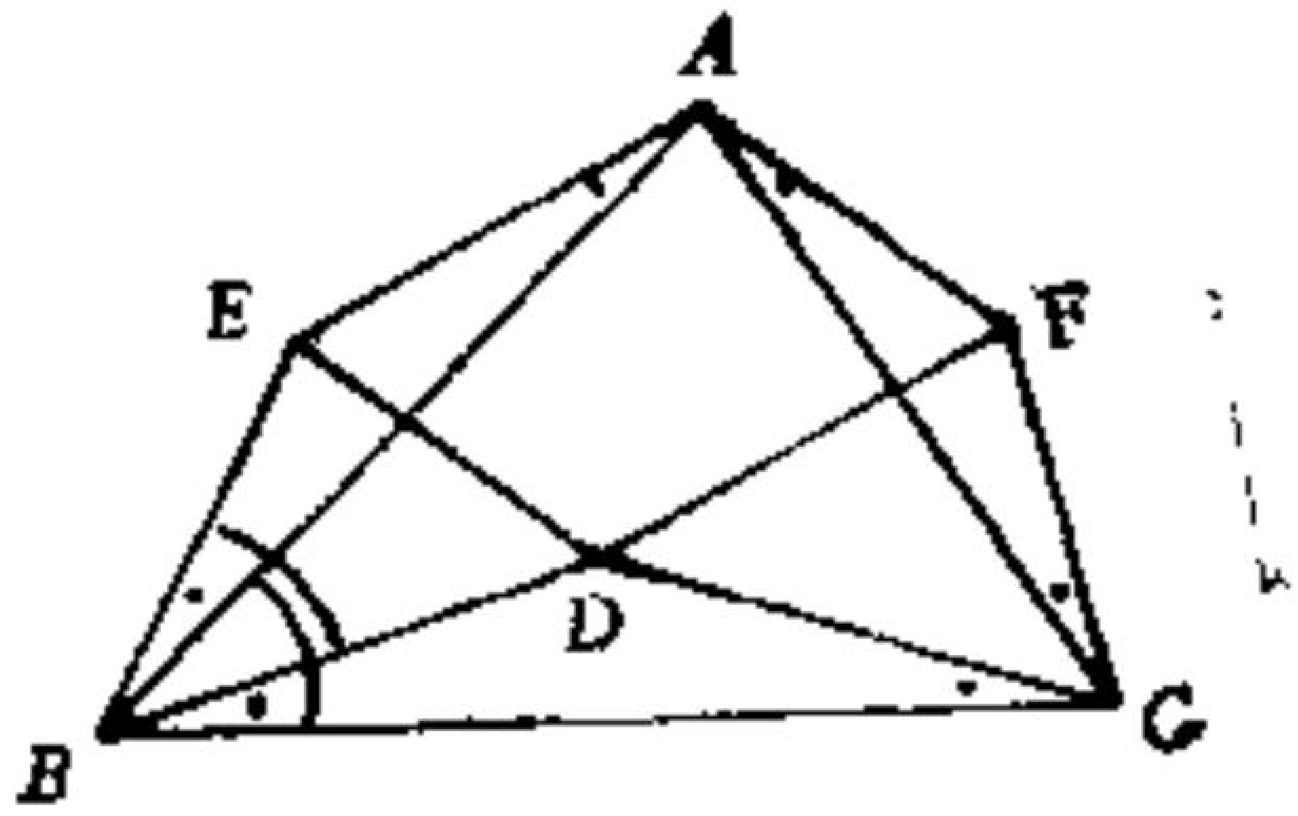


图 13—22

23. 四边形 $ABCD$ 内接于一圆，作这圆的弦 AE 及 BF. 若 $AE\parallel BD$ 且 $BF\parallel AC$，则 $EF\parallel CD$.

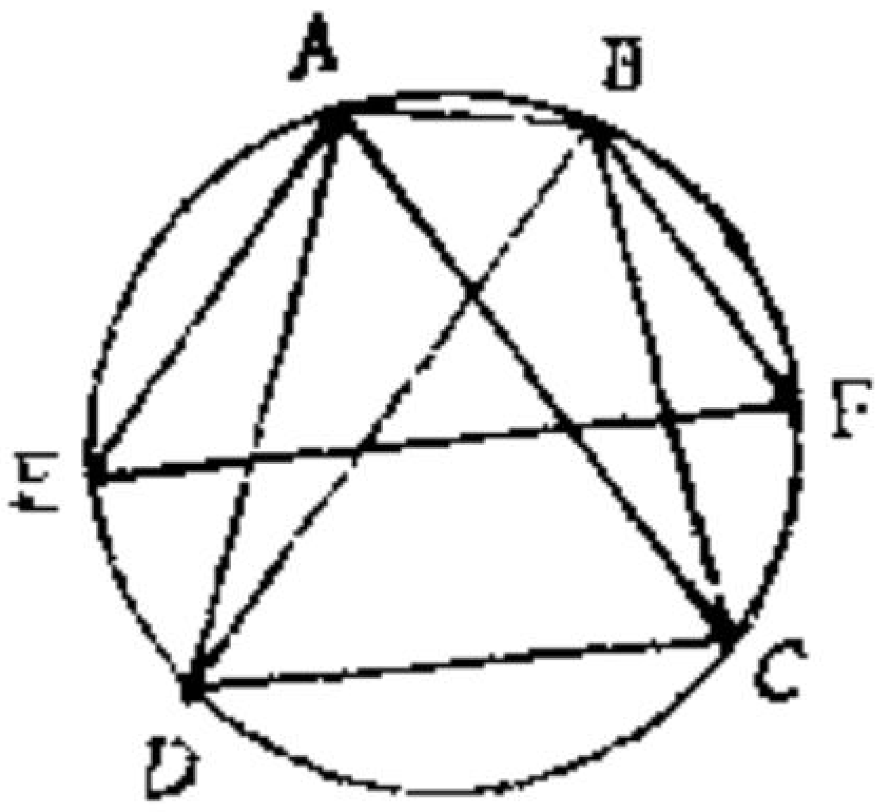


图 13—23

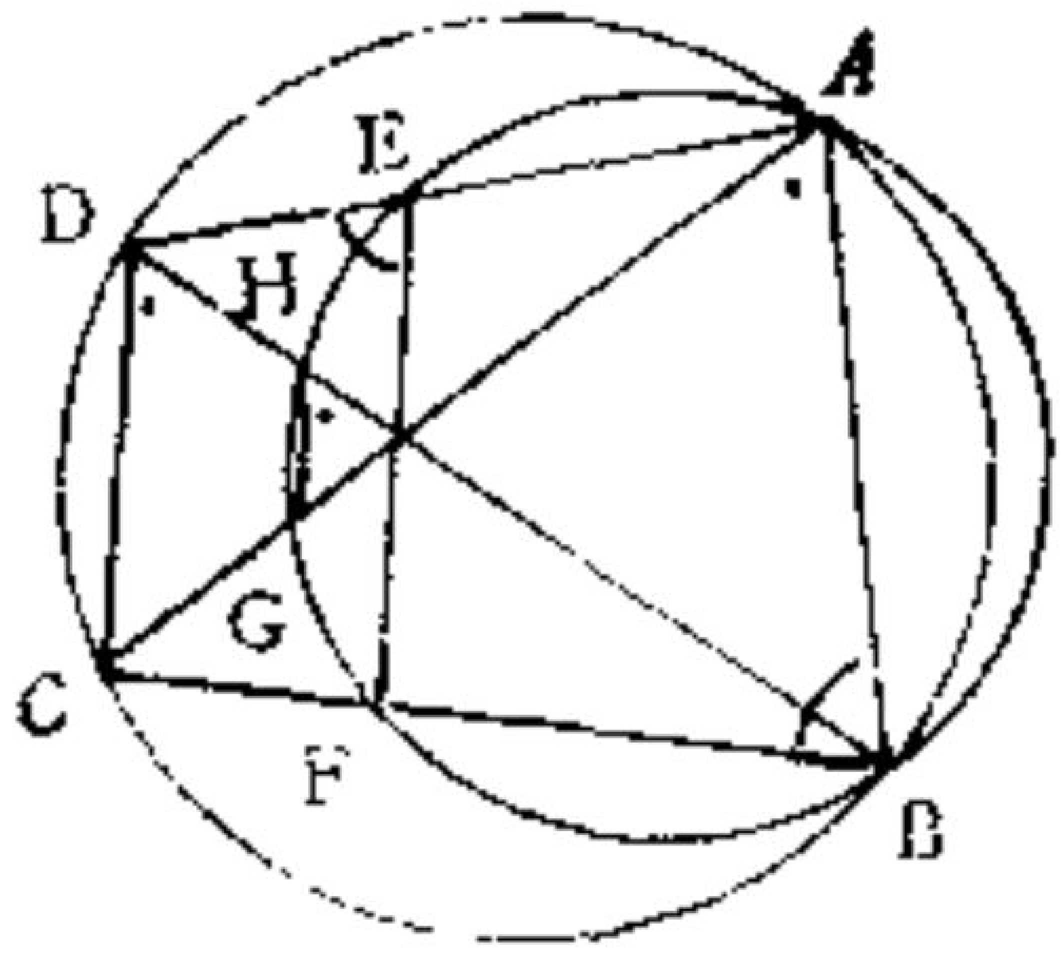


图 13—24

提要：$\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CF}$.

24. $ABCD$ 是圆内接四边形. 过A、B两点任作一圆，设交直线 AD、BC、AC、BD 于 E、F、G、H，则 $CD\parallel EF\parallel GH$.

提要：$\angle DEF$ 与 $\angle ABC$ 均与 $\angle ADC$ 互补.

25. 承上题. 设 BE 与 AC、AF 与 BD、EG 与 AD、AH 与 BC 交于 E'、F'、G'、H'，则 $CD\parallel E'F'\parallel G'H'$.

提要（1）：$\widehat{EH}=\widehat{FG}$，

$\angle E'BF'=\angle E'AF'$.

A、B、F'、E' 四点共圆.

$\angle F'E'B=\angle F'AB$

$=\angle FEB$.

（2）：

$\angle G'AH'=\angle G'BH'$，A、B、H'、G' 共圆. 有 $\angle G'H'B=\angle DCB$.

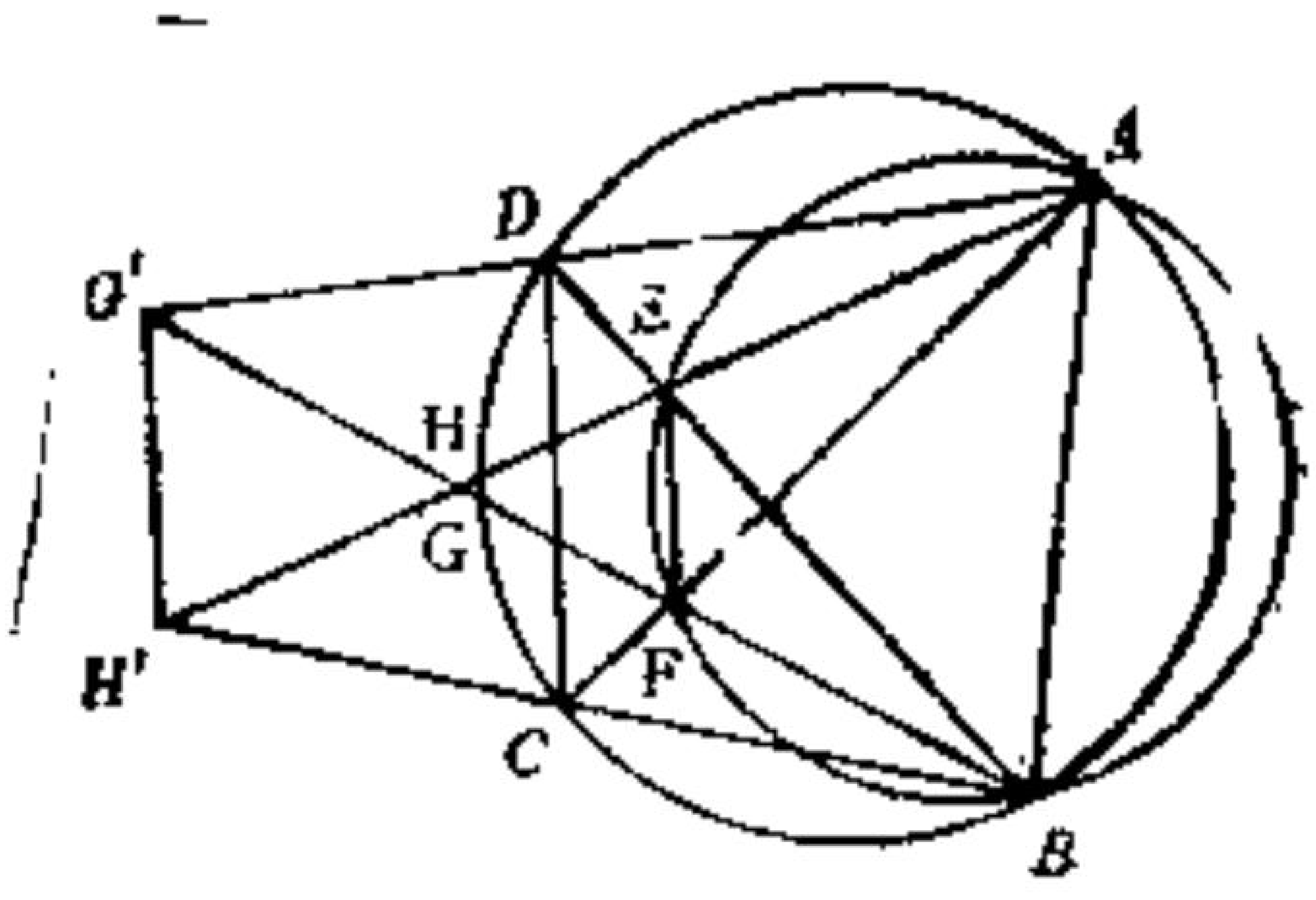


图 13—25

26. 过▱$ABCD$ 的对顶点 A、C 任作一圆，设交直线 AB、BC、CD、DA 于 E、F、G、H，则 $EF\parallel GH$.

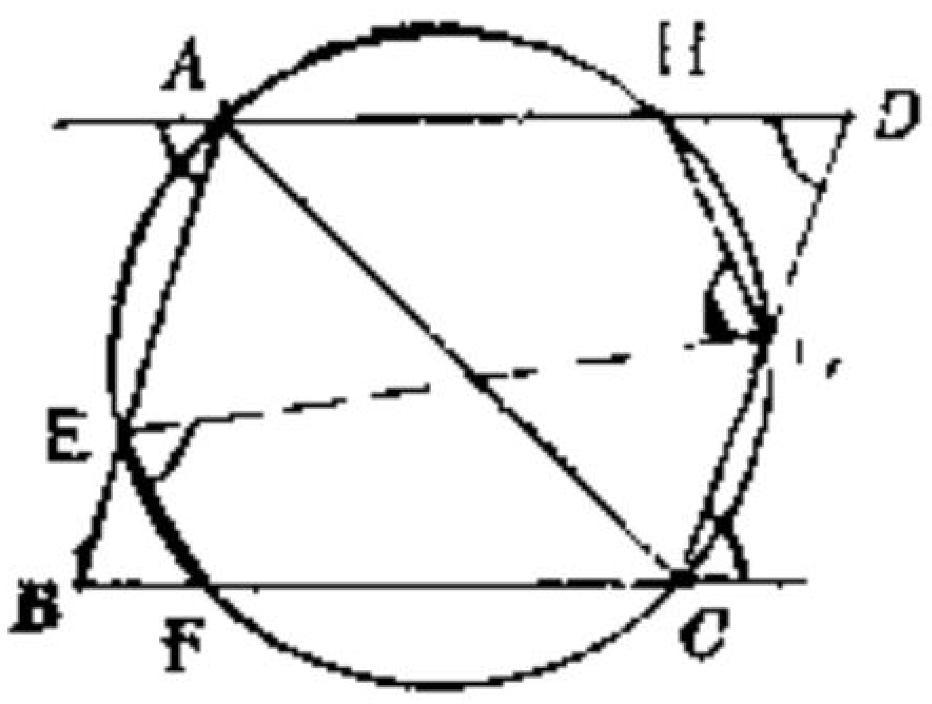


图 13—26

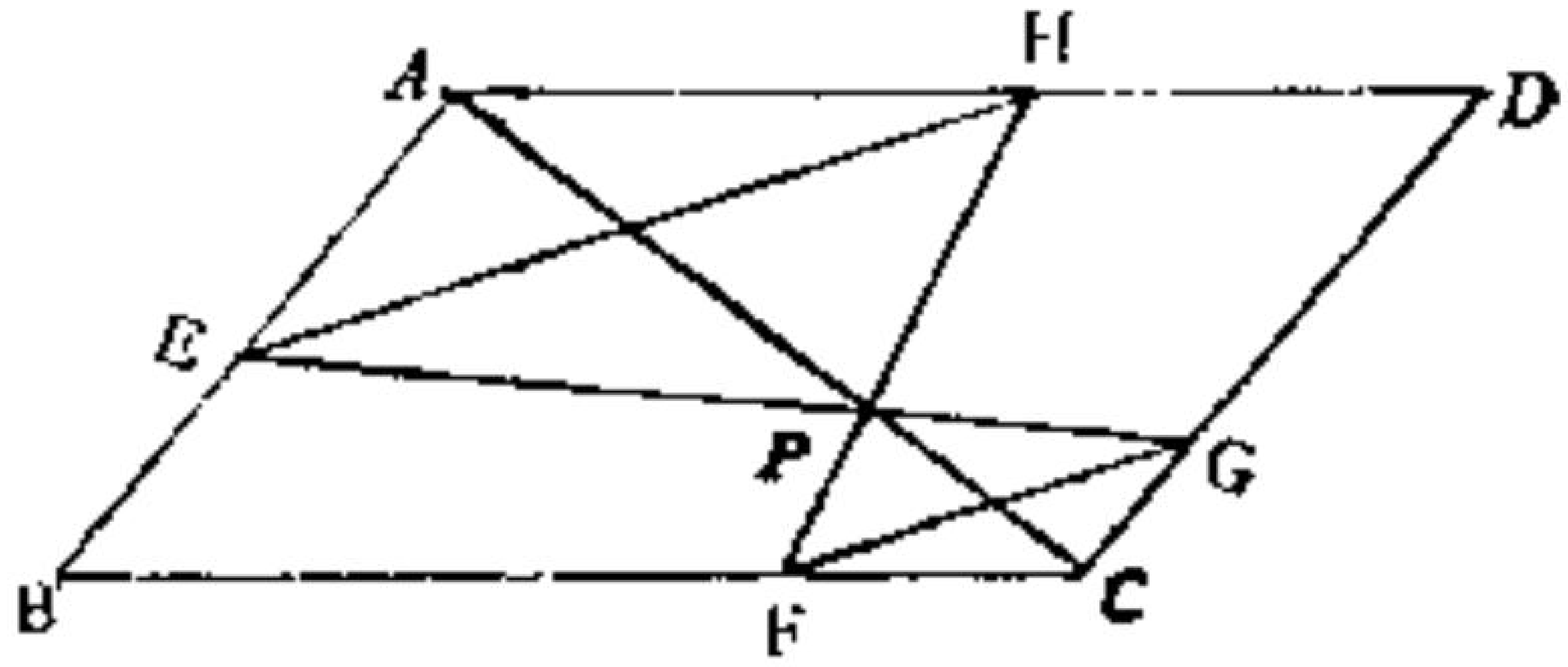


图 13—27

提要：A、H、E、G 及 C、F、E、G 均四点共圆.

27. $ABCD$ 是平行四边形. 过直线 AC 上任一点 P 任作两直线. 设一交直线 AB、CD 于 E、G；一交直线 BC、DA 于 F、H，则 $EH\parallel FG$.

证：由 $\triangle PAH\backsim\triangle PCF$ 与 $\triangle PAE\backsim\triangle PCG$，

可得 $\dfrac{PF}{PH}=\dfrac{PG}{PE}$，　　$\therefore$ $EH\parallel FG$.

28. $ABCD$ 是平行四边形，设 $EF\parallel AB$，AF 与 BF、DE

与CF相交于G、H，则$GH\parallel AD$．

证：∵ $EF\parallel AB\parallel CD$，

∴ $\frac{HD}{HE}=\frac{DC}{EF}=\frac{AB}{EF}=\frac{GA}{GE}$

故 $GH\parallel AD$．

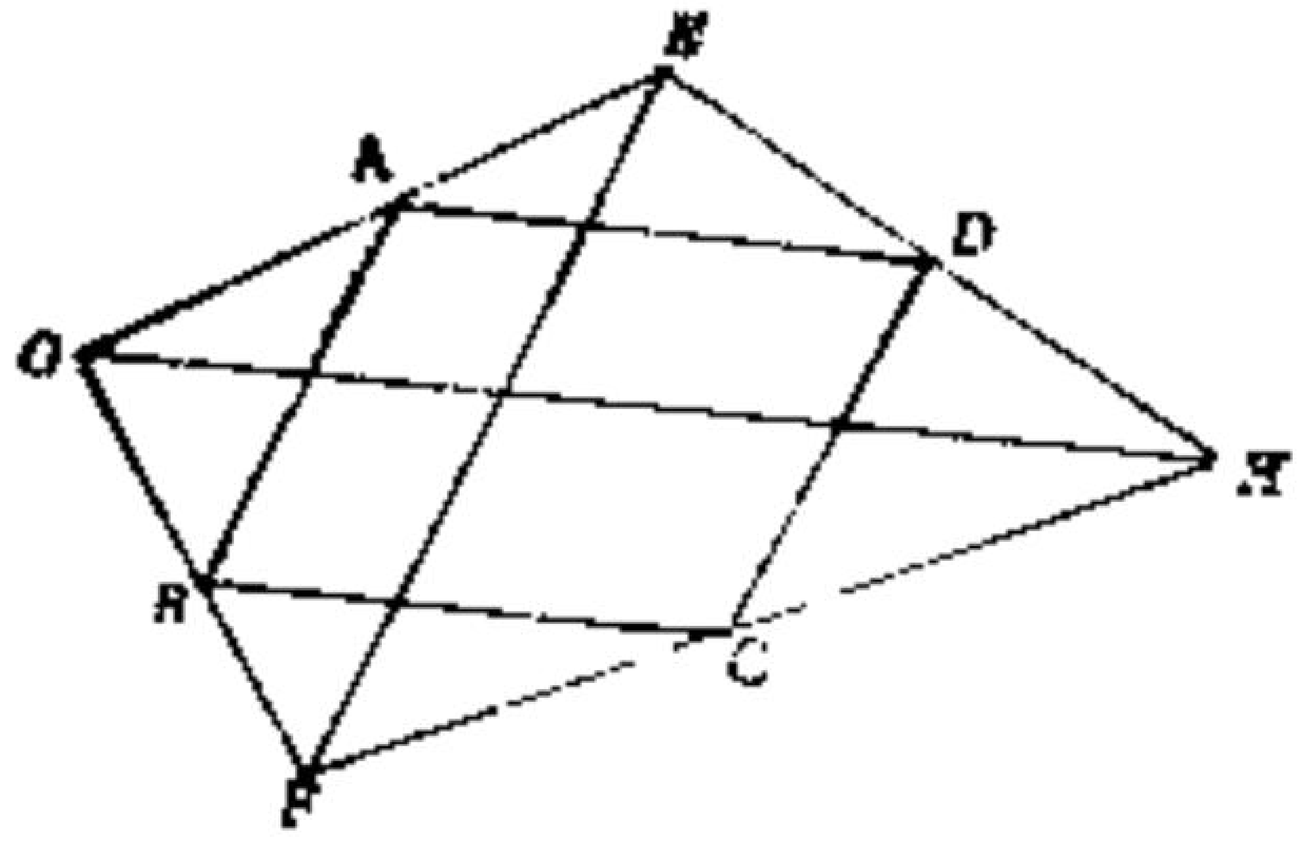


图13—28

第五节　共线点　习题十四

1．自圆上一点引三弦，并以它们各为直径画圆。求证：所画三圆的其他三交点共线。（Salmon定理）

证(1)：$\angle PXC$与$\angle PXB$均为直角，故B、X、C三点共线；C、Y、A；Z、A、B均共线；

(2)：X、Y、Z是P在$\triangle ABC$三边上的射影，故三点共线。即例题34的西摩松线。

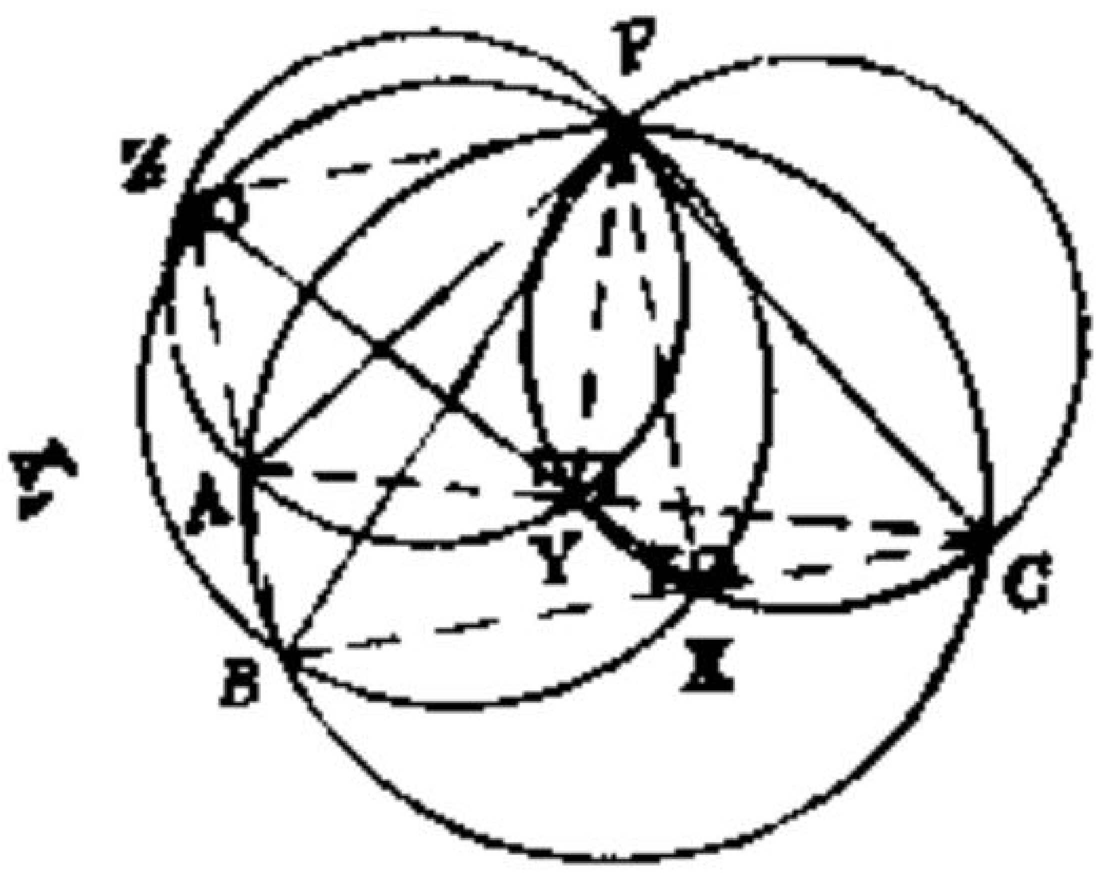


图14—1

2．三角形一边上的高线足在他两边及他两高线上的射影凡四点共线。

证：B、D、P、F及P、D、Q、H均四点共圆。又$AB\parallel QD$、

$\angle FPB=\angle FDB=\angle BAD=\angle ADQ$

$=\angle HPQ$．

∴ F、P、Q共线。

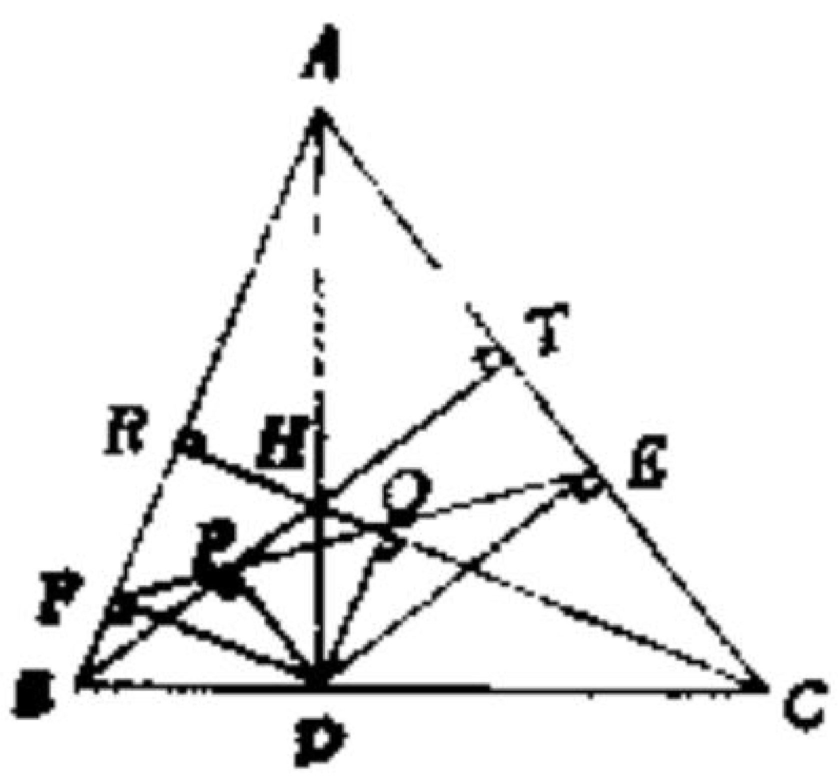


图14—2

3．设AD是$\triangle ABC$的高，H是垂心。若在直线BC上

有两点P、Q、合于$DP/DQ=DB/DC$，则P在AC、CH上的射影及Q在AB、BH上的射影凡四点共线。

证(1)：设PM交AD于R，则PR BH.

有$\frac{DQ}{DC}=\frac{DP}{DB}=\frac{DR}{DH}$

故$QR\perp AB$.

得PM、QI、AD共点于R. 同理PN、QK、AD共点于S.

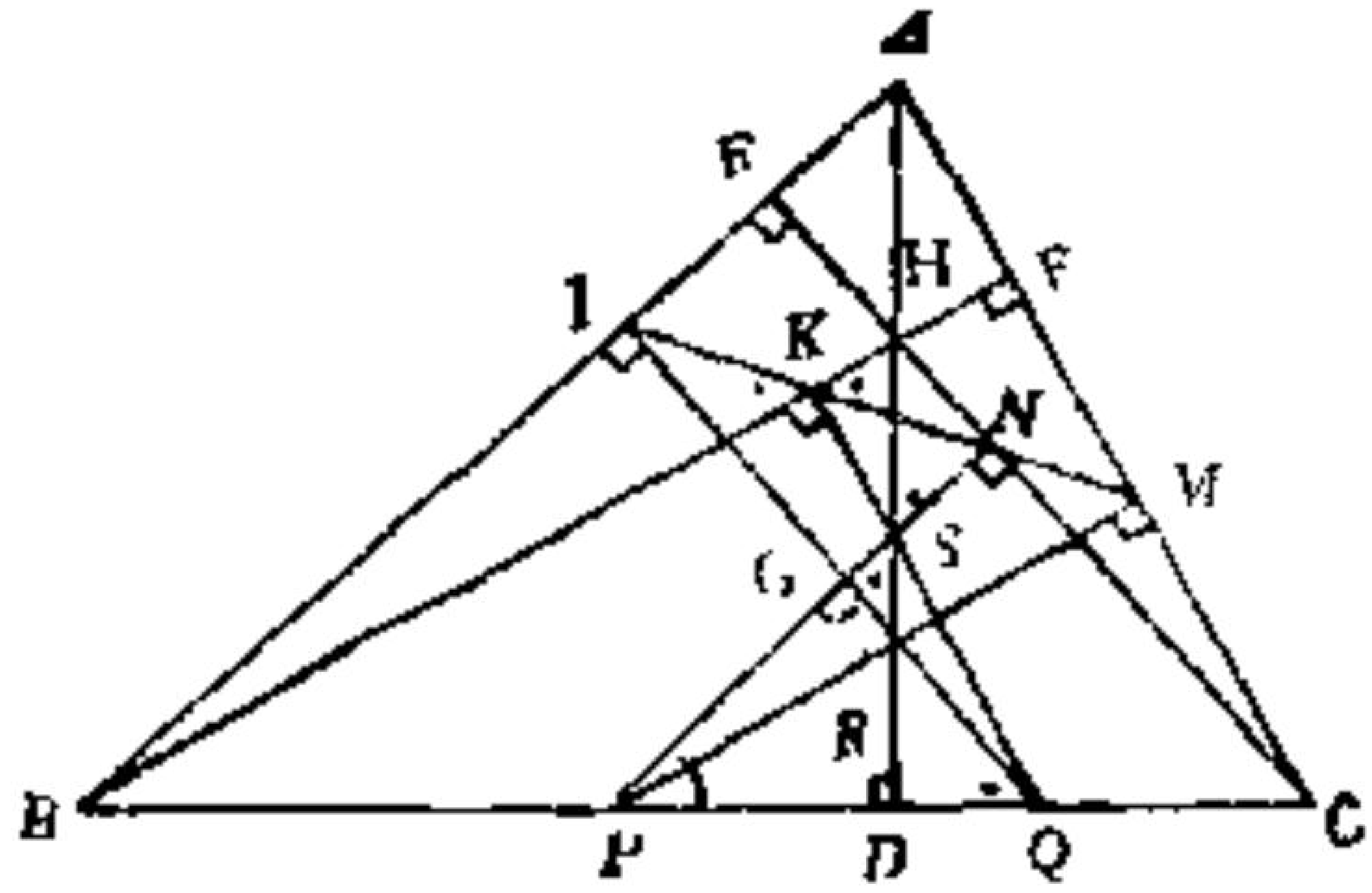


图14—3

(2)：$\angle BKI=\angle BQI=\angle PSD=\angle HSN=\angle HKN$.

4. 设AD是$\triangle ABC$的高，H是垂心。若在直线AD上有两点P、Q，合于$DP:DQ=DB:DC$，则P在AB、BH上的射影及Q在AC、CH上的射影凡四点共线。

证(1)：　PN交BC于I.

则PI AC,

$\therefore\quad \frac{DP}{DA}=\frac{DI}{DC}$,

即　$DP\cdot DC=DA\cdot DI$.

由题设$DP\cdot DC=DQ\cdot DB$,

$\therefore\quad DA\cdot DI=DQ\cdot DB$.

故有QI AB，因而QI HC.

$\therefore\quad I$为$\triangle HQC$的垂心.

(2)：$\angle PNM=\angle PBM=\angle KQG=\angle KHI=\angle KNI$.

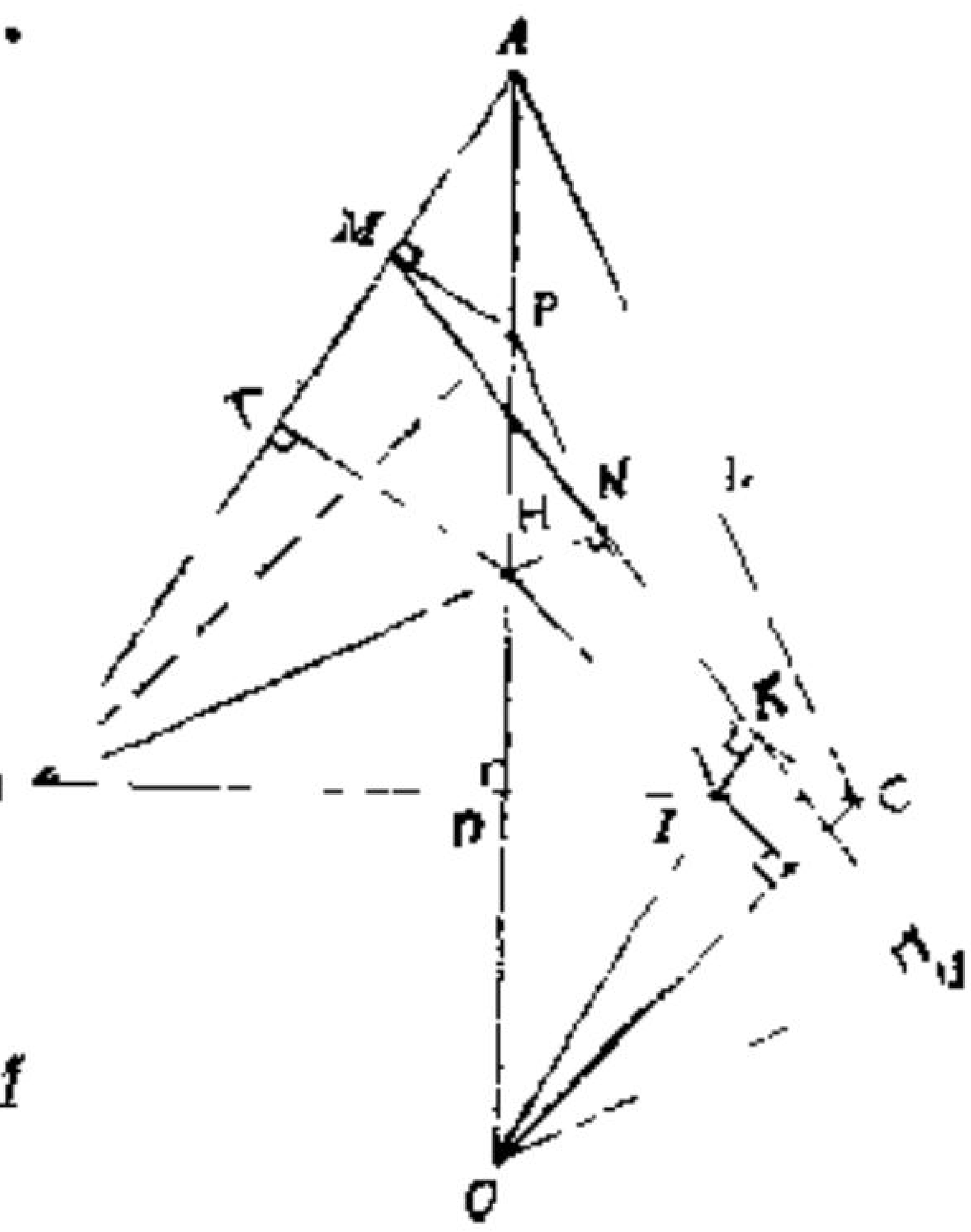


图14—4

即　M、N、K 三点共线。

5．设⊙I 是△ABC 的内切圆，E、F各是 AB、AC 上的切点；又作 $BG\perp CI$ 于 G，$CH\perp BI$ 于H．求证、E、F、G、H 四点共线。

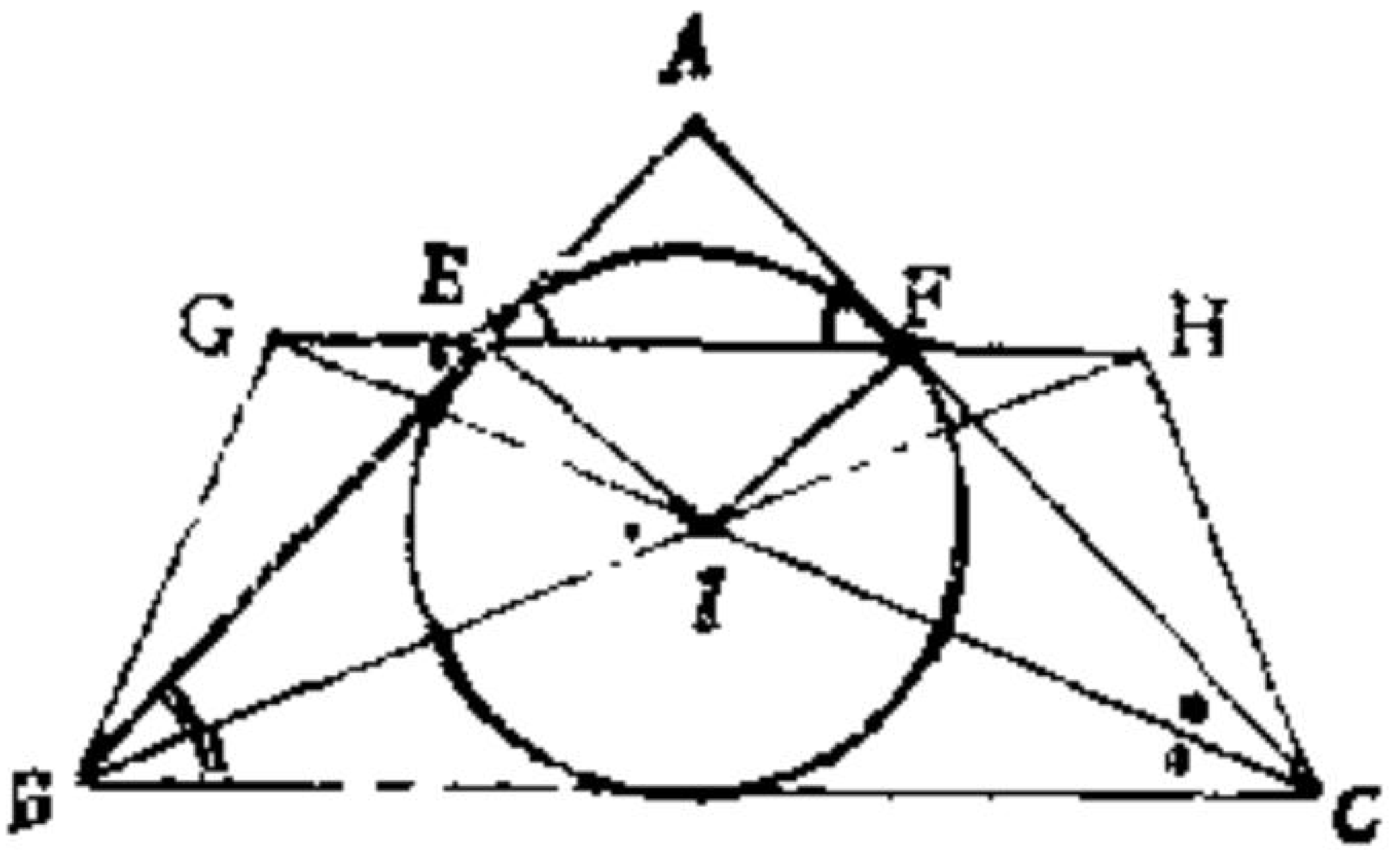


图 14—5

提要：$\angle GEB=\angle GIB=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，

$$\angle AEF=\angle AFE=\frac{1}{2}(180°-\angle A)$$

$$=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C).$$

6．在上题中，若⊙I 是△ABC 的旁切圆则如何？

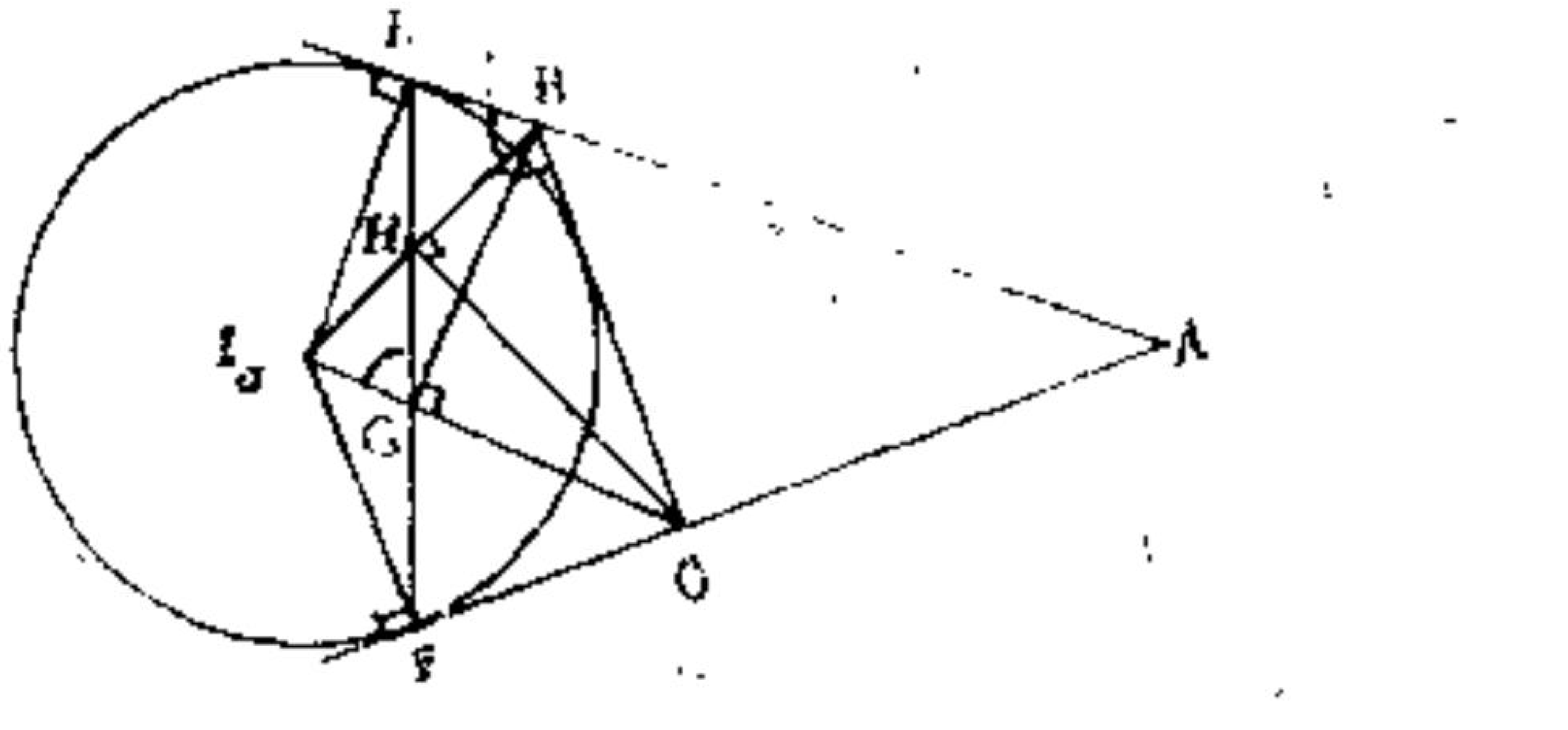


图 14—6

提要：仍成立。$\angle EGI=\angle EBI=\angle IBC=\angle HGI$．

7　设四边形有一角是直角且两对角线相等，则对边的中垂线交点与该直角的顶点共线。

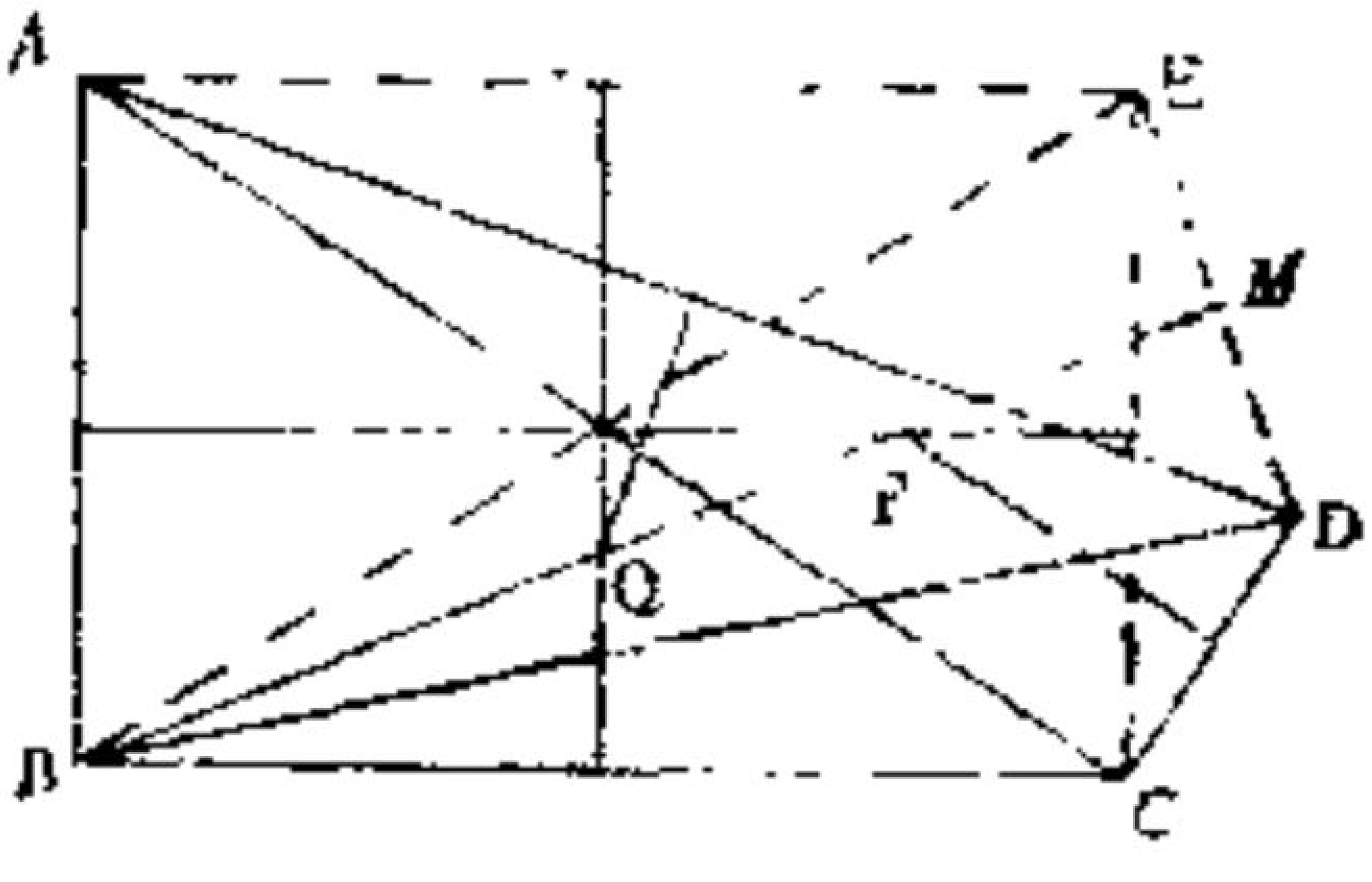


图14—7

证(1)：作矩形 $AFCD$，则 $BE=BD$，$\triangle BDE$ 为等腰三角形，B 点显然在 DE 的中垂线 BM 上；

(2)：两双对边中垂线的交点 P、Q 亦在 BM 上。

8．在圆内接四边形中，设自每边两端所引邻接边的垂线相交，则所得交点与四边形对角线交点及外接圆心共线。

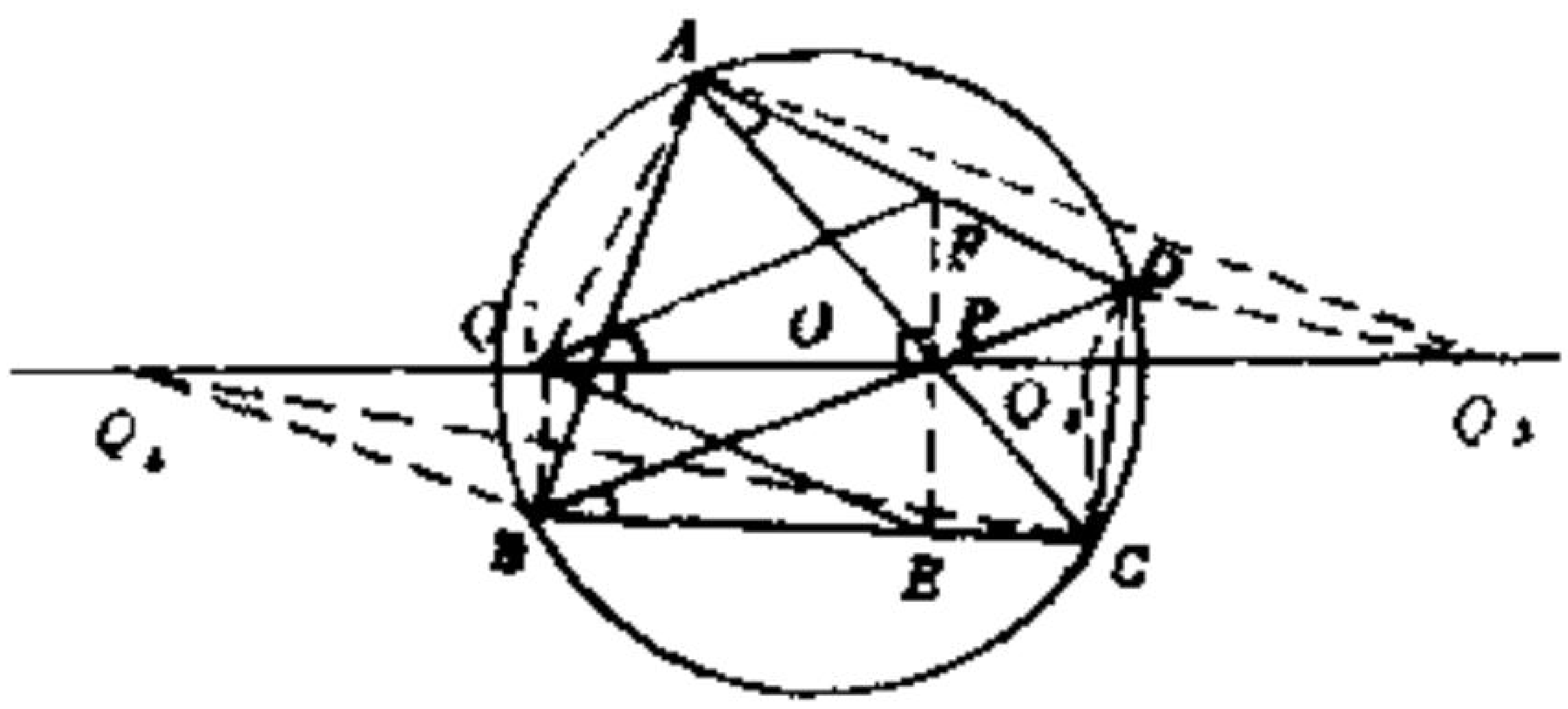


图14—8

提要：(1) 作 $EF\perp OP$，由习题十第24题有 $PE=PF$，故$\triangle Q_1EF$ 为等腰三角形。

(2) 作BC的垂线 BQ_1 使交 OP 于 Q_1，联 Q_1A 有 Q_1、B、E、P 四点共圆。

$\therefore\ \angle PQ_1F=\angle PQ_1E=\angle PBE=\angle PAF$.

故 Q_1、P、F、A 四点共圆，得$\angle Q_1AF$为90°，故 Q_1 为符合条件的点。

9．圆上四点两两连成四个三角形，它们的内心、旁心合计十六点，分配在八条直线上，每线上四点，而这八线是两组互相垂直的平行线，每组含四线。（Fuhrmann定理）

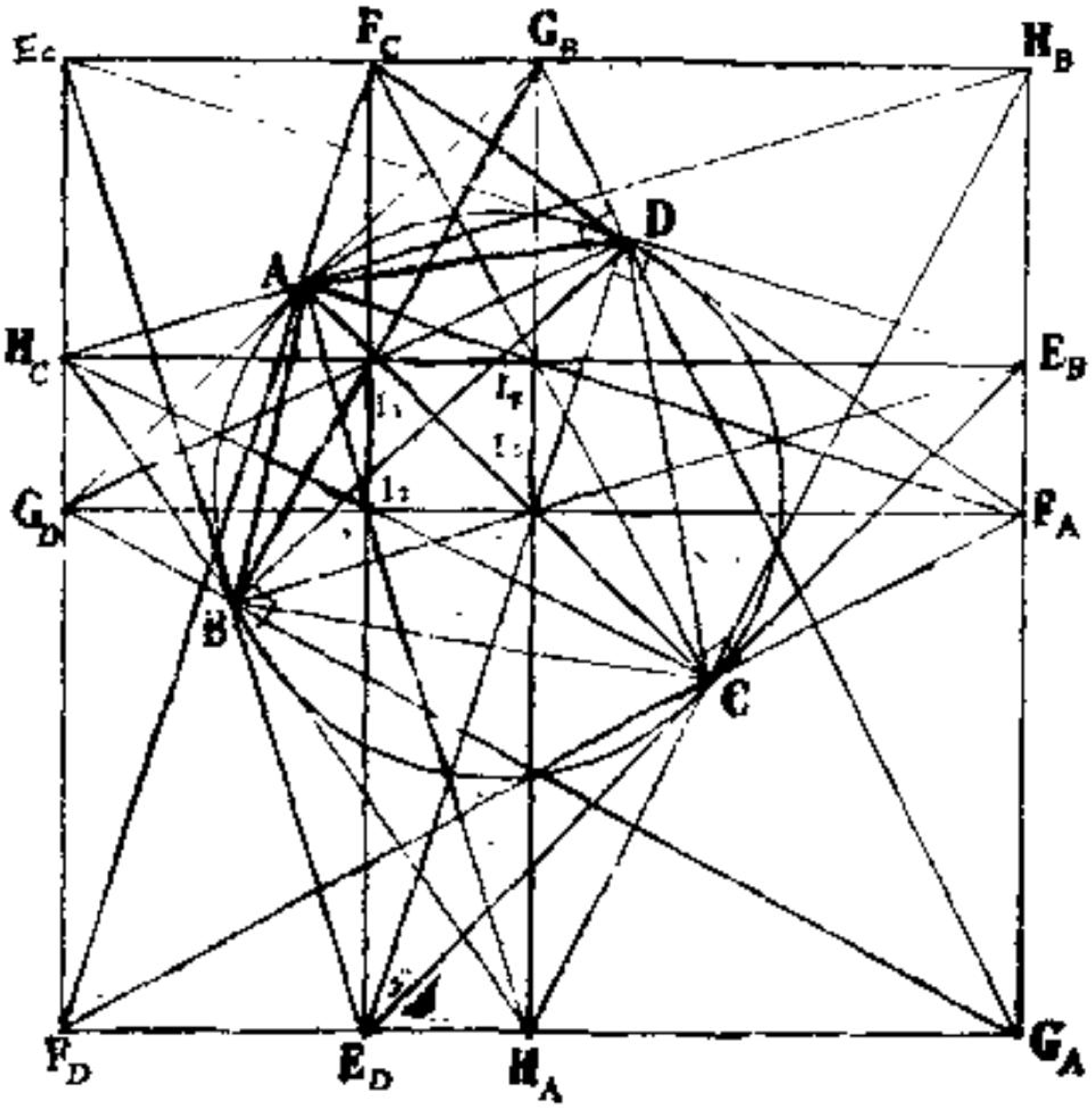


图14—9

证(1)：I_1、I_2、I_3、I_4 为四个三角形的内心，其有关三角形的旁心分别用 G、H、E、F 表示。与$\angle A$有关的三个旁心分别表示为 F_A、H_A、G_A.

由习题十三第14题知，$I_1I_2I_3I_4$ 为矩形，且有 B、C、I_2、I_3，C、D、I_3、I_4 各四点共圆。

又 $I_3C\perp E_DE_B$，$I_3D\perp E_BE_C$．有 D、I_4、I_3、C、F_A、E_B 六点共圆，∴ $\angle I_3I_4E_B=\angle I_3DE_B=90^\circ$．

故 I_1、I_4、E_B 共线，同理可得 I_1、I_4、E_B、H_C 四点共线：

(2)：$\angle BI_1D=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$，

$\angle BE_BD=\angle I_3CD=\frac{1}{2}\angle C$，

∴ $\angle BI_1D+\angle BE_BD=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=180^\circ$，

故 B、I_1、D、E_B、G_A 五点共圆。

∴ $\angle I_1E_BG_A=\angle I_1DG_A=90^\circ$.

又 $\angle I_4E_BF_A=\angle I_4I_3F_A=90^\circ$，故 E_B、F_A、G_B 共线，同理可得 E_B、F_A、G_A、H_B 四点共线。

10．设四边形 $ABCD$ 内接于⊙O，且 $AC\perp BD$，则△OAB、△OBC、△OCD、△ODA 的垂心共线。

证(1)：∵ $\angle CH_3D$ 与 $\angle COD$ 互补，由习题三第14题，$\angle AOB$ 亦与 $\angle COD$ 互补，故等腰三角形△OAB 与△H_3CD 相似，

∴ $\frac{OH_1}{OF}=\frac{H_3O}{H_3E}$

(2)：由习题十第23题，$FP\perp CD$，$EP\perp AB$，有 O、F、P、E 为平行四边形，∴ $OF=EP$.

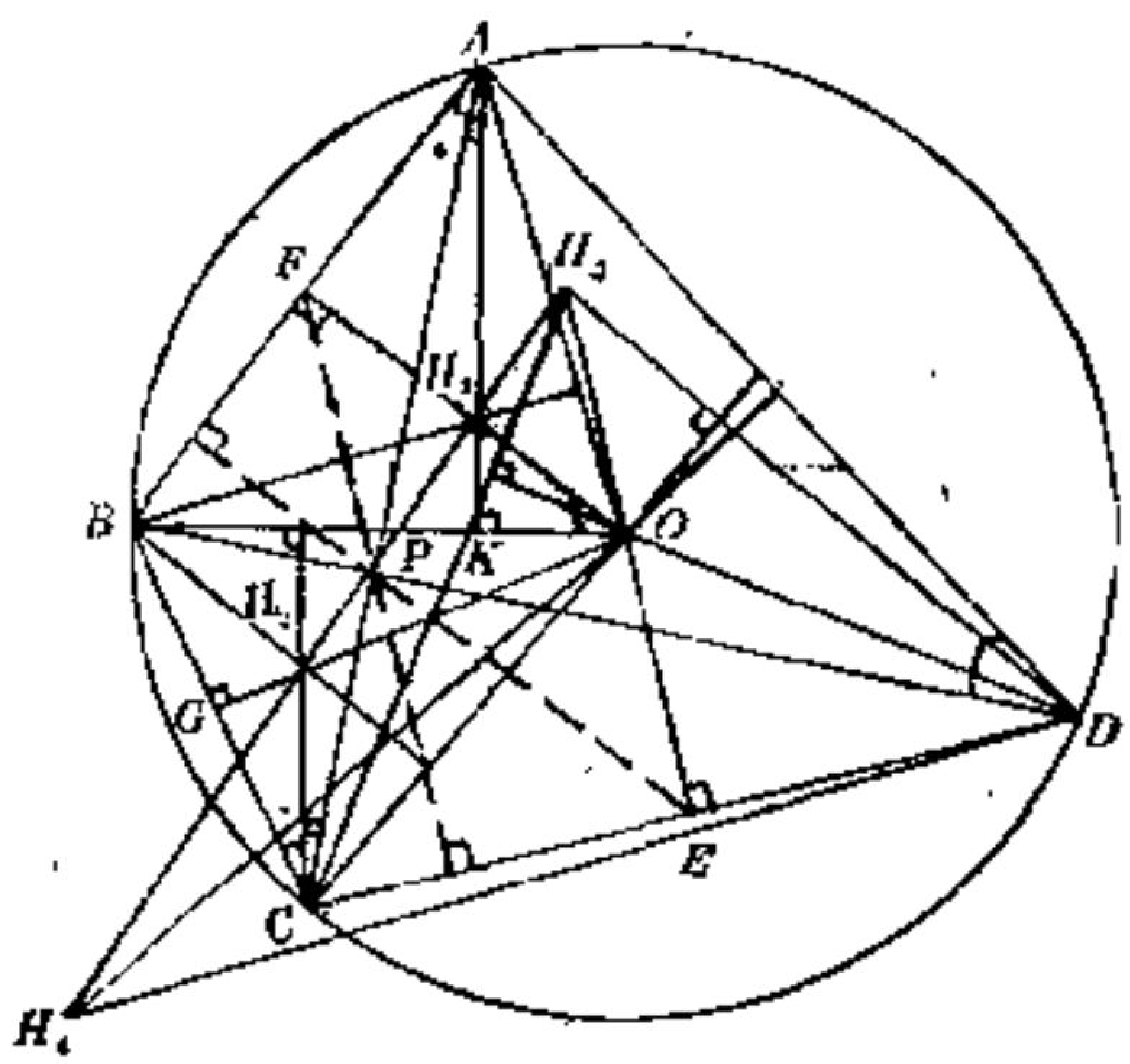


图14—10

由 $\frac{OH_1}{EP}=\frac{H_3O}{H_3E}$，得 H_3、H_1、P 三点共线，

(3)：$\angle FAH_1=\angle KOH_1=\angle ADB=\angle ACB$

$\therefore\quad \triangle AFH_1 \backsim \triangle CPB$，故 $\dfrac{AF}{AH_1}=\dfrac{CP}{CB}$，

即　$CP\cdot AH_1=AF\cdot 2CG$.　　　　①

(4)：$\triangle APB\backsim\triangle CGH_2$，故 $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{CG}{CH_2}$，

即　$AP\cdot CH_2=CG\cdot 2AF$.　　　　②

由①、②得　$CP\cdot AH_1=AP\cdot CH_2$，

即　$\dfrac{AH_1}{AP}=\dfrac{CH_2}{CP}$，$\therefore\quad \triangle APH_1\backsim\triangle CPH_2$.

故 H_1、H_2、P 三点共线。

11．圆内接四边形一双对边（所在直线）交角的平分线，与他双对边（所在直线）交角的平分线分别垂直，两垂足与两对角线的中点组成调和点列。

证(1)：由习题十三第13题知 $PEQF$ 为矩形；

(2)：$\triangle CAF\backsim\triangle BDF$．因 FM、FN 是$\triangle CAF$、$\triangle BDF$ 的中线，由定理116得$\triangle MFA\backsim\triangle NFD$，

有　$\dfrac{FN}{FM}=\dfrac{ND}{MA}$.

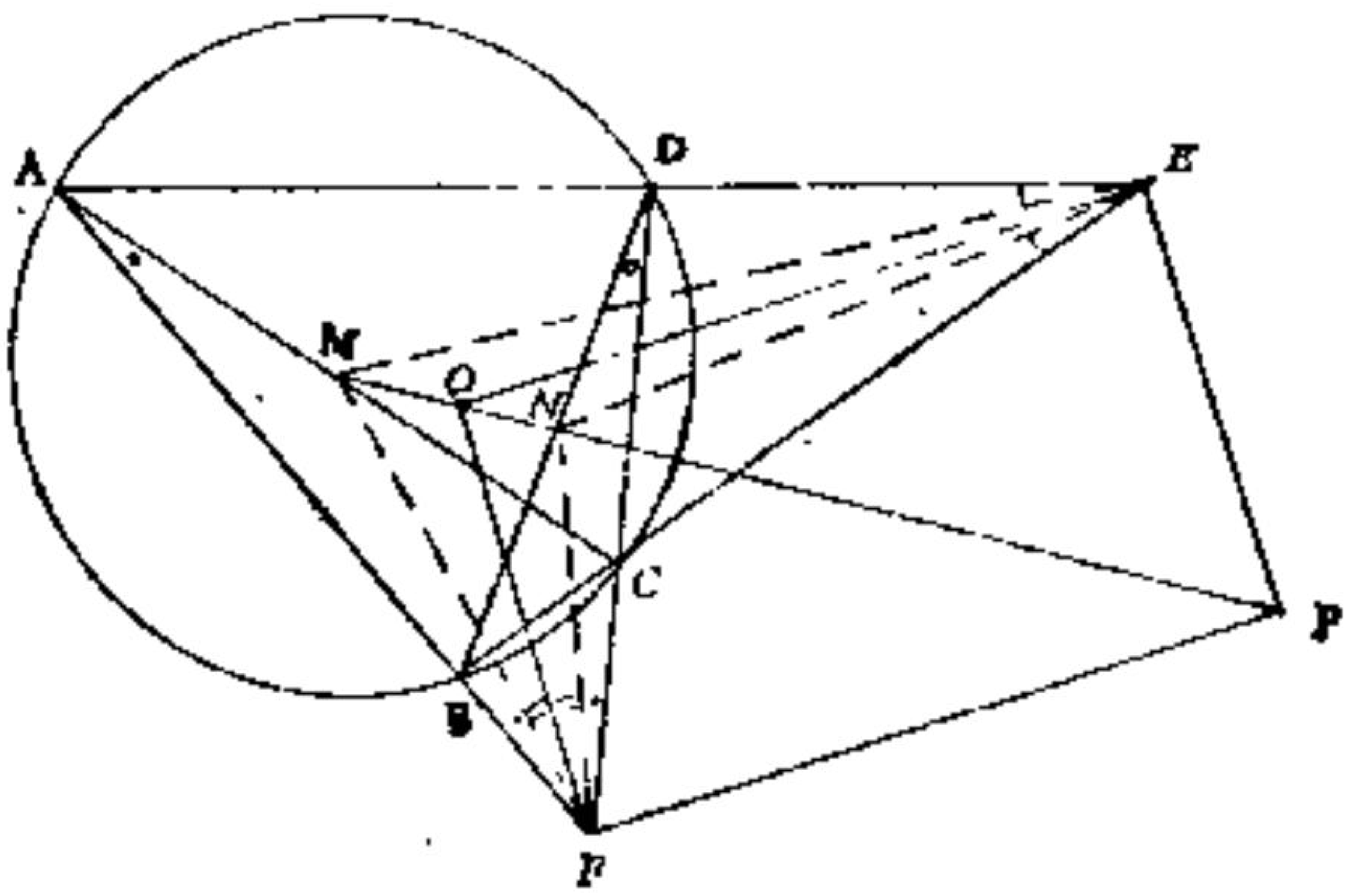


图14—11

$\therefore\quad \angle MFA=\angle NFD$．设$\angle AFC$ 的内、外角平分线交 MN

于Q、P，则FQ、FP也是$\angle MFN$的内、外角平分线。

于是$\dfrac{QN}{QM}=\dfrac{PN}{PM}=\dfrac{FN}{FM}=\dfrac{ND}{MA}$ ①

设$\angle AEC$的内、外角平分线交MN于Q'、P'，则EQ'、EP'也是$\angle MEN$的内、外角平分线。

于是$\dfrac{Q'N}{Q'M}=\dfrac{P'N}{P'M}=\dfrac{EN}{EM}=\dfrac{NB}{MA}=\dfrac{ND}{MA}$ ②

由①、②知Q与Q'，P与P'均重合.故M、Q、N、P共线且组成调和点列。

12．设自四边形的对角线交点引线平行于每边而与对边（所在直线）相交，则四交点共线.

提要：∵ $QP\parallel BE$，$QS\parallel BF$，∴ $\dfrac{EP}{ED}=\dfrac{BQ}{BD}=\dfrac{FS}{FD}$

故 $SP\parallel EF$.

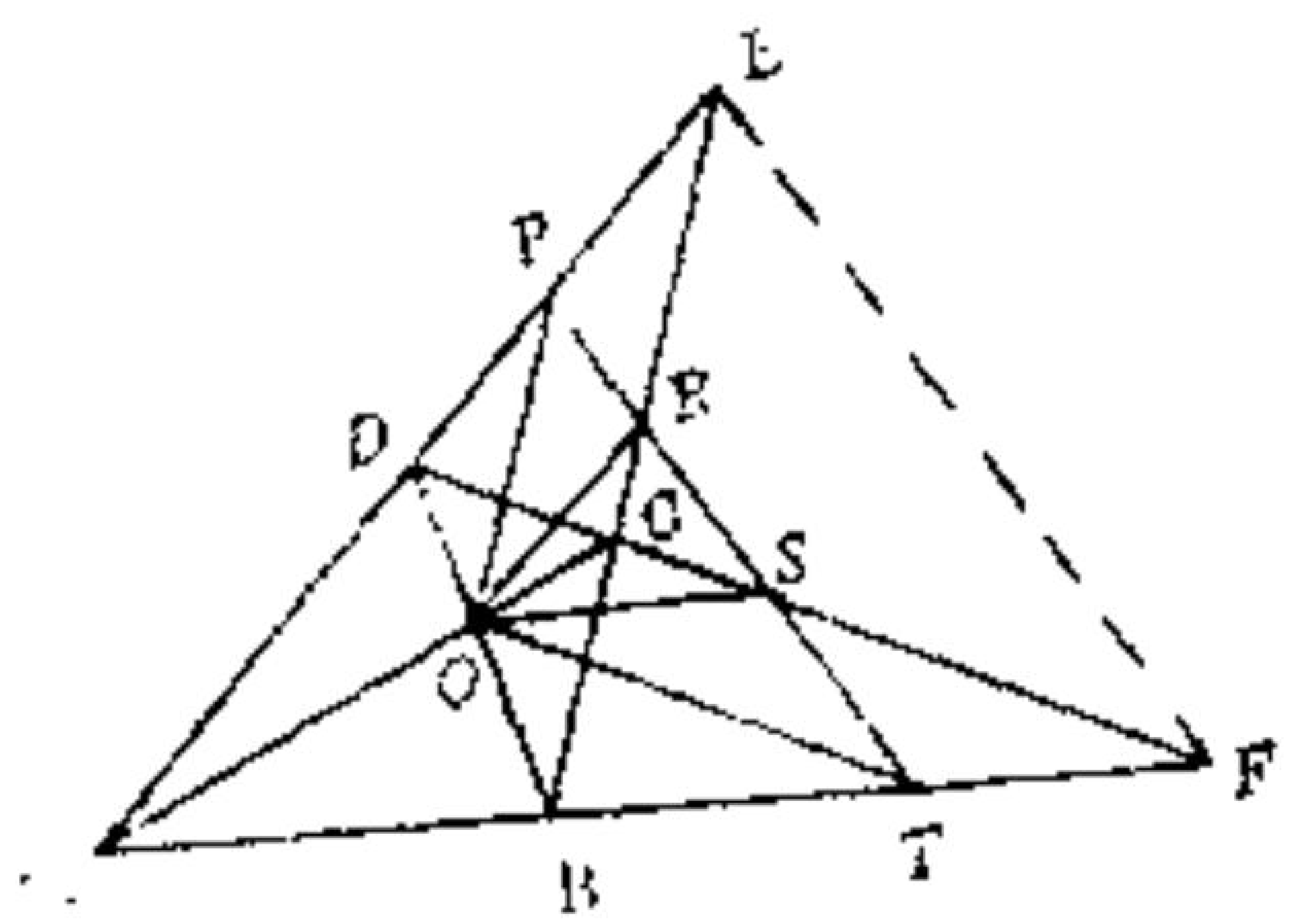


图14—12

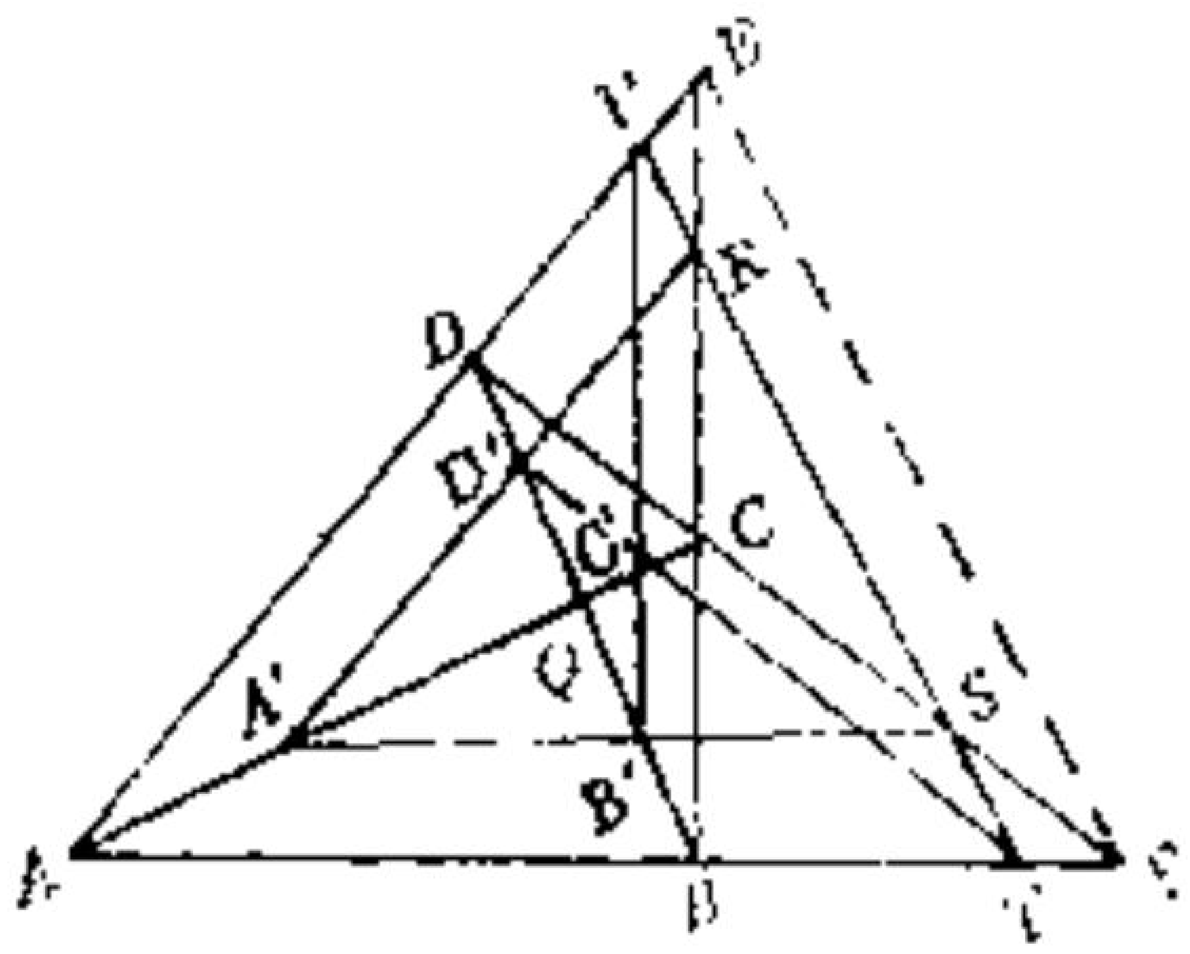


图14—13

13．在四边形$ABCD$中，A'、C'是AC上的两点，B'、D'是BD上的两点。若$A'B'\parallel AB$、$B'C'\parallel BC$、$C'D'\parallel CD$，则$D'A'\parallel DA$，且$A'B'$与CD、$B'C'$与DA、$C'D'$与AB、$D'A'$与BC的交点共线。

提要：(1) $\dfrac{QA'}{AA'}=\dfrac{QB'}{BB'}=\dfrac{QC'}{CC'}=\dfrac{QD'}{DD'}$ ∴ $D'A'\parallel DA$.

(2) ∵ $A'R\parallel AE$，$A'S\parallel AF$，

$$\therefore \quad \frac{CR}{RE}=\frac{CA'}{A'A}=\frac{CS}{SF}，故 \quad RS/\!/EF.$$

14. P是$\triangle ABC$的BC边或延长线上一点，X是连线AP上一点。若有Y、Z两点，使得$\triangle XCP$与$\triangle YAC$、$\triangle XBP$与$\triangle ZAB$各镜象相似，则X、Y、Z三点共线。

提要：$\angle PXC=\angle AYC$，故A、X、C、Y四点共圆，

$\therefore \quad \angle CXY=\angle CAY=\angle PCX$，有$XY/\!/BC$.

同理有A、X、B、Z四点共圆$ZX/\!/BC$.

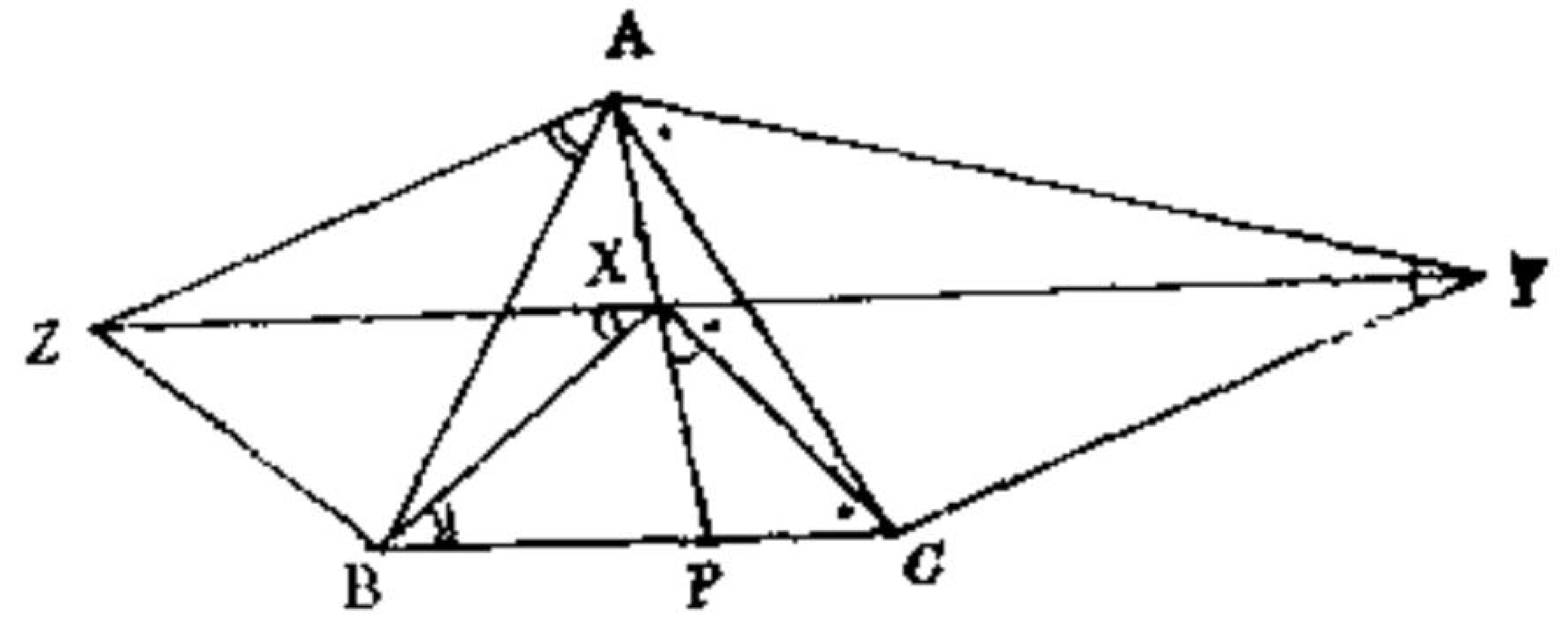


图14—14

15. P是$\triangle ABC$的BC边或延长线上一点，若有X、Y、Z三点，使得$\triangle XBP$与$\triangle YAC$、$\triangle XCP$与$\triangle ZAB$各真正相似，则这三点共线，且$\overline{XY}:\overline{XZ}=\overline{PC}:\overline{PB}$.

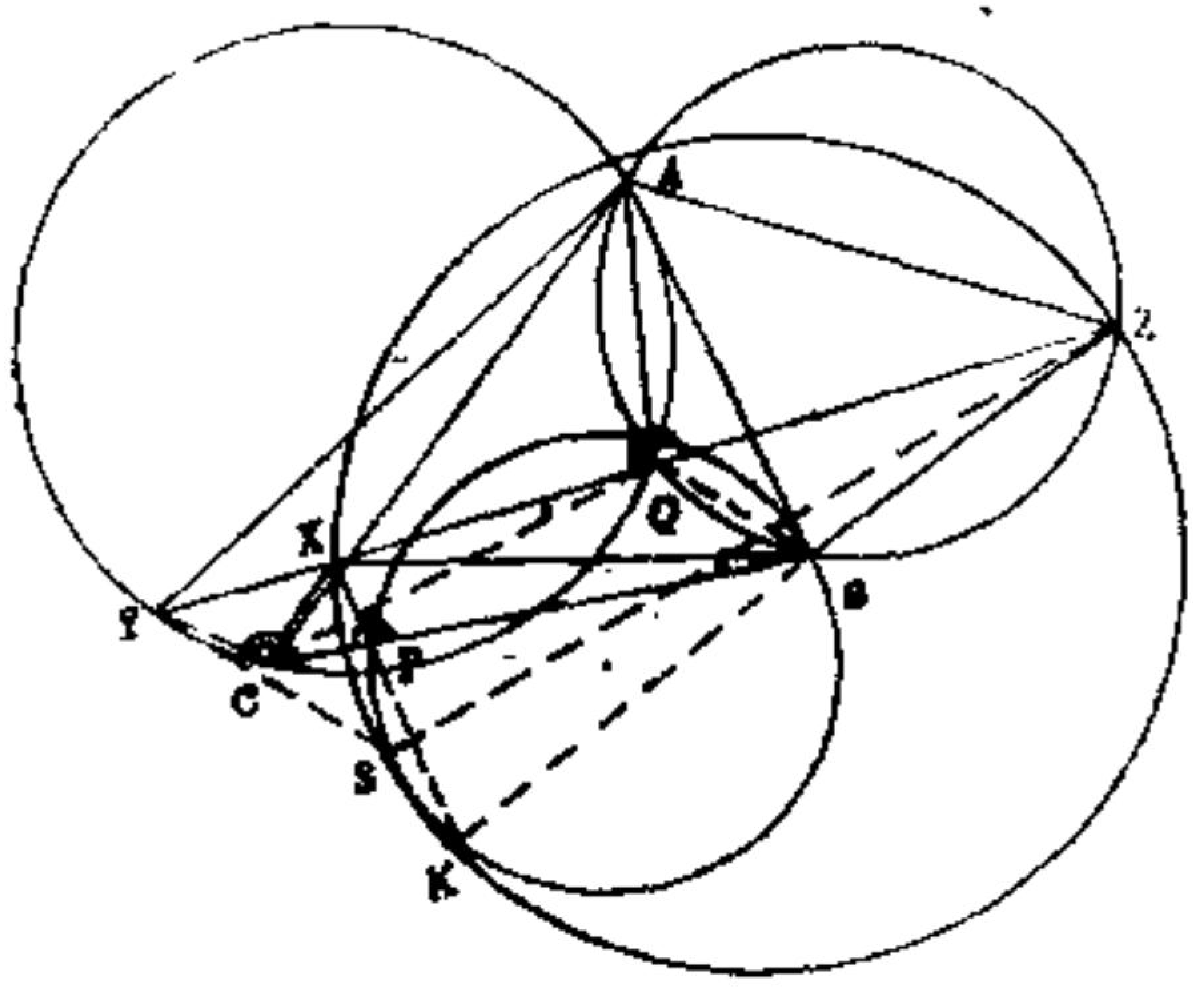


图14—15

证(1)：设$\odot ZAB$与$\odot YAC$相交于Q．

由$\triangle XBP \backsim \triangle YAC$，$\triangle XCP \backsim \triangle ZAB$，

$\therefore\ \angle AQZ = \angle ABZ = \angle CPX$ ①

又 $\angle AQY = \angle ACY = \angle BPX$ ②

$\therefore\ \angle AQZ$与$\angle AQY$互补，

故Y、Q、Z三点共线。

(2)：$\angle BQC = \angle BZA + \angle CYA = \angle PXC + \angle PXB$
$= \angle BXC$，

$\therefore\ X$、C、B、Q四点共圆。

$\because\ \angle CQX = \angle CBX = \angle PBX = \angle CAY = \angle CQY$，

$\therefore\ X$、Q、Y三点共线。

(3)：设XP交ZB于K，作$\odot KPB$、$\odot KXZ$设其交点为S，则S为$\triangle XCP$与$\triangle ZAB$的相似中心

有$\triangle SPB \backsim \triangle SXZ$ $\therefore\ SP:SX = PB:XZ$ ③

(4)：S也是$\triangle XBP$与$\triangle YAC$的相似中心，

有$\triangle SPC \backsim \triangle SXY$ $\therefore\ SP:SX = PC:XY$ ④

由③、④得 $XY:XZ = PC:PB$．

16．M是$\triangle ABC$的BC边的中点，向三角形的内侧引$MX \perp BC$，向外侧引$BY \perp AB$、$CZ \perp AC$，使$MX:BY:CZ = \frac{1}{2}BC:AB:AC$．求证：$X$、$Y$、$Z$三点共线且$X$是$YZ$的中点．

证：$\because\ \triangle XCM \backsim \triangle YAB$

$\triangle XBM \backsim \triangle ZAC$．

如上题，有X、Y、Z共线。

且$\dfrac{XY}{XZ} = \dfrac{MB}{MC} = 1$，故$X$是$YZ$的中点。

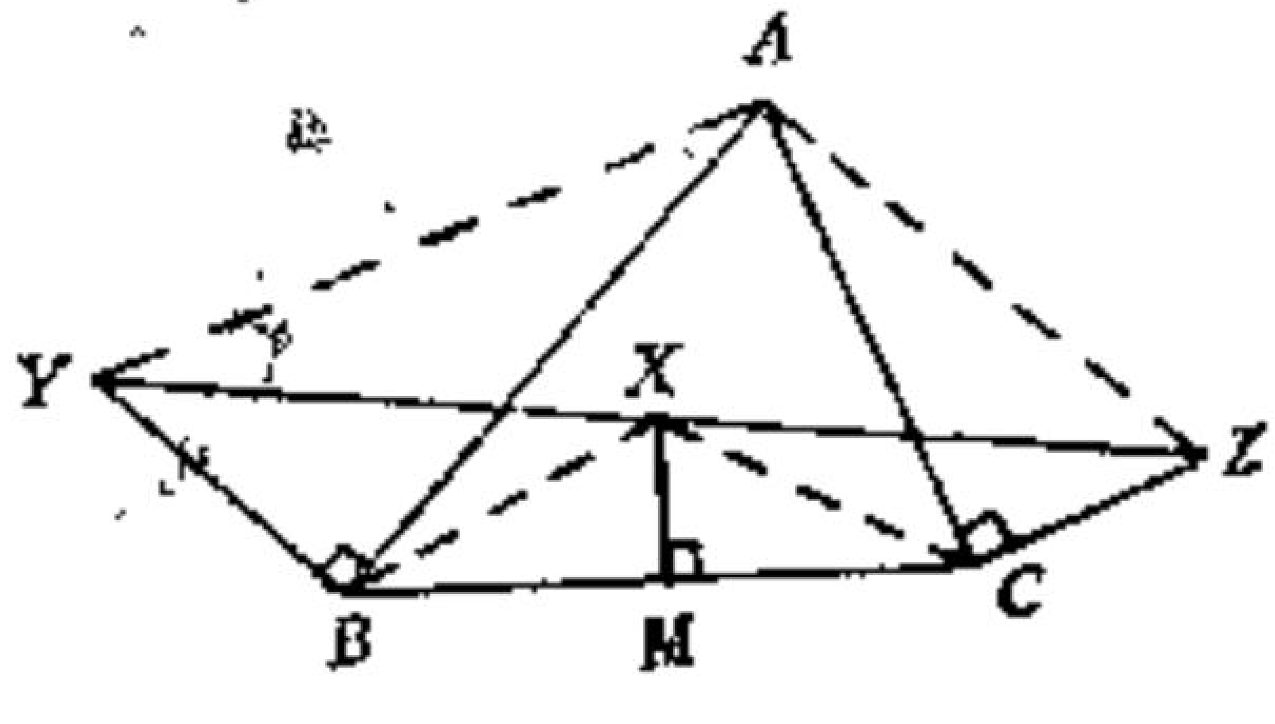


图14—16

17．如图14—17，$ABCD$、$PQRS$、$DQEF$、$CSGH$ 都是正方形，但其中 P 点在 AB 上，且 $PR\perp AB$，$PR=\frac{1}{2}AB$．求证：E、R、G 三点共线，且 R 是 EG 的中点。

证(1)：延长 CS、QD 相交于 M，因 $QS\parallel DC$ 且 $QS=\frac{1}{2}DC$，

故 Q、S 分别是 MD、MC 的中点，

故 $\triangle MQE$ 及 $\triangle MSG$ 均为等腰直角三角形；

(2)：由于 N 是 $\triangle MQS$ 的 QS 上一点，且存在 E、R、G 三点，

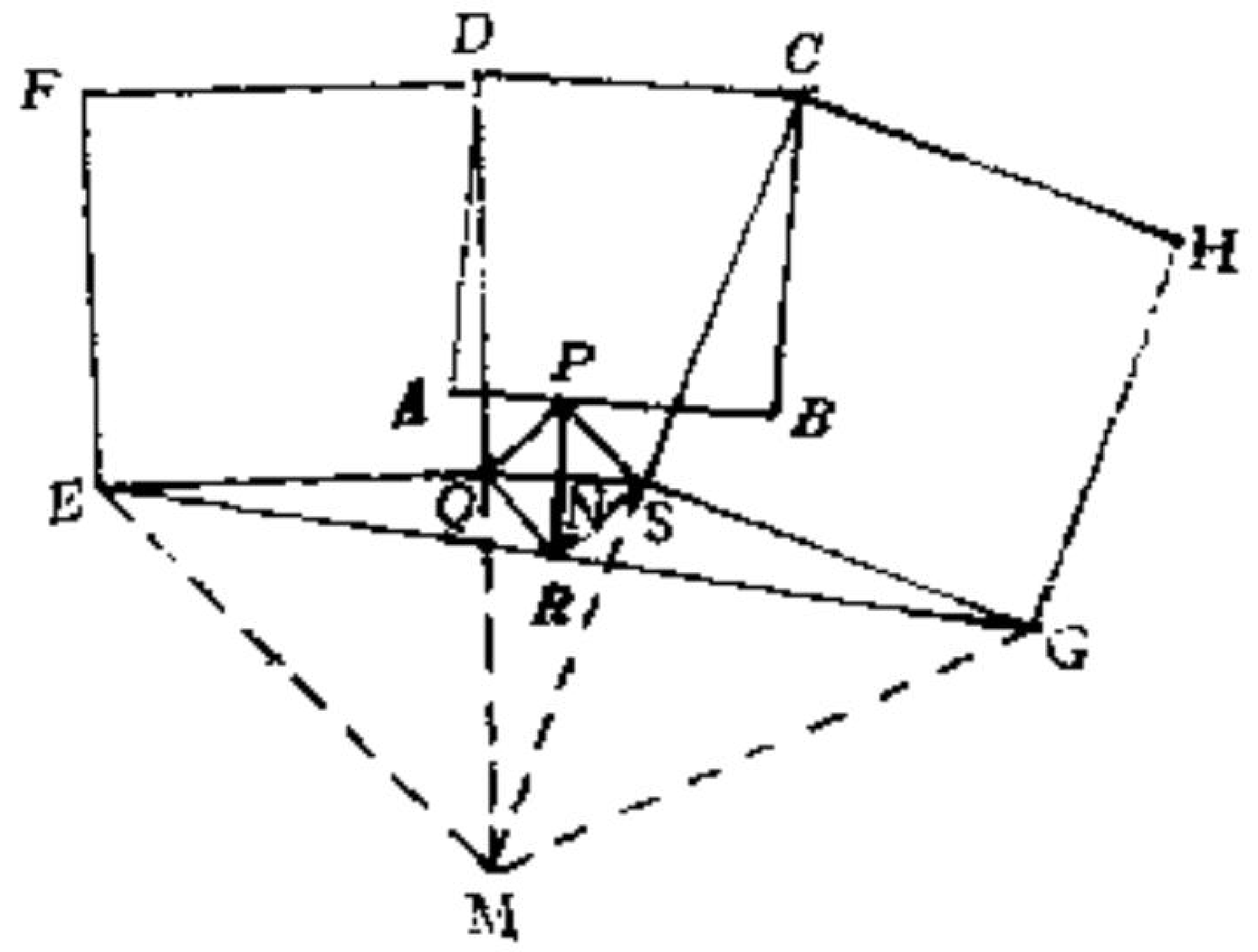


图14—17

使 $\triangle RSN\backsim\triangle EMQ$、$\triangle RQN\backsim\triangle GMS$．故 E、R、G 三点共线，且 $\frac{RE}{RG}=\frac{NQ}{NS}$．由于 $NQ=NS$，故 R 是 EG 的中点。

18．圆内接六边形三双对边（所在直线）的交点共线。

这直线叫做六边形的巴斯开线，系法国数学家巴斯开（pascal．1623—1662年）于1639年发现，他那时年仅16岁．

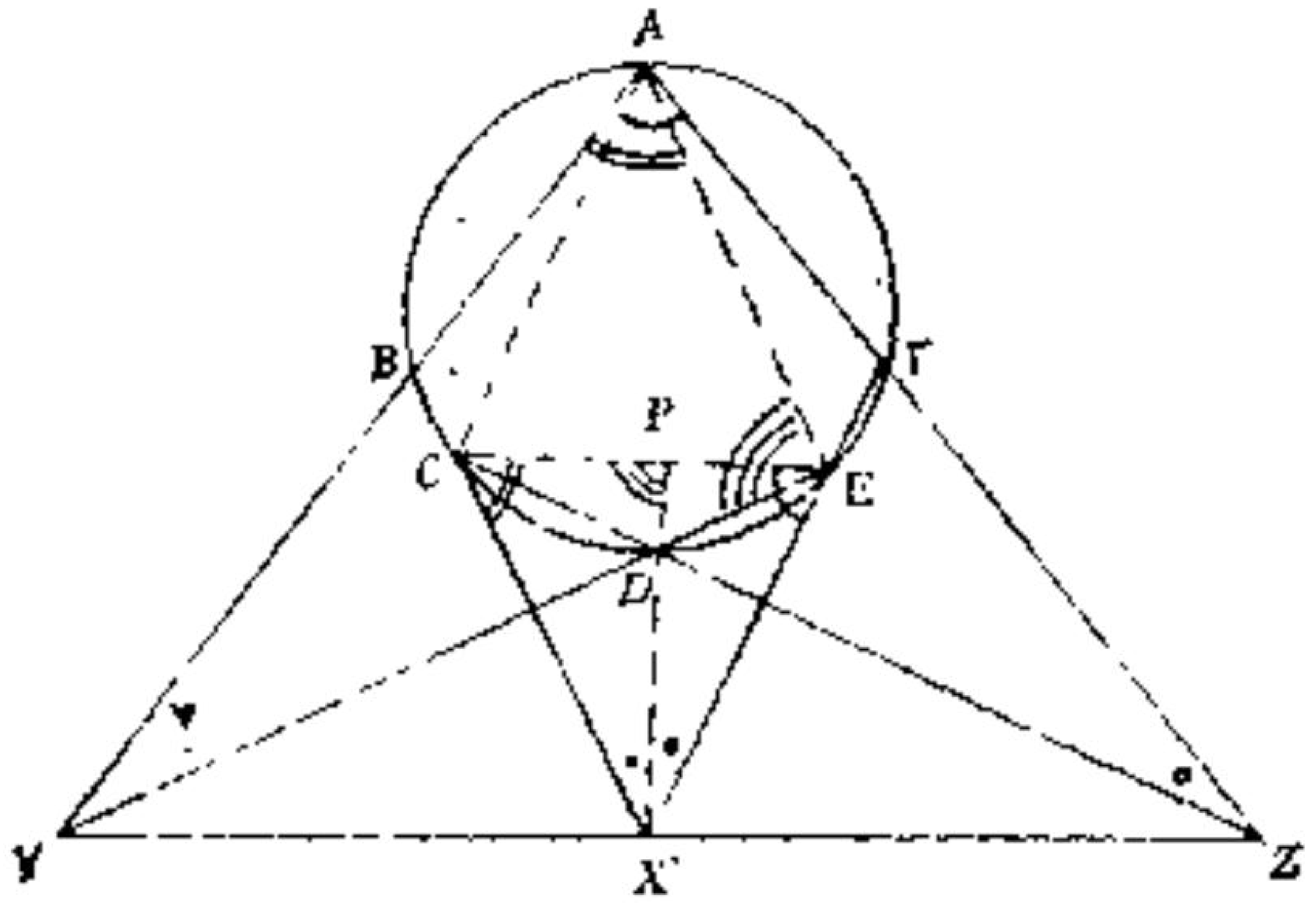


图14—18

证：作三角形$\triangle ACE$，在圆内接四边形$ACEF$中，$\angle XEP=\angle ZAC$；在圆内接四边形$ABCE$中，$\angle XCP=\angle YAE$；在圆内接四边形$ACDE$中，$\angle ACZ+\angle AEY=180°$，故可以在$\triangle ACE$的$CE$上取一点$P$，使$\angle XPC=\angle AEY$，且$\angle XPE=\angle ACZ$．故本题在上述安排之下，满足题15的全部条件，故$X$、$Y$、$Z$三点共线。

19、一直线截$\triangle ABC$三边BC、CA、AB或其延长线于X、Y、Z．试证，这三点的等截点X'、Y'、Z'共线。

在三角形任一边所在直线上，设有两点与此边的中点等距，则称这两点互为等截点。

证：由梅涅劳定理，

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=1,$$

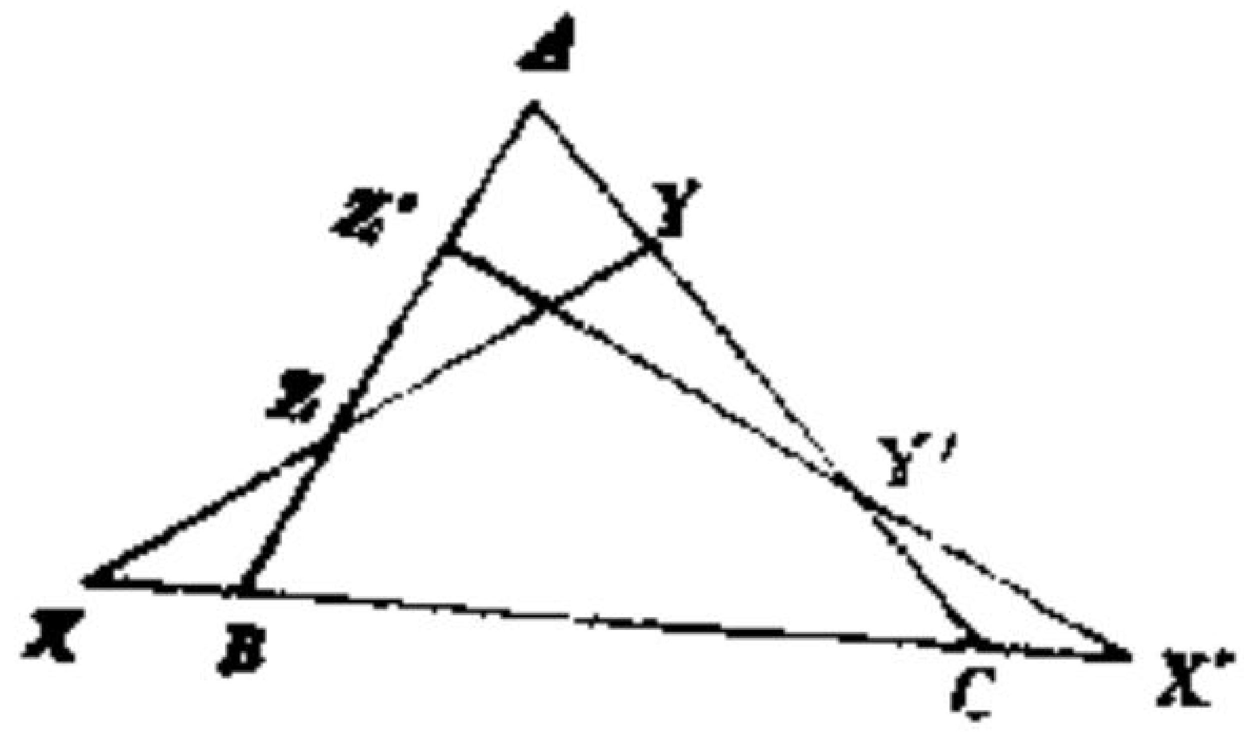


图14—19

而 $$\frac{\overline{CX'}}{\overline{BX'}}\cdot\frac{\overline{AY'}}{\overline{CY'}}\cdot\frac{\overline{BZ'}}{\overline{AZ'}}=1,$$

故 $\frac{X'C}{X'B}\cdot\frac{Z'B}{Z'A}\cdot\frac{Y'A}{Y'C}=1$.

20. 三角形的外角平分线各与对边（所在直线）的交点共线。

证：由外角平分线得

$\frac{XB}{XC}=\frac{AB}{AC}$，$\frac{YC}{YA}=\frac{CB}{BA}$，

$\frac{ZA}{ZB}=\frac{CA}{CB}$.

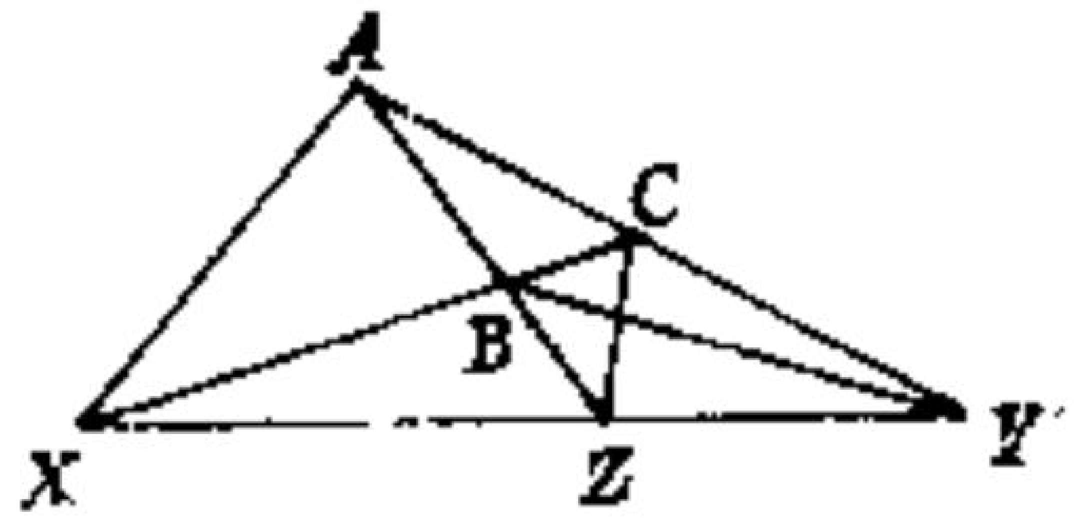


图14—20

三式相乘得：$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{CB}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}=1$

21. 三角形两角的平分线及第三角的外角平分线各与对边（所在直线）的交点共线。

提要：$\frac{XB}{XC}=\frac{AB}{AC}$，

$\frac{YC}{YA}=\frac{BC}{AB}$，$\frac{ZA}{ZB}=\frac{AC}{BC}$.

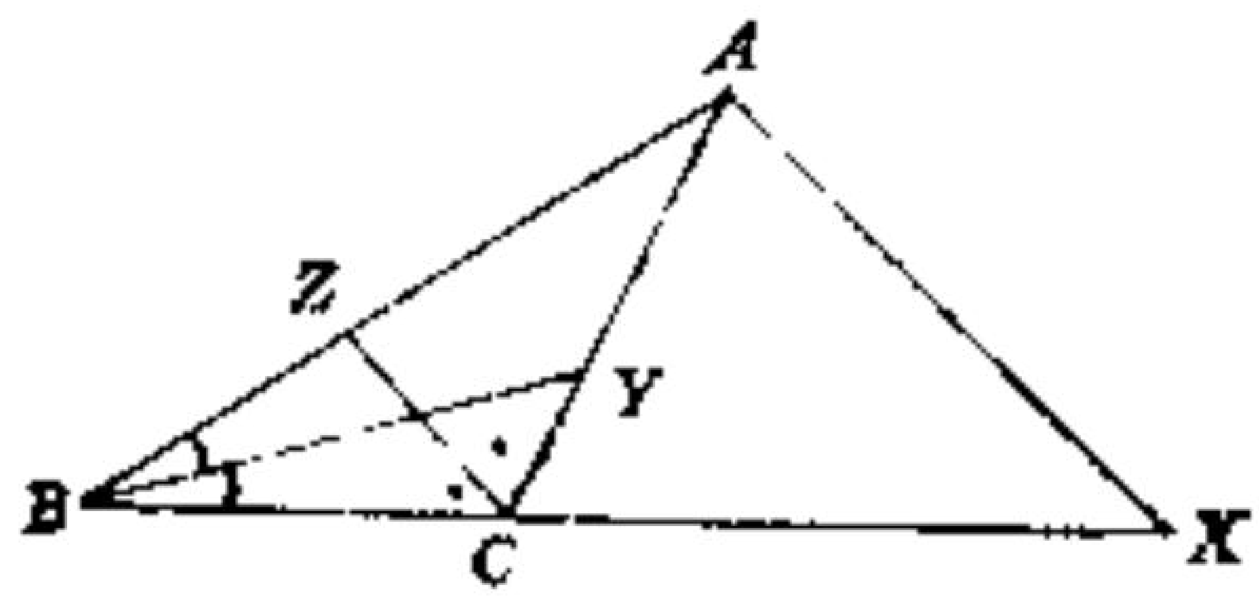


图14—21

22. 过三角形的顶点所作外接圆的切线各与对边（所在直线）的交点共线。

这直线叫做三角形的来英恩（lemoine）线。

证：直线 XLF 截 $\triangle BCD$，有

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{FC}}{\overline{FD}}\cdot\frac{\overline{ED}}{\overline{EB}}=1.$$

直线 YDE 截 $\triangle ACF$，有

$$\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{EF}}\cdot\frac{\overline{DF}}{\overline{DC}}=1.$$

直线 ZDF 截 $\triangle ABE$，有

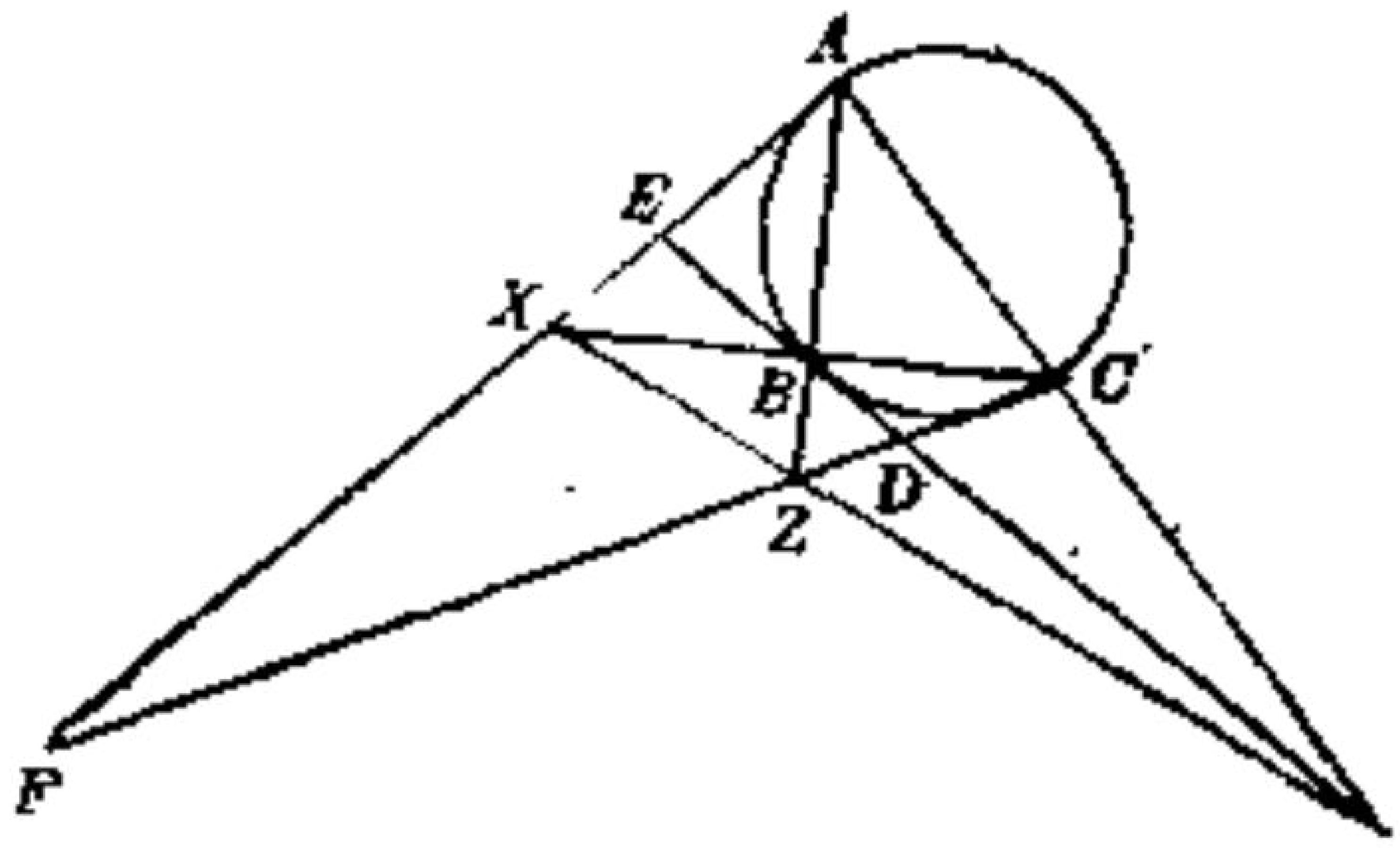


图14—22

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DE}}\cdot\frac{\overline{FE}}{\overline{FA}}=1,$$

在去约因子 $\frac{\overline{DF}}{\overline{FD}}\cdot\frac{\overline{FE}}{\overline{EF}}\cdot\frac{\overline{ED}}{\overline{DE}}=-1$ 之后，

有 $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{FC}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=-1$,

$$\therefore\ \frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1.$$

23．完全四边形的三条对角线的中点共线。

四条直线两两相交于六点，这个图形叫做完全四边形，一完全四边形有四边和六顶点，不共边的两顶点称为对顶点，其连线称为对角线，凡三线；三对角线交成的三角形，称为对角三角形。本题所得直线，叫做完全四边形的牛顿线，为英国数学家兼物理学家牛顿，（Newton，1643—1727年）所发现。

证(1)：P、Q、R 为 DF、FC、CD 的中点，有 L、R、Q，M、R、P 及 N、Q、P 均三点共线，且 $LQ /\!/ AF$、$MP /\!/ BF$、$NP /\!/ ED$。

(2)：由相似三角形关系，有

$$\frac{LQ}{LR}=\frac{AF}{AD},\ \frac{MR}{MP}=\frac{BC}{BF},\ \frac{NP}{NQ}=\frac{ED}{EC}.$$

$$\therefore\ \frac{LQ}{LR}\cdot\frac{MR}{MP}\cdot\frac{NP}{NQ}=\frac{AF}{AD}\cdot\frac{ED}{EC}\cdot\frac{BC}{BF}=1.$$

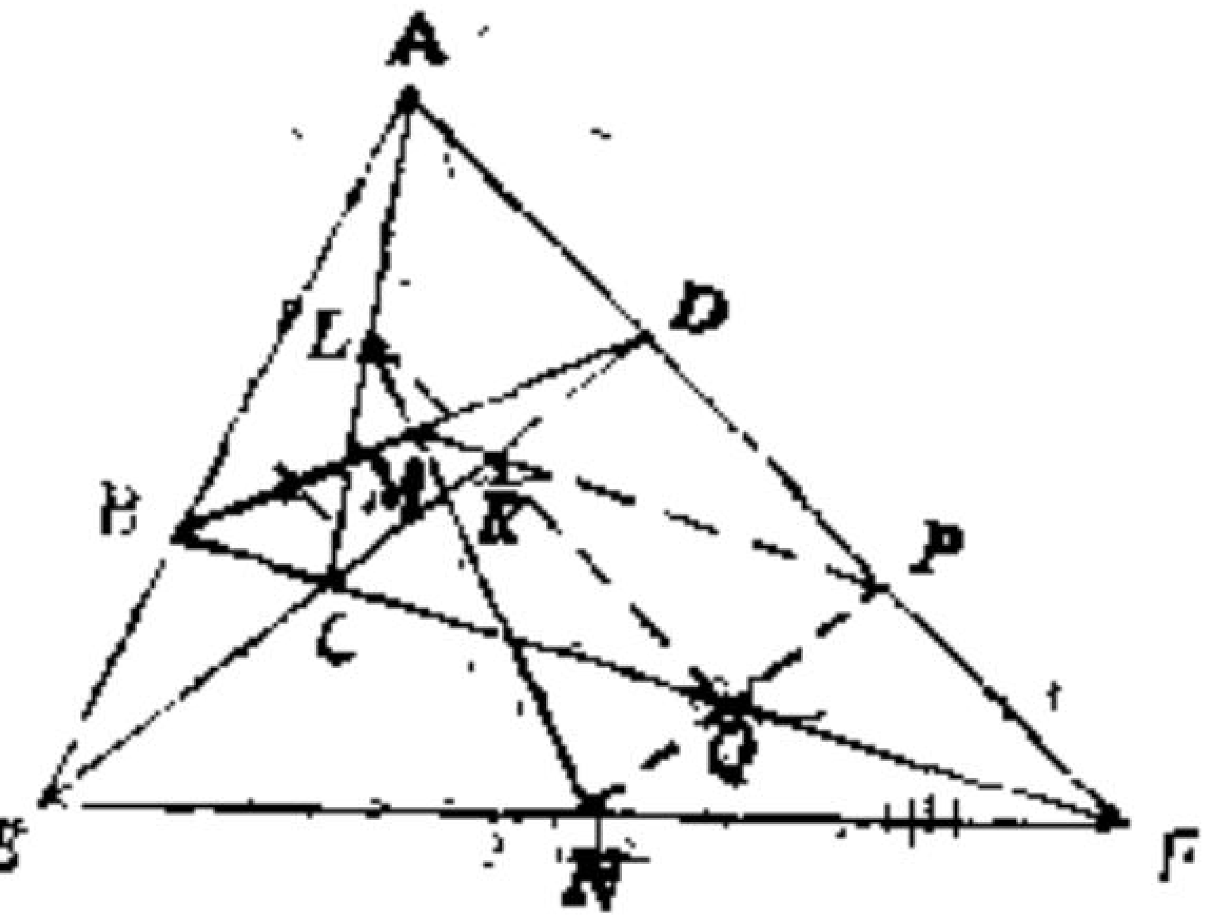


图14—23

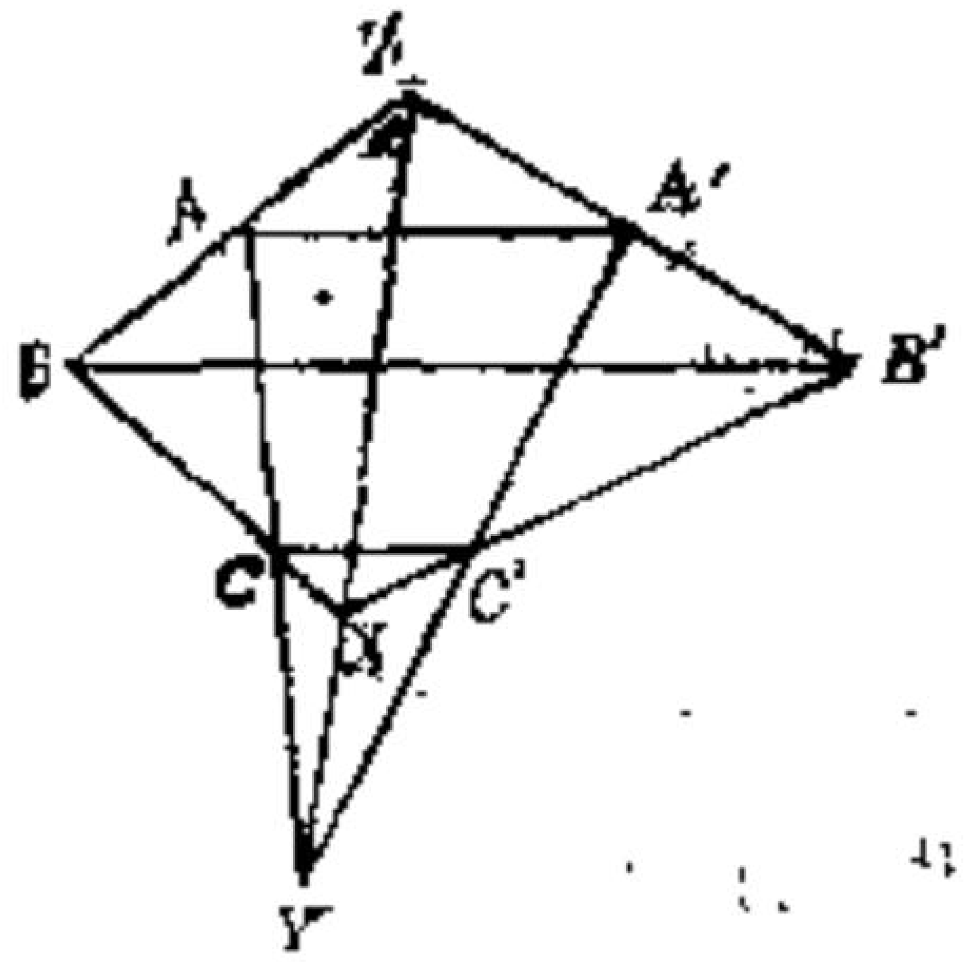


图14—24

24．设两三角形的对应顶点连线互相平行，且三双对应边（所在直线）均相交，则三交点共线。

提要：由相似三角形有：

$$\frac{ZA}{ZB}=\frac{AA'}{BB'},\ \frac{YC}{YA}=\frac{CC'}{AA'},\ \frac{XB}{XC}=\frac{BB'}{CC'}.$$

$$\therefore\ \frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=\frac{BB'}{CC'}\cdot\frac{CC'}{AA'}\cdot\frac{AA'}{BB'}=1.$$

25．将一点与正三角形的顶点相连，求证三连结线的中垂线各与对边（所在直线）的交点共线。

证(1)：A'、B'、C'是$\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$的外心；H是正三角形$\triangle ABC$的外心。

(2)：$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的对应顶点连线交于一点H；故其对应边的交点X、Y、Z共线。

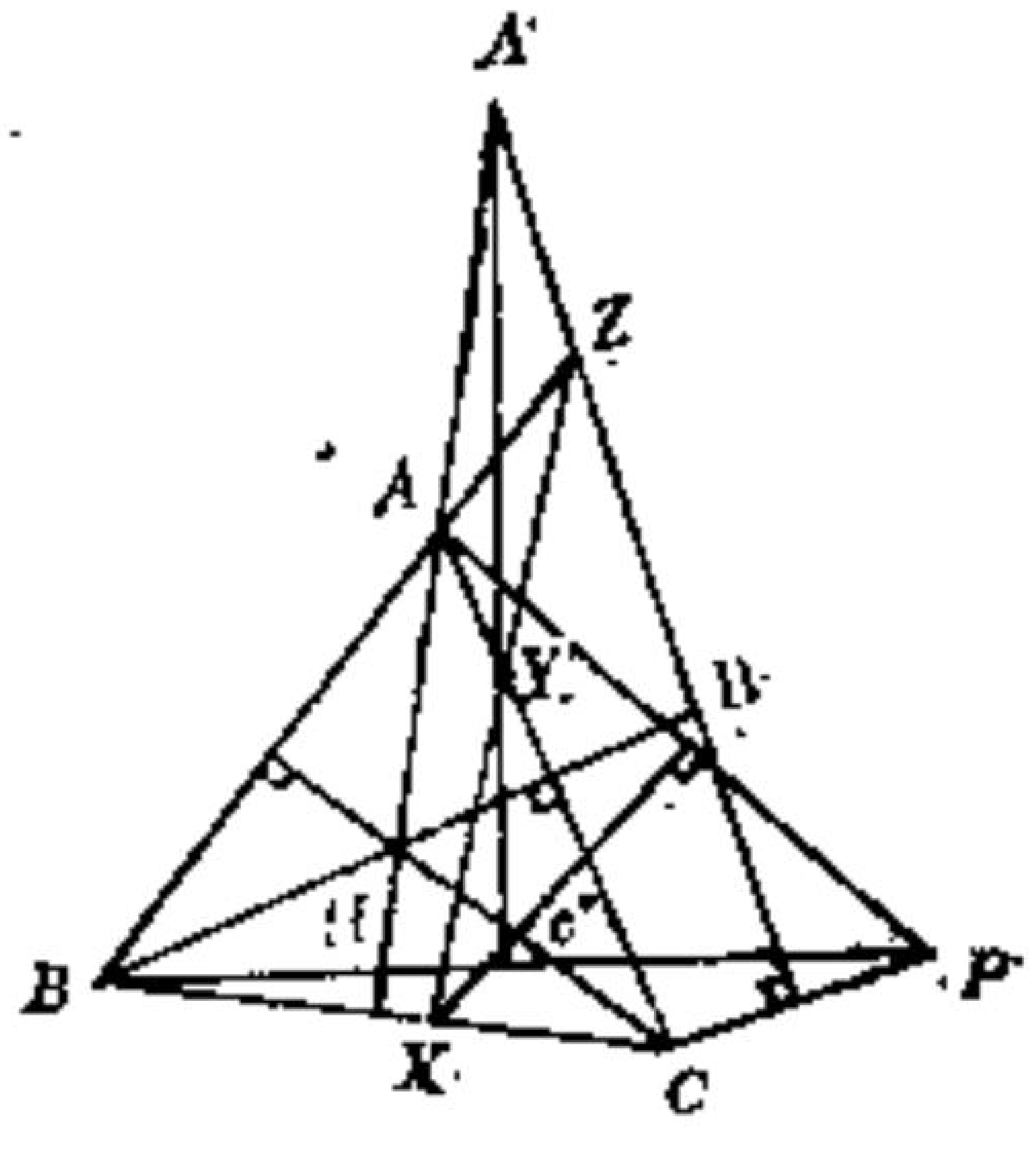


图14—25

26．设两三角形从两方面看来是透视的，则从第三方面看来也是透视的．具体地说，即设$\triangle ABC$与$\triangle B'C'A'$，$\triangle ABC$与$\triangle C'A'B'$各是透视的，那么$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$也是透视的。

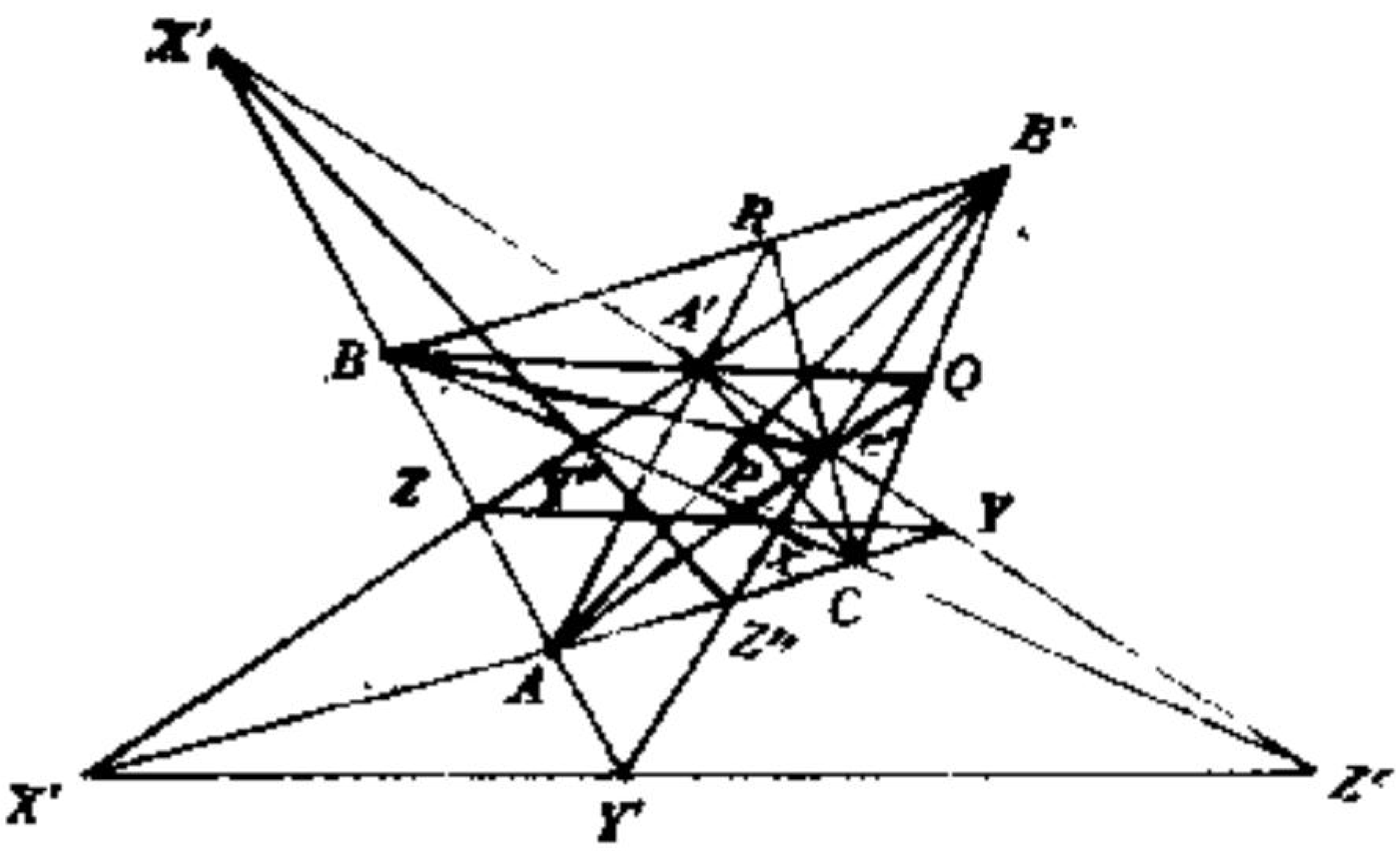


图14—26

证(1)：P、Q是$\triangle ABC$与$\triangle B'C'A'$、$\triangle ABC$与$\triangle C'A'B'$的透视中心，$X'Y'Z'$、$X''Y''Z''$为其透视轴。

(2)：X、Y、Z是BC与$B'C'$、CA与$C'A'$、AB与$A'B'$的交点，

由△ABC 与截线 $X''YZ'$，得 $\frac{\overline{X''A}}{\overline{X''B}}\cdot\frac{\overline{Z'B}}{\overline{Z'C}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=1$ ①

由△ABC 与截线 $XZ''Y'$，得 $\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{Z''C}}{\overline{Z''A}}\cdot\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'B}}=1$ ②

由△ABC 与截线 $X'ZY''$，得 $\frac{\overline{X'C}}{\overline{X'A}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{Y''B}}{\overline{Y''C}}=1$ ③

①·②·③得

$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{X'C}}{\overline{X'A}}\cdot\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'B}}\cdot\frac{\overline{Z'B}}{\overline{Z'C}}\cdot\frac{\overline{X''A}}{\overline{X''B}}\cdot\frac{\overline{Y''B}}{\overline{Y''C}}\cdot\frac{\overline{Z''C}}{\overline{Z''A}}=1.$$

$\therefore\ \frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=1$，故 X、Y、Z 共线。

由于X、Y、Z是△ABC 与△$A'B'C'$ 对应边的交点，故其对应顶点的连线共点于 R，即 R 是△ABC 与△$A'B'C'$ 的透视中心。

27．设一六边形相间各顶点分在两直线上，则它的三双对边（所在直线）的交点共线（pappus 定理）

证：以△PQR 为基础三角形，关于以下五条直线建立比例关系，XA_1A_2、YA_3A_4、ZA_5A_6、$A_1A_3A_5$、$A_2A_4A_6$．

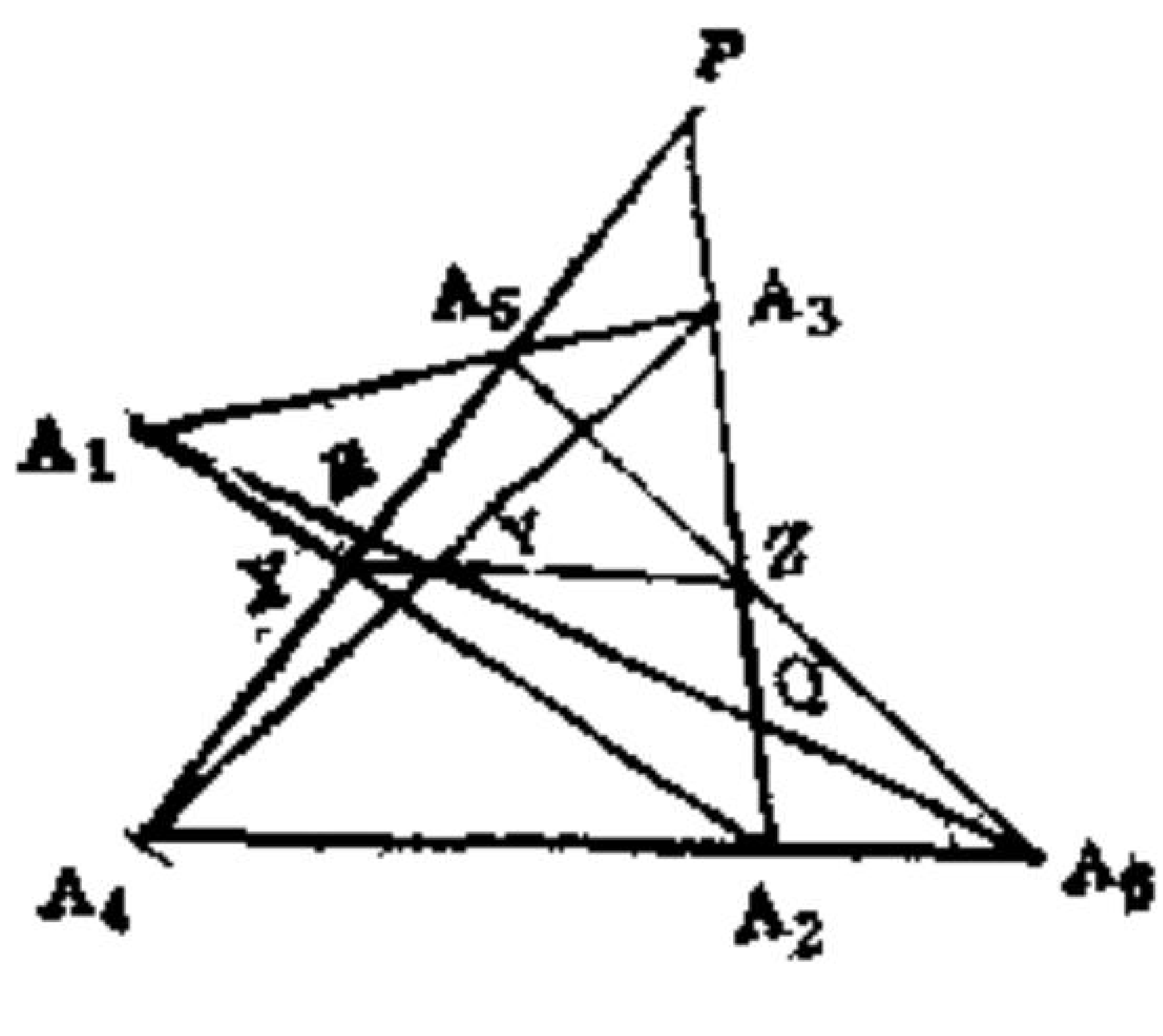


图 14—27

$\frac{\overline{XP}}{\overline{XR}}\cdot\frac{\overline{A_1R}}{\overline{A_1Q}}\cdot\frac{\overline{A_2Q}}{\overline{A_2P}}=1$,

$\frac{\overline{YR}}{\overline{YQ}}\cdot\frac{\overline{A_3Q}}{\overline{A_3P}}\cdot\frac{\overline{A_4P}}{\overline{A_4R}}=1$,

$$\frac{ZQ}{ZP}\cdot\frac{A_5P}{A_5R}\cdot\frac{A_6R}{A_6Q}=1,\quad \frac{A_1Q}{A_1R}\cdot\frac{A_5R}{A_5P}\cdot\frac{A_3P}{A_3Q}=1$$

$$\frac{A_2P}{A_2Q}\cdot\frac{A_6Q}{A_6R}\cdot\frac{A_4R}{A_4P}=1.$$

以上五式相乘并消去公共因子得：

$$\frac{XP}{XR}\cdot\frac{YR}{YQ}\cdot\frac{ZQ}{ZP}=1,$$ 故 X、Y、Z 三点共线。

28．给定△ABC 及两点 O、O'，连 AO、AO' 交 BC 于 X、X'，BO、BO' 交 CA 于 Y、Y'，CO、CO' 交 AB 于 Z、Z'．设 YZ' 与 $Y'Z$ 交于 P，ZX' 与 $Z'X$ 交于 Q，XY' 与 $X'Y$ 交于 R．求证：O、O'、P、Q、R 五点共线．

提要：看六边形 $X'YBY'XA$，其相间各顶点分在两直线 BC、AC 上，且 O、O'、R 分别是 YB 与 XA、BY' 与 AX'、$X'Y$ 与 $Y'X$ 的交点。由上题知 O、O'、R 三点共线。

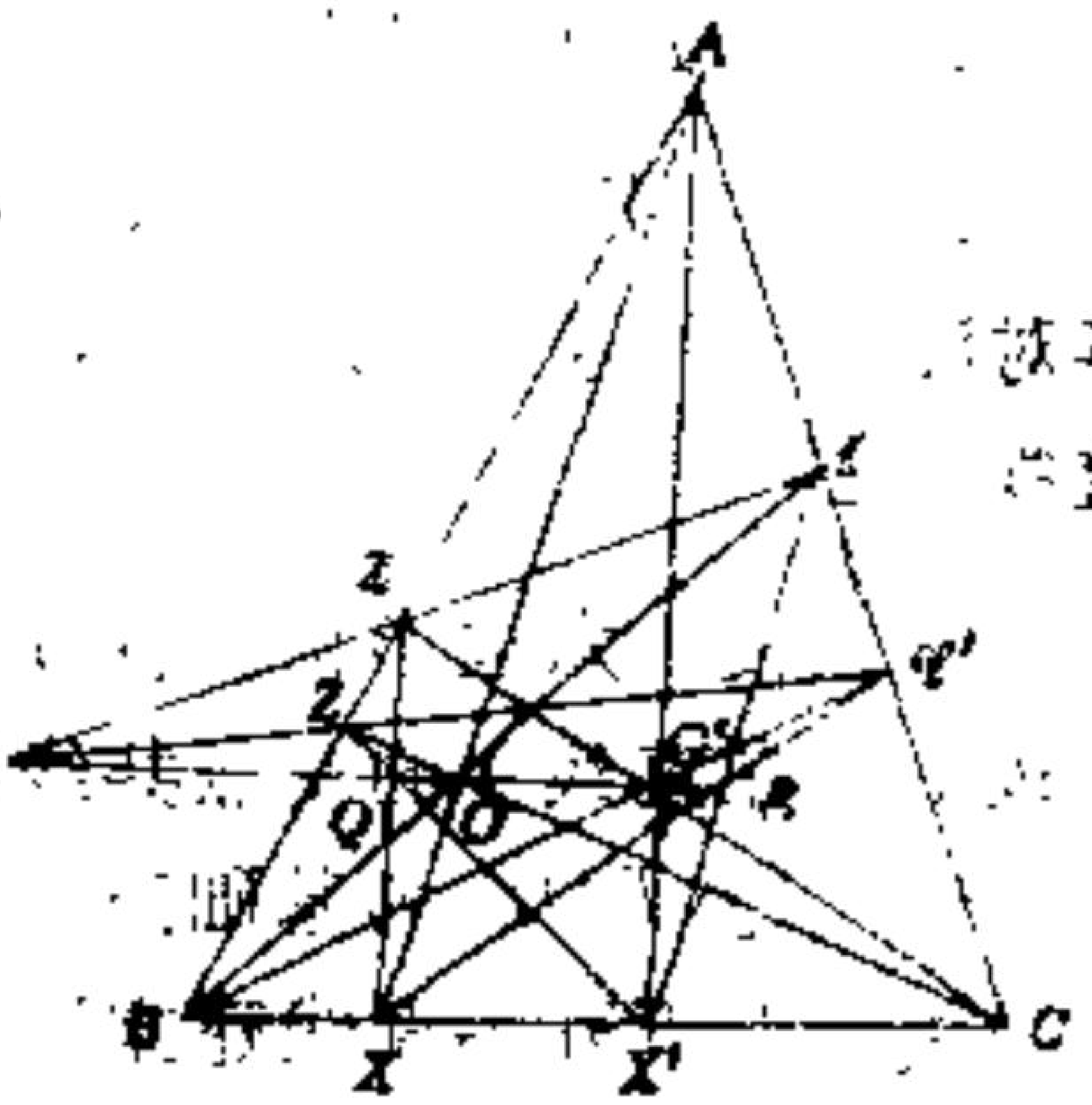


图14—28

29．在四边形 $ABCD$ 中，O 是 AB 与 CD 的交点，一直线交 AB、BC、CD、DA 于 E、F、G、H，连 EO、FO、GO、HO，设依次各交 CD、DA、AB、BC 于 E'、F'、G'、H'．求证：这四点共线。

证：关于△ACK、△BDK与截线H'OH，有

$$\frac{H'C}{H'K}\cdot\frac{HK}{HA}\cdot\frac{OA}{OC}=1,$$

$$\frac{H'K}{H'B}\cdot\frac{OB}{OD}\cdot\frac{HD}{HK}=1.$$

关于△ACI与截线E'OE，有

$$\frac{E'I}{E'C}\cdot\frac{OC}{OA}\cdot\frac{EA}{EI}=1,$$

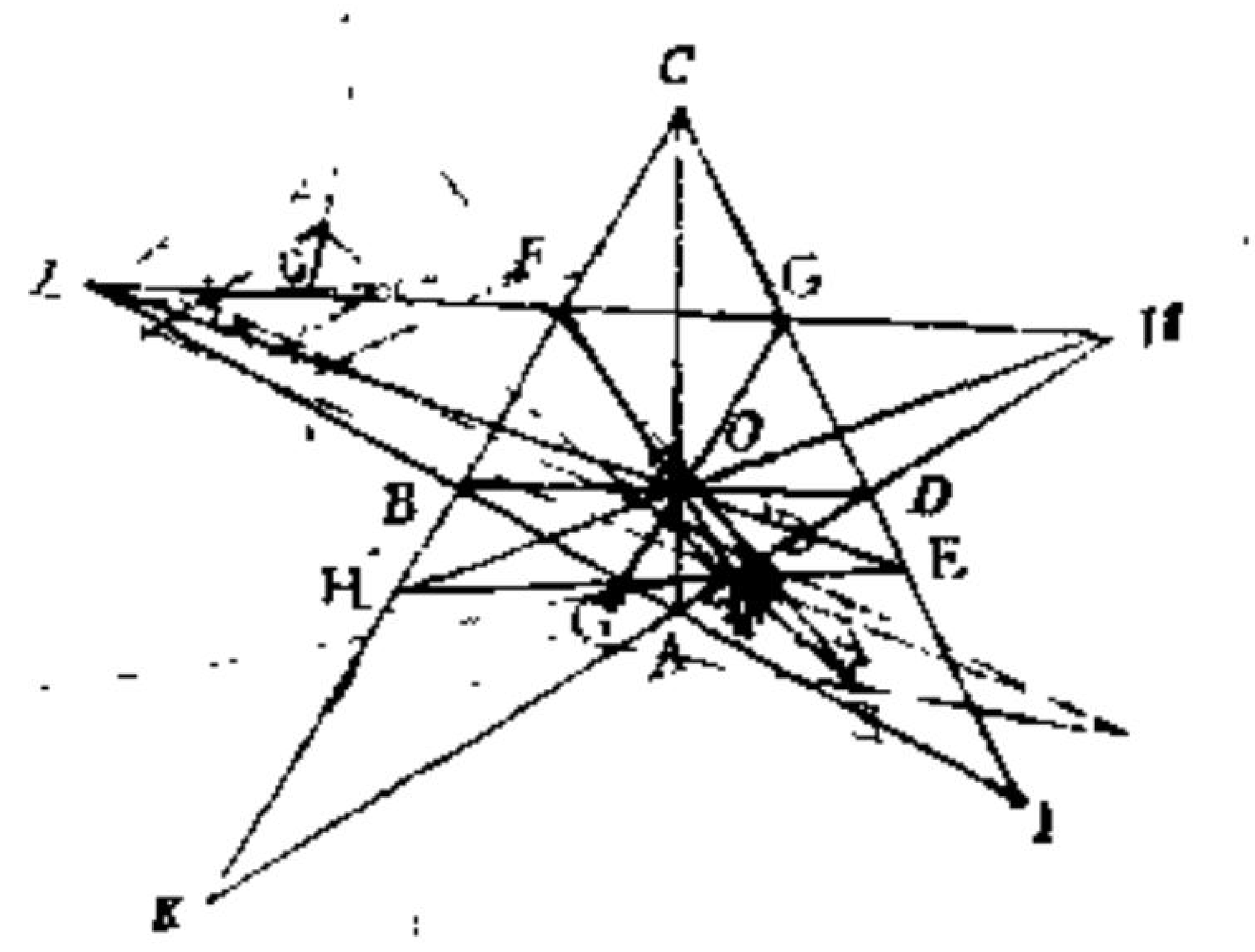


图14—29

关于△BDI与截线G'OG，有：

$$\frac{G'B}{G'I}\cdot\frac{GI}{GD}\cdot\frac{OD}{OB}=1.$$

四式相乘约去公因子后整理得：

$$\frac{E'I}{E'C}\cdot\frac{H'C}{H'B}\cdot\frac{G'B}{G'I}\cdot\frac{EA}{EI}\cdot\frac{GI}{GD}\cdot\frac{HD}{HA}=1.$$

由于关于△ADI与截线EGH使后三因子的乘积为1，故E'、G'、H'三点共线。

30．在四边形ABCD中，A'、C'是AC上的两点，B'、D'是BD上的两点，若A'B'与AB，B'C'与BC，C'D'与CD的交点共线，则D'A'与DA的交点也在此线上，且A'B'与CD、B'C'与DA、C'D'与AB、D'A'与BC的交点共线。

提要(1)：P、P'是AB与CD、A'B'与C'D'的交点，则△PBC与△P'B'C'有配景轴GEF并有配景中心O，故PP'过O点。

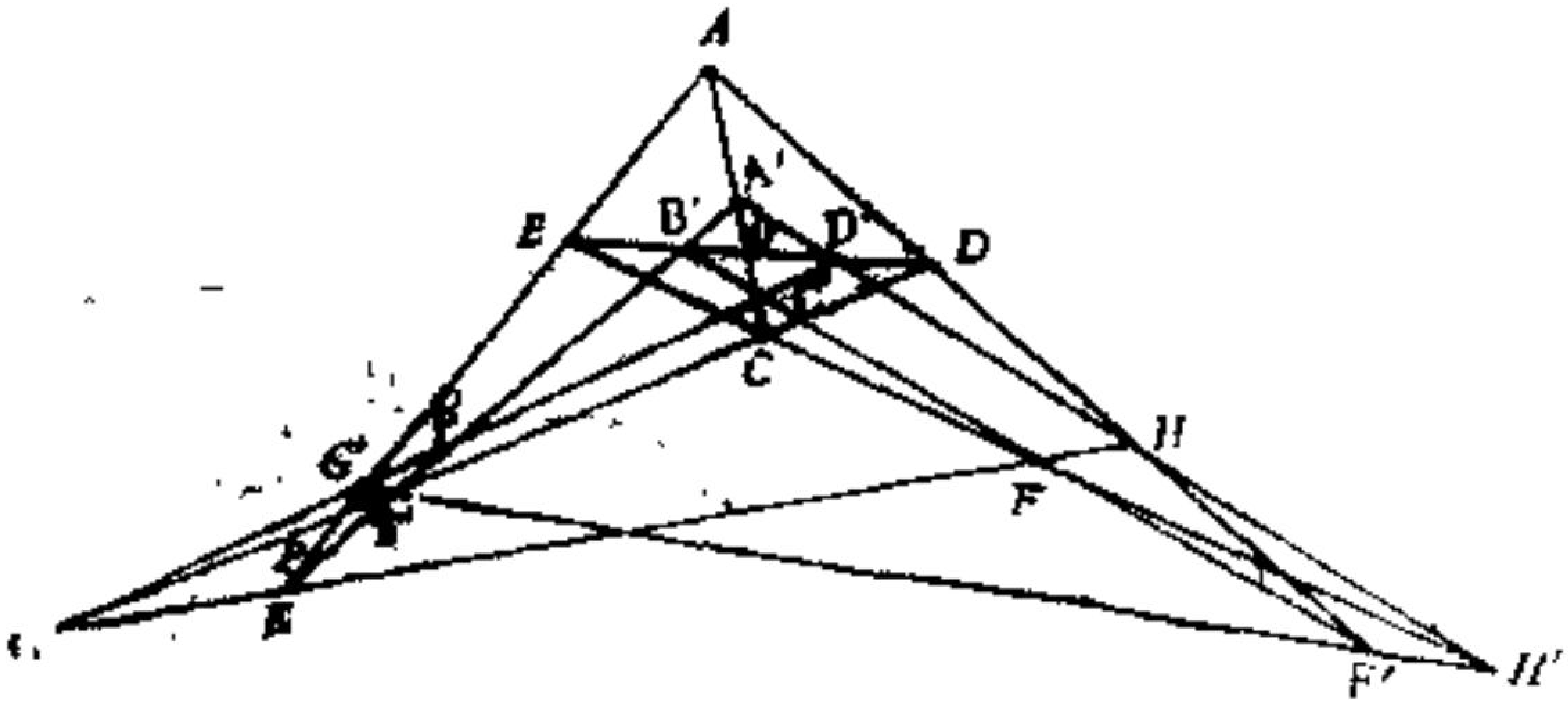


图14—30

(2)：$\triangle PDA$与$\triangle P'D'A'$有配景中心O，故有配景轴GEH.

(3)：$\triangle PDA$与$\triangle P'B'C'$有配景中心O，故有配景轴$G'E'F'$.

(4)：$\triangle PBC$与$\triangle P'D'A'$有配景中心O，故有配景轴$G'E'H'$.

第六节　共点线　习题十五

1．若在$\triangle ABC$的内侧作正三角形$\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$、$\triangle ABC'$，则AA'、BB'、CC'三线共点．

提要：(1) 作BB'与AA'相交于O，

$\because$ $\triangle BAB'\cong\triangle C'AC$，有$\angle ABB'=\angle AC'C$，故$A$、$B$、$C'$、$O$共圆．

$\therefore$ $\angle BOC'=\angle BAC'=60°$；$\angle BOA=\angle BC'A=60°$.

(2) A、B'、O、C共圆，$\therefore$ $\angle AOC=\angle AB'C=60°$、

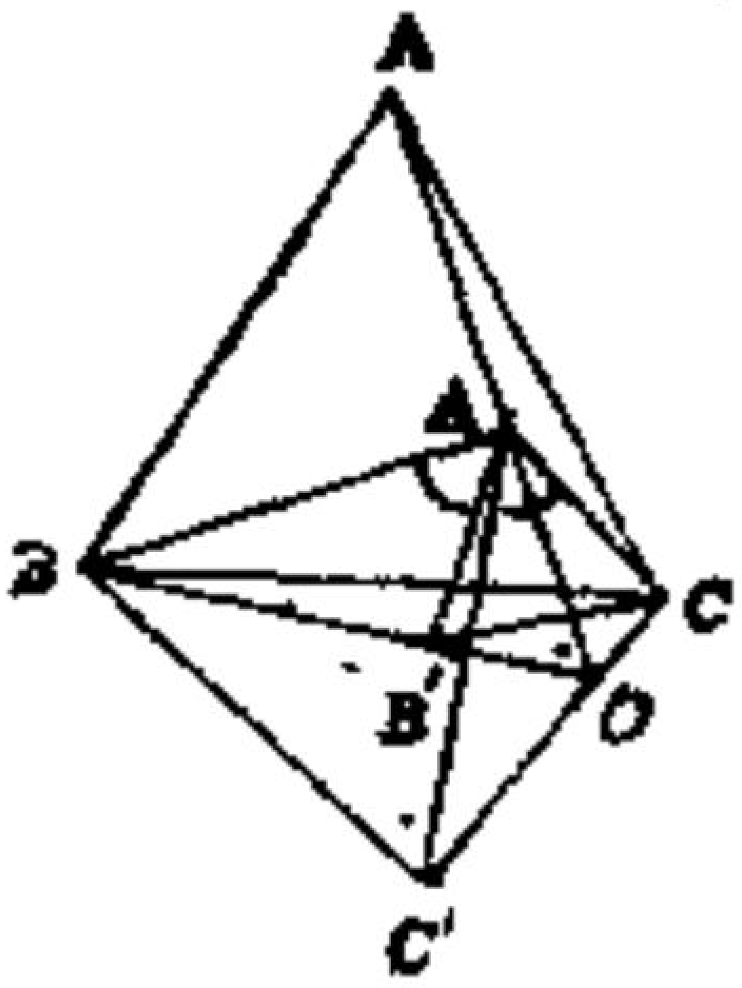


图 15—1

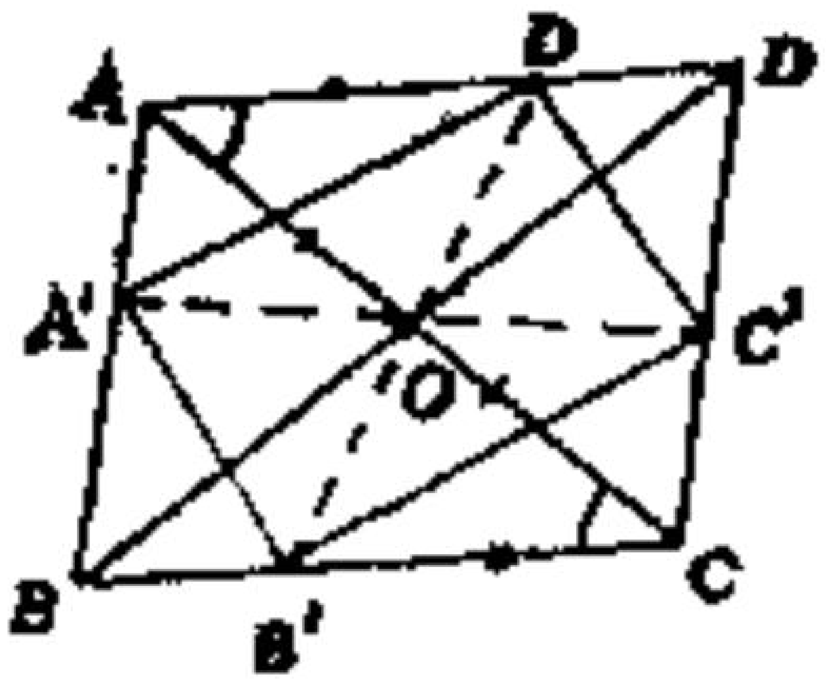


图 15—2

2．若一平行四边形的顶点分别落在他平行四边形每边所在直线上，则两平行四边形必共一中心．

提要：(1) $\triangle AA'D' \cong \triangle CC'B'$，

$\therefore$ $AD' = CB'$．

(2) $\triangle AOD' \cong \triangle COB'$

$\therefore$ $OB' = OD'$ 且 B'、O、D' 共线．

3．设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，M、N 各是 GB、GC 的中点。延长 AC 至 E，使 $CE = \frac{1}{2}AC$；又延长 AB 至 F，使 $BF = \frac{1}{2}AB$．求证：AG、ME、NF 三线共点．

提要：(1) 由 $\frac{AG}{GO} = \frac{AB}{BF} = \frac{2}{1}$，$\triangle AGB \backsim \triangle AOF$，

$\therefore$ $OF \parallel GB$．

(2) N、O 是 GC、BC 的中点，$\triangle CNO \backsim \triangle CGB$．

$\therefore$ $ON \parallel GB$．

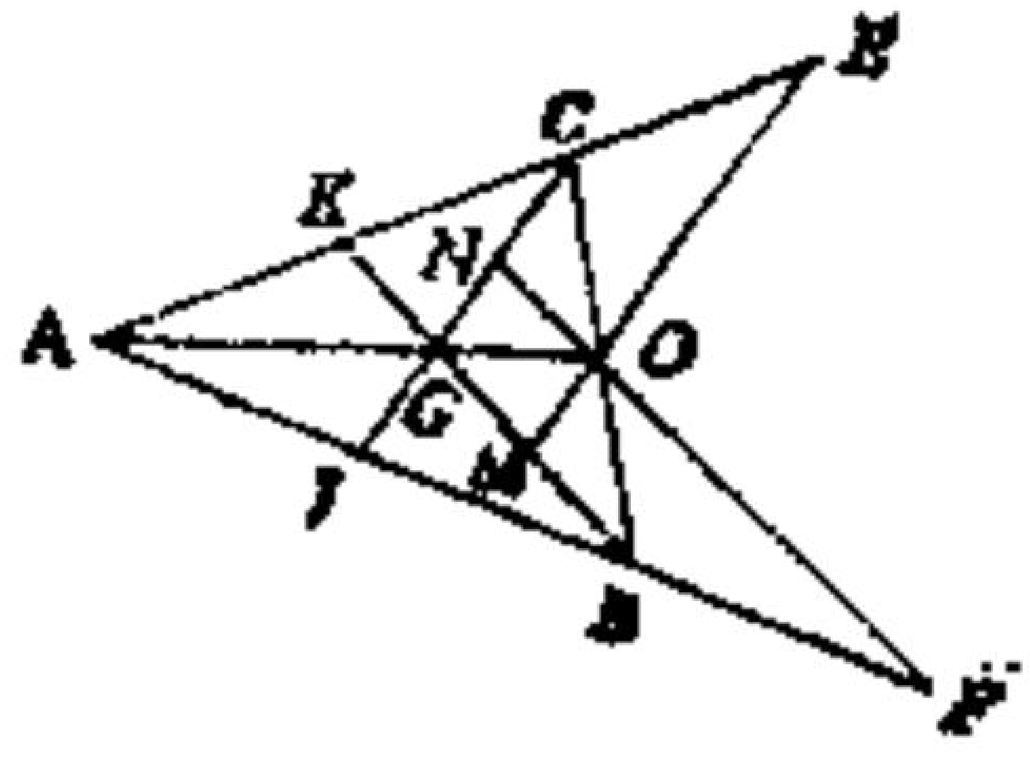


图 15—3

4．在△ABC中，直径为BC的圆交AB、AC于E、F
求证：自这两点所引该圆的切线与BC的高线共点．

提要：设H为△ABC的垂心，过F点的切线交AD于P．

∵ $\angle PFA=\angle FBC=\angle HAF$,

∴ P是AH的中点．

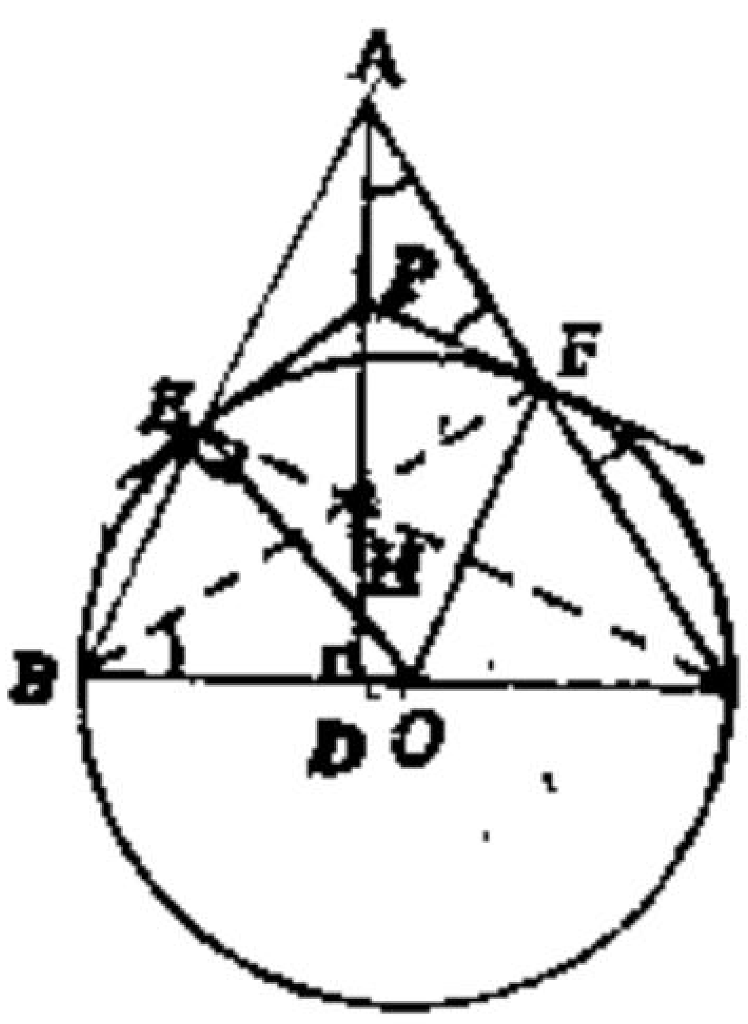


图15—4

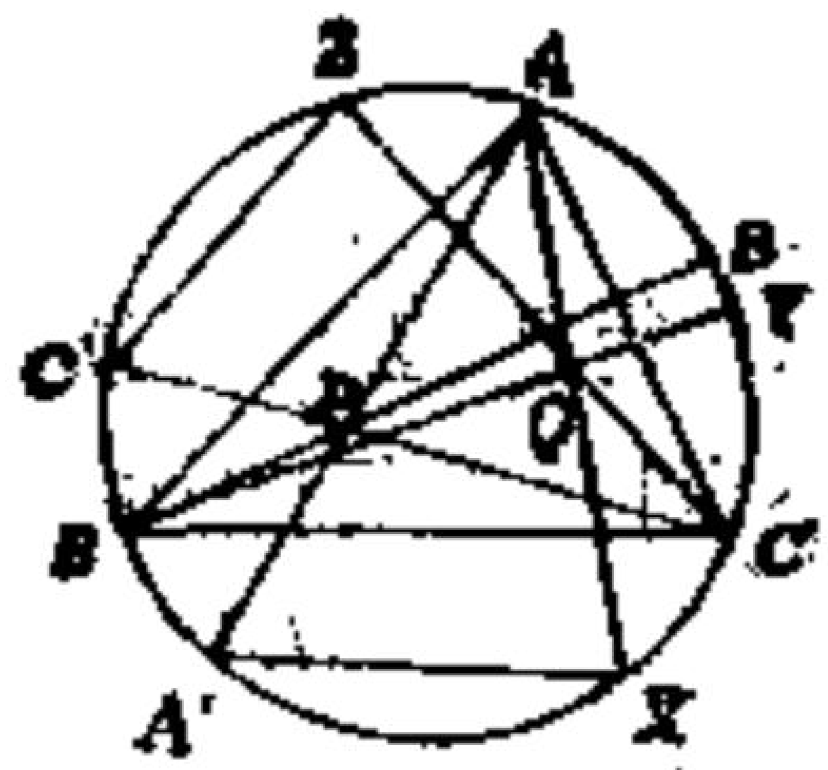


图15—5

5．已知一圆⊙ABC及不在这圆上的一点P，连AP、BP、CP交已知圆于A'、B'、C'．在此圆内作三弦$A'X$、$B'Y$、$C'Z$使分别平行于BC、CA、AB．
求证：AX、BY、CZ三线共点．

证：∵ $A'X\parallel BC$，$\angle BAA'=\angle CAX$，
即AA'与AX是$\angle BAC$的等角线．
同理BB'与BY是$\angle ABC$的等角线

CC'与CZ是$\angle BCA$的等角线．

即Q是P的等角共轭点．由例题42知AX、BY、CZ三线共点．

6. 两点在一三角形各角的内、外平分线上的射影共线，求证：三连线共点或互相平行.

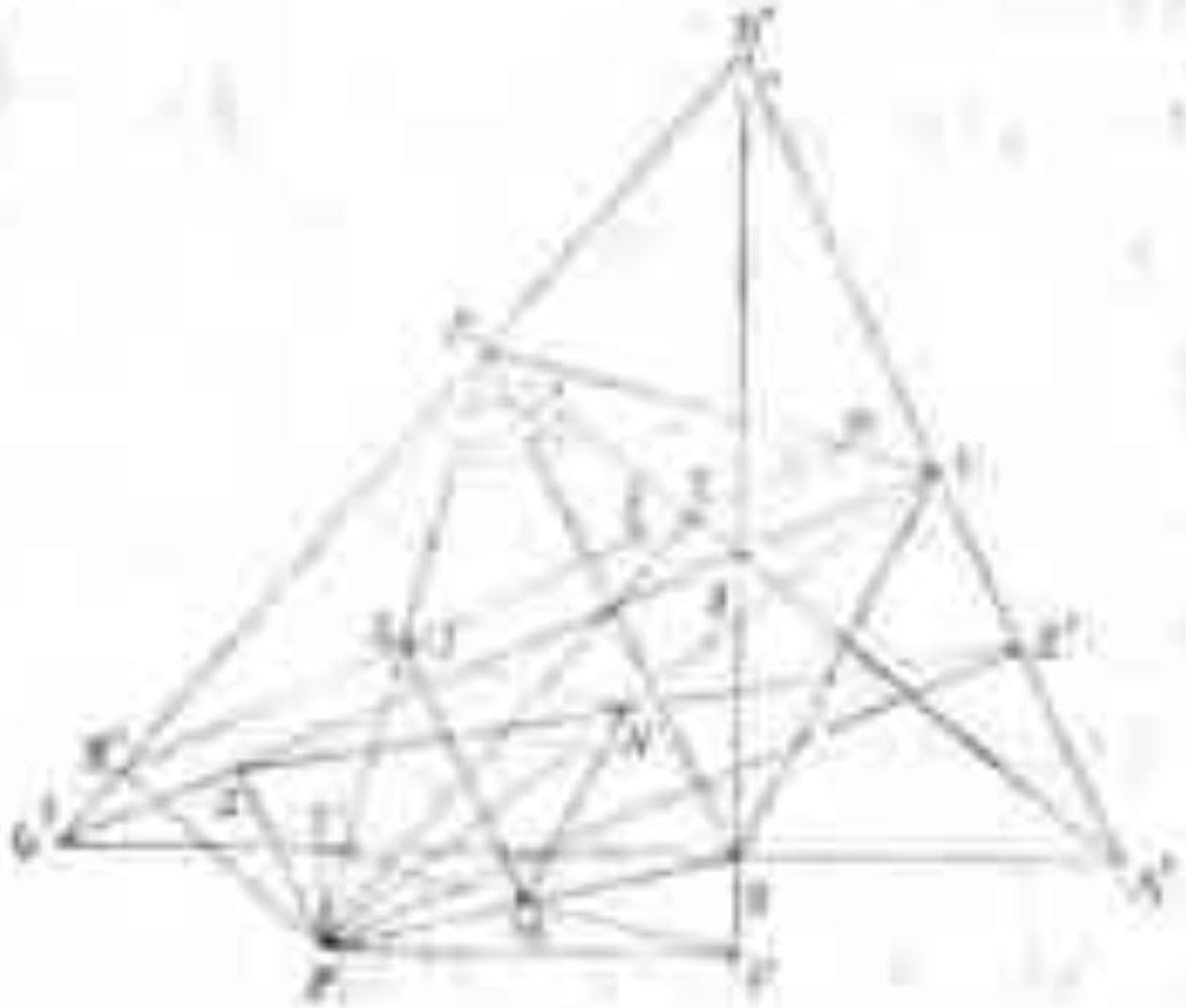


图6—6

证：L、M、N 为矩形 $PXAX'$、$PYBY'$、$PZCZ'$ 的中心.

则 $\angle PLM=\angle PAB=\angle LAX-\angle BAX=\angle LXA-\angle CAX$
$=\angle ADX=\angle XLN$.

故 XX' 与 PL 是 $\angle NLM$ 的等角线.

同理 YY' 与 PM 是 $\angle LMN$ 的等角线，ZZ' 与 PN 是 $\angle MNL$ 的等角线. 由问题4知，XX'、YY'、ZZ' 三线共点或互相平行.

7. 一点 P 在 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 所在直线上的射影为 X、Y、Z，设过这三点可作一圆，而这圆又交 BC、CA、AB 于 X'、Y'、Z'，则过此三点依次所作 BC、CA

AB 的垂线必共点。

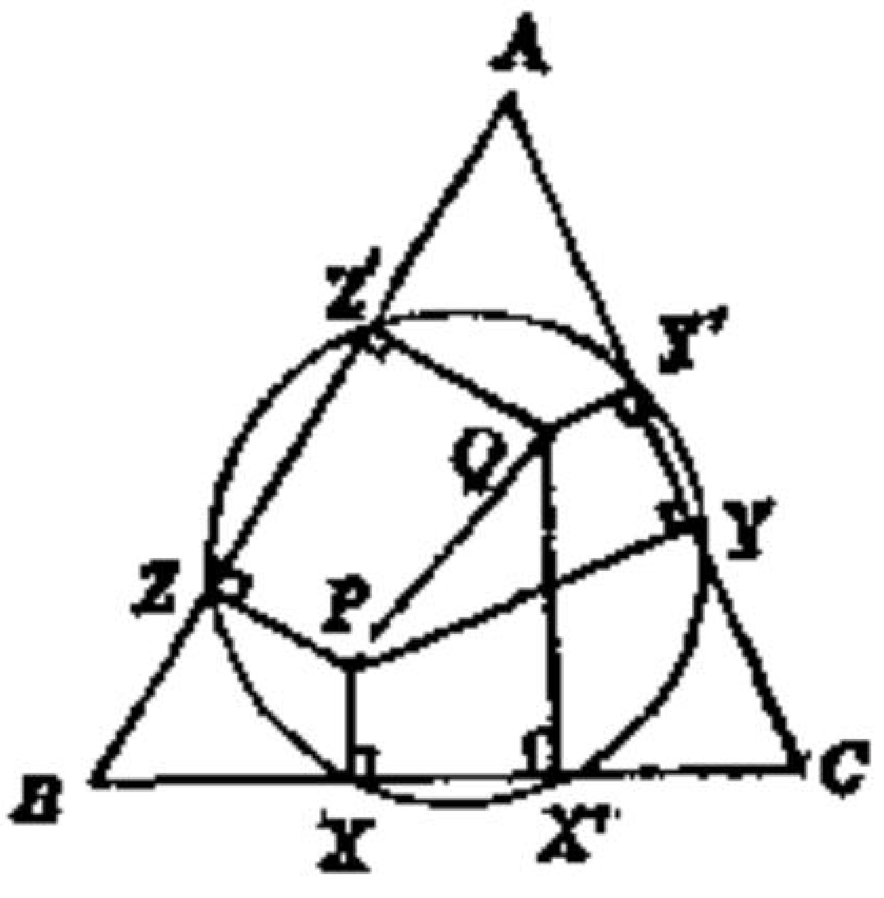


图 15—7

证：(1) $X'B-XB$

$=XC-X'C$,

$Y'C-YC=YA-Y'A$,

$ZA-Z'A=Z'B-ZB$.

(2) 以上三式两边平方后相加并适当整理得：

$$XB^2-XC^2+YC^2-YA^2+ZA^2-ZB^2+X'B^2-X'C^2$$
$$+Y'C^2-Y'A^2+Z'A^2-Z'B^2$$
$$=2[(XB\cdot X'B-ZB\cdot Z'B)+(YC\cdot Y'C-XC\cdot X'C)$$
$$+(ZA\cdot Z'A-YA\cdot Y'A)].$$

由于 X、X'、Y、Y'、Z、Z' 均是圆上的点，故等式右端为零．又由定理 148 得

$$X'B^2-X'C^2+Y'C^2-Y'A^2+Z'A^2-Z'B^2=0$$

故 QX'、QY'、QZ' 共点．

8．以一三角形的每边为一边向外边各作正方形，将三角形顶点与它对边上那个正方形的中心相连，求证这三连线共点。

证：由习题十二第10题知：

$O_1O_2\perp O_3C$，$O_2O_3\perp O_1A$，$O_3O_1\perp O_2B$.

故 O_1A、O_2B、O_3C 是$\triangle O_1O_2O_3$ 各边上的高，故共点．

9．在$\triangle ABC$ 的外边作正方形 $ABEF$、$ACGH$，并引 $AD\perp BC$．求证：(1) BH、CF、EG 三线共点；

(2) AD、BG、CE 三线共点

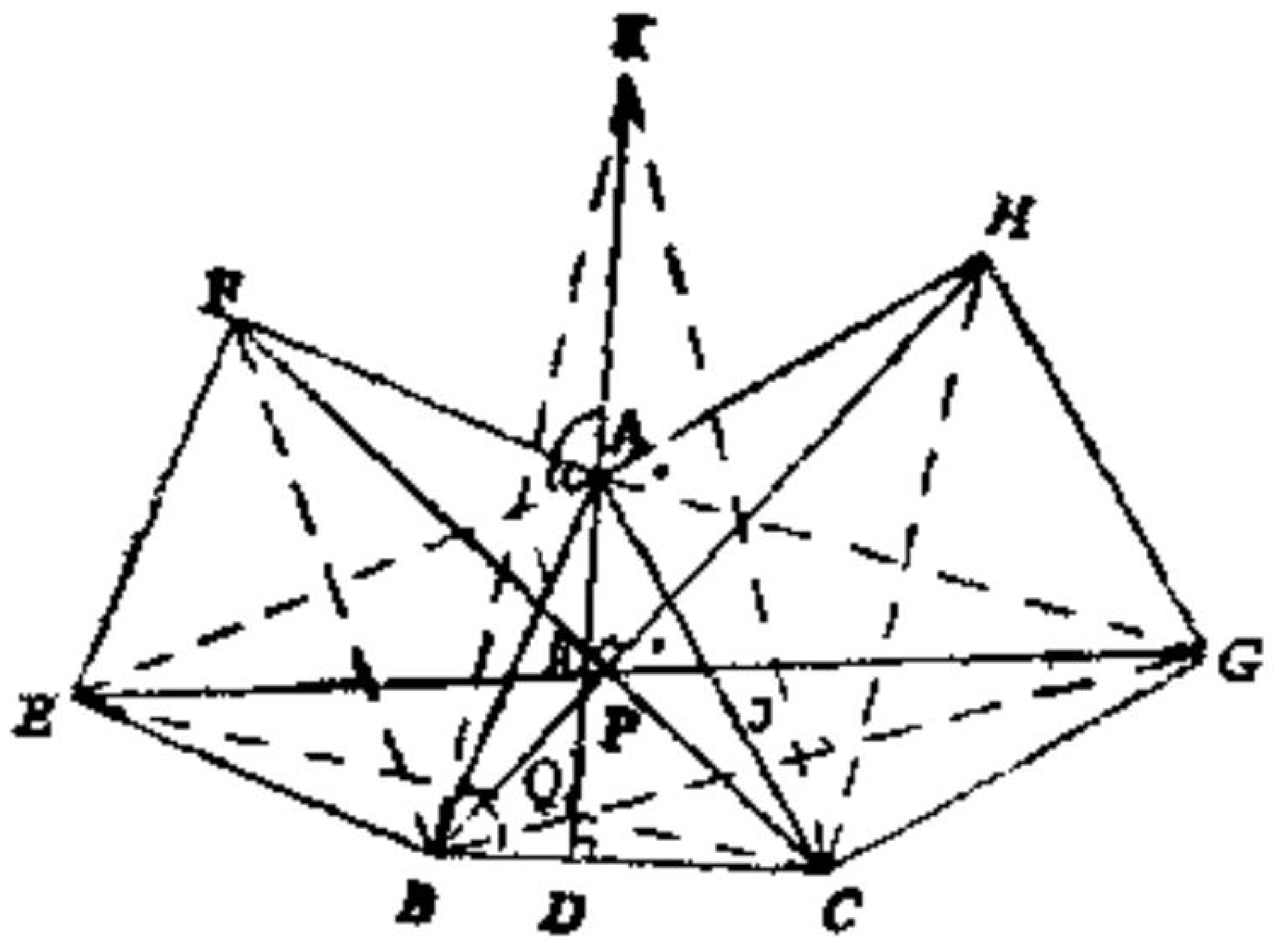


图 15—9

证：(1) 由习题十三第 6 题，$BH\perp CF$.
由 A、P、B、F 共圆，得 $\angle EPF=\angle EAF=45^\circ$，
同理 $\angle GPH=\angle GAH\quad 45^\circ$.
故 E、P、G 共线

(2) 延长 DA 至 K，使 $AK=BC$，则 $\angle KAF=\angle ABC$、
$\therefore\quad \triangle ABK\cong\angle BEK$，$\triangle ACK\cong\triangle CGB$，
$\angle ABK=\angle BEK$，$\angle ACK=\angle CGB$.

(3) $\angle CGJ+\angle CJG=90^\circ$，
$\therefore\quad \angle ACK+\angle CJG=90^\circ$，有
$BG\perp KC$，$CE\perp KB$.
即 KD、CE、BG 是 $\triangle KBC$ 的三高线.

10. 设 H 是 $\triangle ABC$ 垂心，又一直线 l 交 BC、CA、AB 于 X、Y、Z，则过 A、B、C、H 各向 HX、HY、HZ、l 所作的垂线共点

证：(1) 设 HH' 交 XX' 于 P，连 PY'、PZ'。因 A、X、D、X'；A、E、D、C；C、Z、F、Z' 各四点共圆，有

$HX\cdot HX'=HA\cdot HD=HC\cdot HF=HZ\cdot HZ'$，

故 X、X'、Z、Z' 四点共圆。

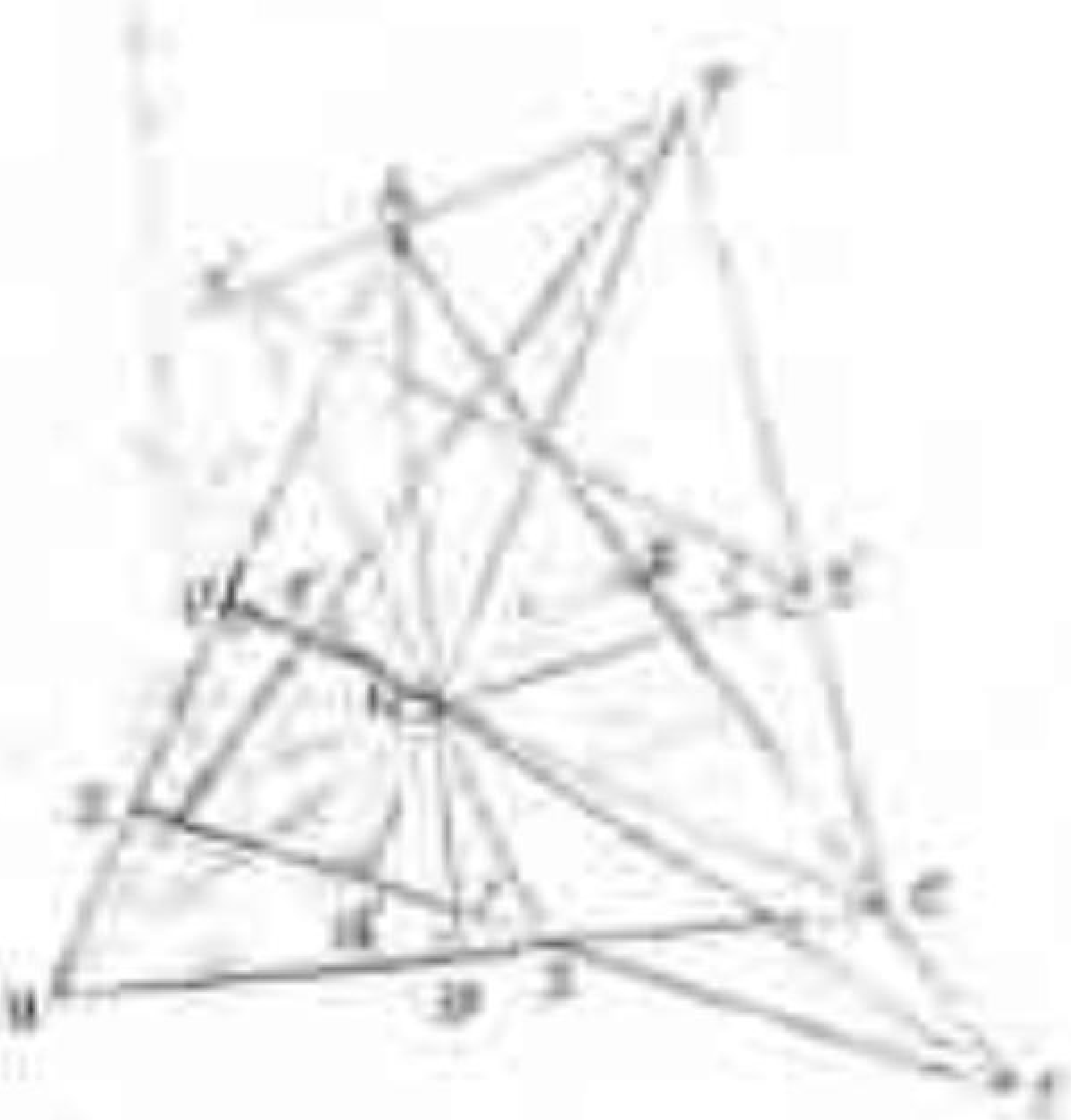


图15—10

$\therefore\ \angle X'Z'Z=\angle HXH'=\angle HPX'$。

(2) 由 P、X'、H、Z' 四点共圆，

$\therefore\ \angle PZ'H=\angle PX'H=90^\circ$，有 C、Z'、P 共线。

11. 过△ABC 的顶点 A、B、C 各引一直线使交于一点 O，且分别交 BC、CA、AB 于 A'、B'、C'，则△ABC 与△$A'B'C'$ 的对应边的中点连线共点。

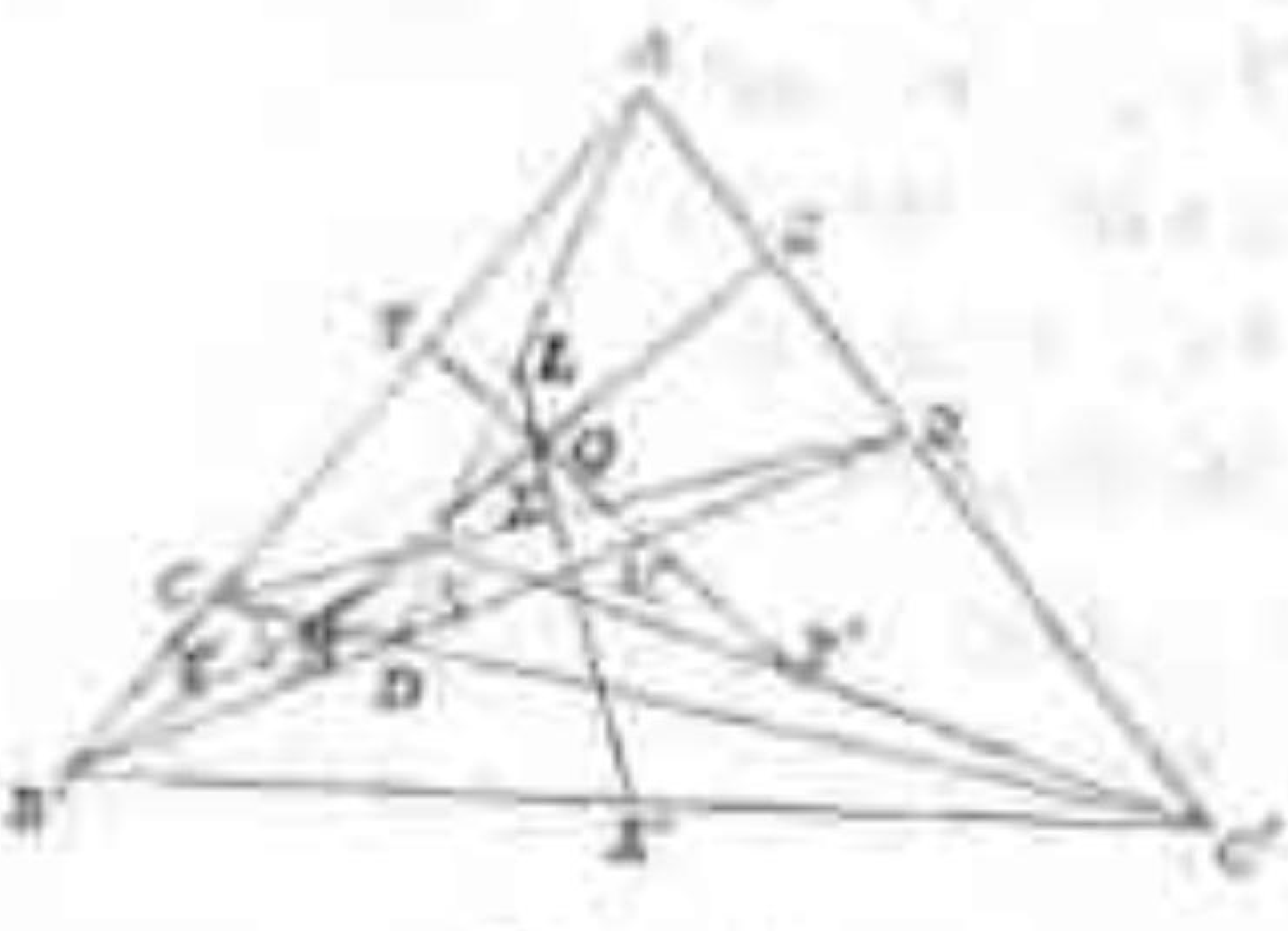


图15—11

证：(1) XX' 交 AD 于 L，YY' 交 BD 于 M，ZZ' 交 CD 于 N。在完全四边形 $ADBCB'C'$ 中，X、X' 是其对角线

DF、$P'C'$ 的中点。由习题十四第23题知，L 是 AD 的中点。

(三) 由例题41知，XL、YM、ZN 共点于 Q，即 XX'、YY'、ZZ' 共点于 Q。

12. 在一四边形中，若有一双对角的平分线与他对角线共点，则他双对角的平分线也与另一对角线共点。

证 设 AQ、CQ 为 $\angle A$、$\angle C$ 的平分线且 Q 点在 BD 上，则

$$\frac{AB}{AD}=\frac{QB}{QD}=\frac{CB}{CD},$$

$$\therefore \frac{AB}{CB}=\frac{AD}{CD}.$$

由定理112可得本题结论。

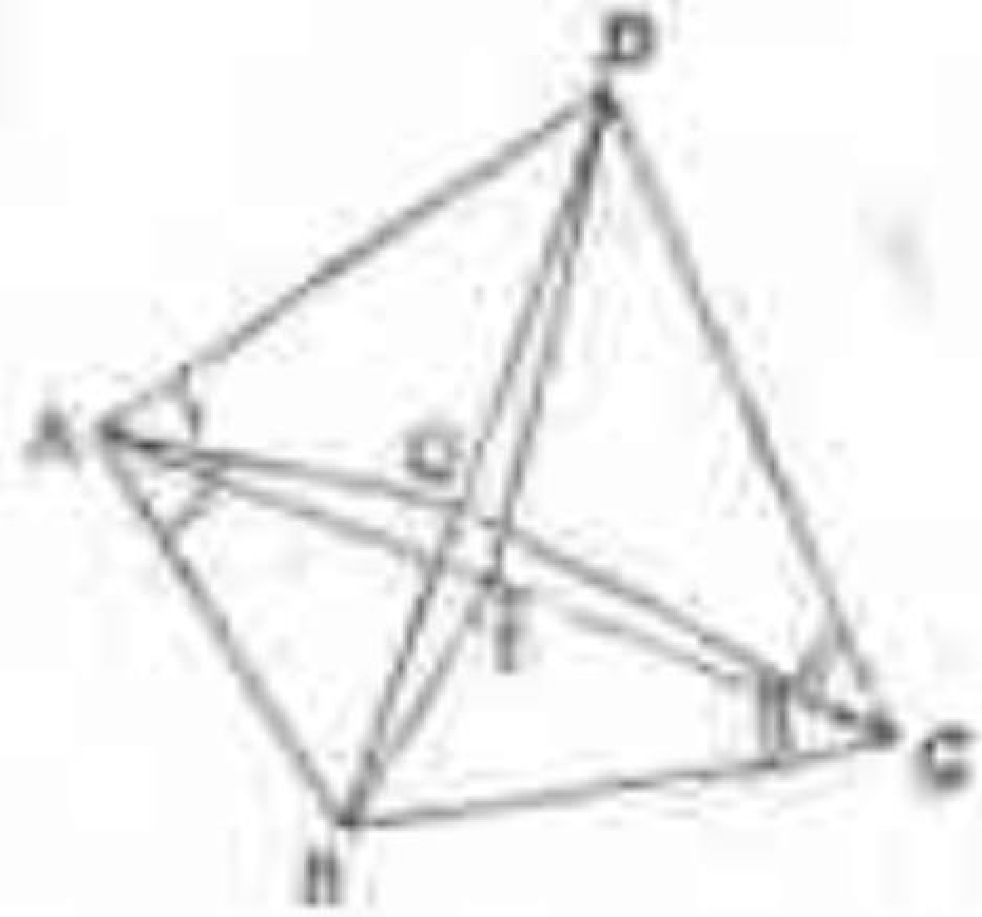


图15—12

13. AB 是某圆的直径，AA'、BB'、$A'B'$ 都是这圆的切线，C 是 $A'B'$ 上的切点，作 $CD\perp AB$，则 CD、AB'、BA' 三线共点。

提示：$A'B$、AB' 都经过 CD 的中点。

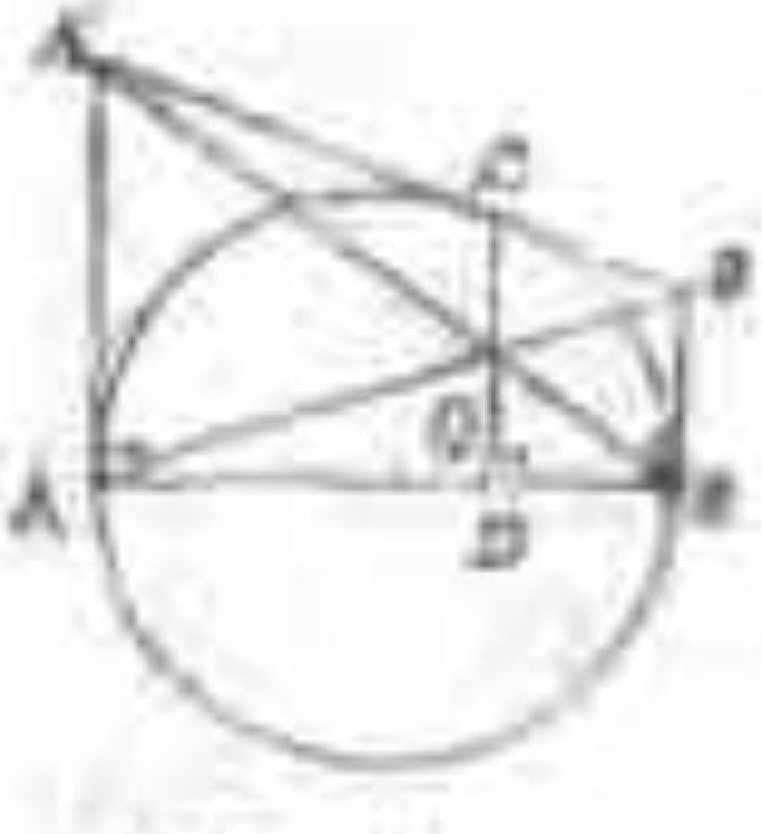


图15—13

14. $\triangle ABC$ 中，设 BC 边在 A 角的外角平分线上的射影为 $B'C'$，则 BC'、CB' 与 A 角的平分线共点。

证 (1) 设 BC'、$B'C$ 相交于 Q，则 $\triangle B'BQ\backsim\triangle CC'Q$。

∴ $$\frac{B'B}{CC'}=\frac{BQ}{C'Q}$$

(2) $\triangle B'BA\backsim\triangle C'CA$,

∴ $$\frac{B'B}{C'C}=\frac{B'A}{C'A}$$

于是 $$\frac{B'A}{C'A}=\frac{BQ}{C'Q}$$,

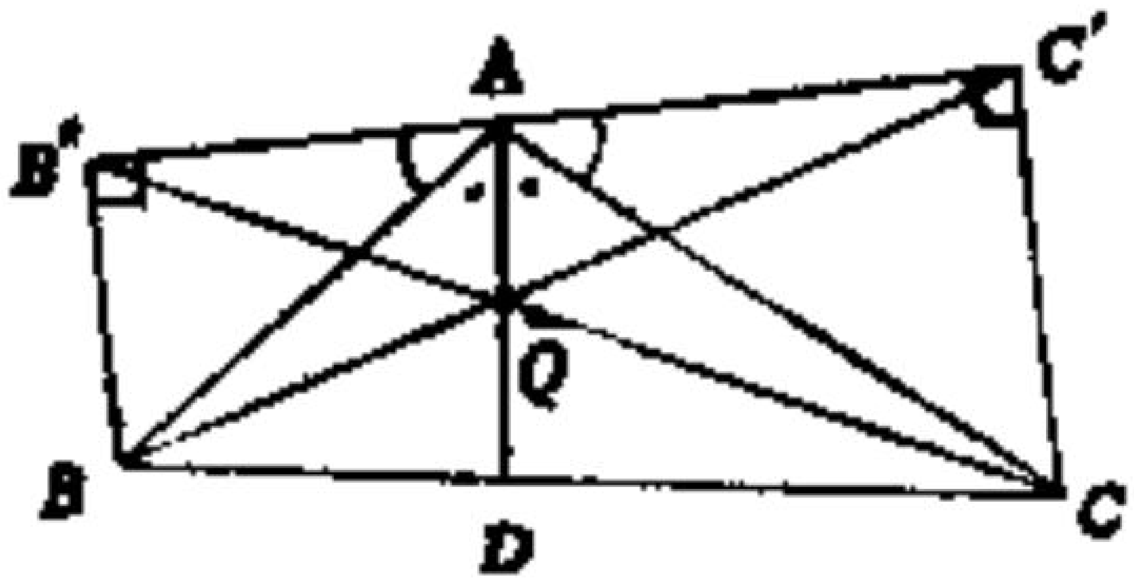


图15—14

∴ $AQ\parallel B'B$，有 $AQ\perp B'C'$，

故 AQ 为 $\angle BAC$ 的内角平分线.

15. 设 X、Y、Z 各是 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 或其延长线上的点，则 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle ABC$ 共重心的必要且充分的条件为：$$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}=\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}=\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \qquad ①$$

提要：(1) M 是 BC 的中点．作 X 关于 M 的对称点 X'．当等式①成立时，

$$\frac{X'C}{X'B}=\frac{XB}{XC}=\frac{YC}{YA}=\frac{ZA}{ZB},$$

∴ $YX'\parallel AB$，$ZX'\parallel AC$，故 $AZX'Y$ 是平行四边形，N 是 YZ 与 AX' 的中点.

(2)：在 $\triangle AXX'$ 中，AM 交 XN 于 G，即 G 是 $\triangle AXX'$ 的重心．有 $AG=2GM$、$XG=2GN$．故 G 是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle XYZ$ 的公共重心．即条件①是充分条件.

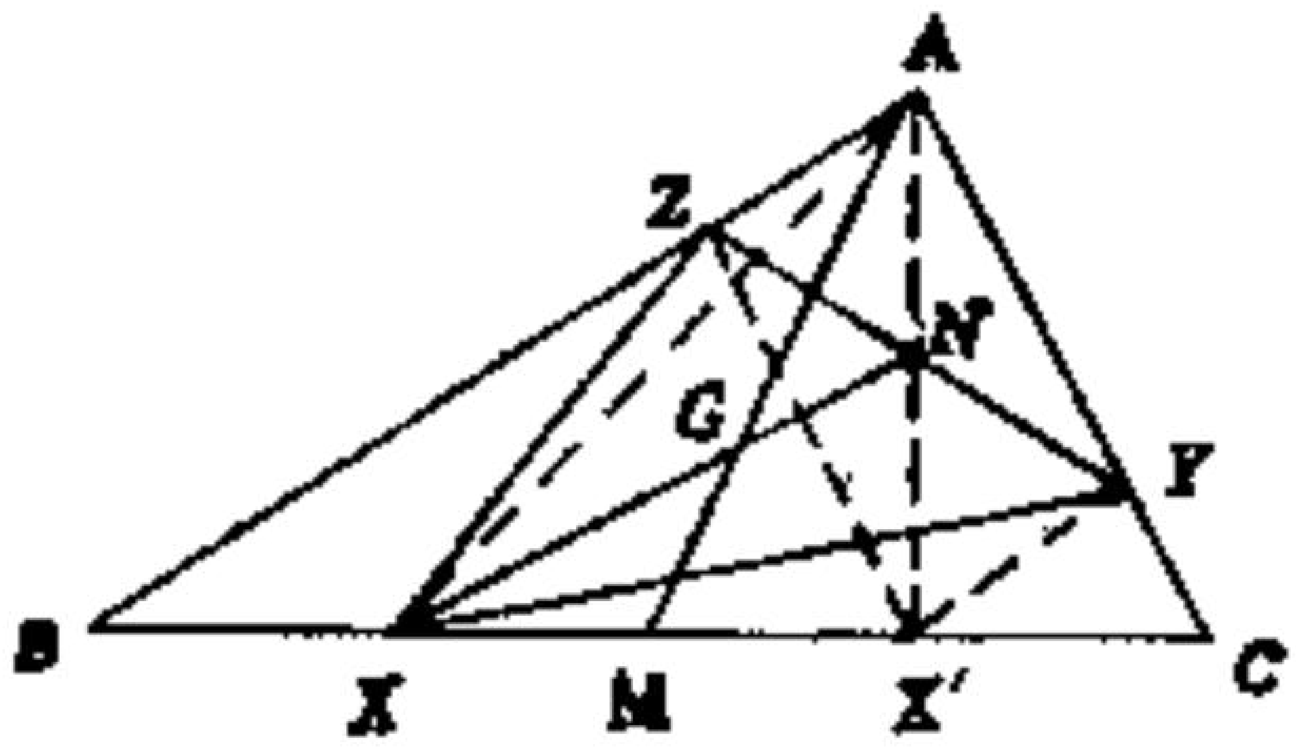


图15—15

(3)：设 AM、XN 是 $\triangle ABC$、$\triangle XYZ$ 的中线，G 是它们的公共重心，则

$$\frac{AG}{GM}=\frac{XG}{GN}=\frac{2}{1}. \quad \text{故 } MN \underline{\parallel} \frac{1}{2}AX.$$

(4)：设 AN 交 BC 于 X'，则 N 是 AX' 与 YZ 的公共中点，故 $AZX'Y$ 是平行四边行，且 $MX = MX'$．故条件①成立．即条件①是必要的．

16．设 X、Y、Z 各是 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 上的点，合于 $\frac{XB}{XC}=\frac{AB^2}{AC^2}$、$\frac{YC}{YA}=\frac{BC^2}{BA^2}$、$\frac{ZA}{ZB}=\frac{CA^2}{CB^2}$，则 AX、BY、CZ 三线会于 $\triangle ABC$ 的陪位重心．

证：(1) 过 C 作 BC 边的逆平行线 CD，设 M 是 CD 的中点．连 AM 交 BC 边于 X，由定理149知 AX 是 BC 边的陪位中线，且有 $\triangle ACB \backsim \triangle ADC$，

$$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}, \text{即}$$

$$AD=\frac{AC^2}{AB} \qquad ①$$

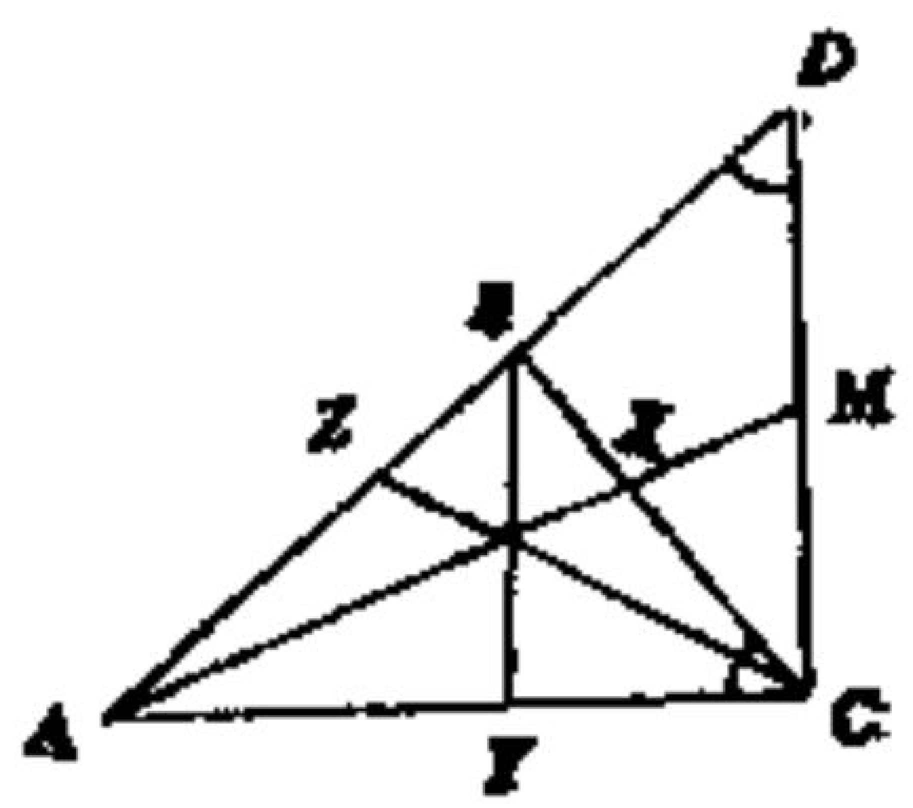


图15—16

(2)：关于 $\triangle BCD$ 与截线 AXM，有

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{MC}{MD}\cdot\frac{AD}{AB}=1.$$

将①代入并约去 MC、MD，得

$\frac{XB}{XC}=\frac{AB^2}{AC^2}$，即点 X 合于题设条件．

(3)：同理得 BY、CZ 也是陪位中线．故三线会于 $\triangle ABC$ 的陪位重心．

17．在 $\triangle ABC$ 的外边作正方形 $BCPP'$、$CAQQ'$、$ABRR'$，设 QQ' 与 RR'、RR' 与 PP'、PP' 与 QQ' 的交点各为 X、Y、Z，则 AX、BY、CZ 三线会于 $\triangle ABC$ 的陪位重心

按这个方法求三角形的陪位重心，称为格列伯(Grebe，1804—1874年)的图法。

证：(1) 由P.122例题1已知，当$AD\perp R'Q$交BC于M时，AM是BC上的中线。

(2) 设XA交BC于L，

∵ $\angle R'AD$、$\angle XR'Q$均与$\angle AR'D$互余及X、R'、A、Q四点共圆，

∴ $\angle DAR'=\angle XR'Q=\angle XAQ$，

∴ $\angle R'AX=\angle QAD$；而$\angle LAB$与$\angle MAC$分别与$\angle R'AX$、$\angle QAD$互余

∴ $\angle LAB=\angle MAC$

故AX是BC边上的陪位中线。

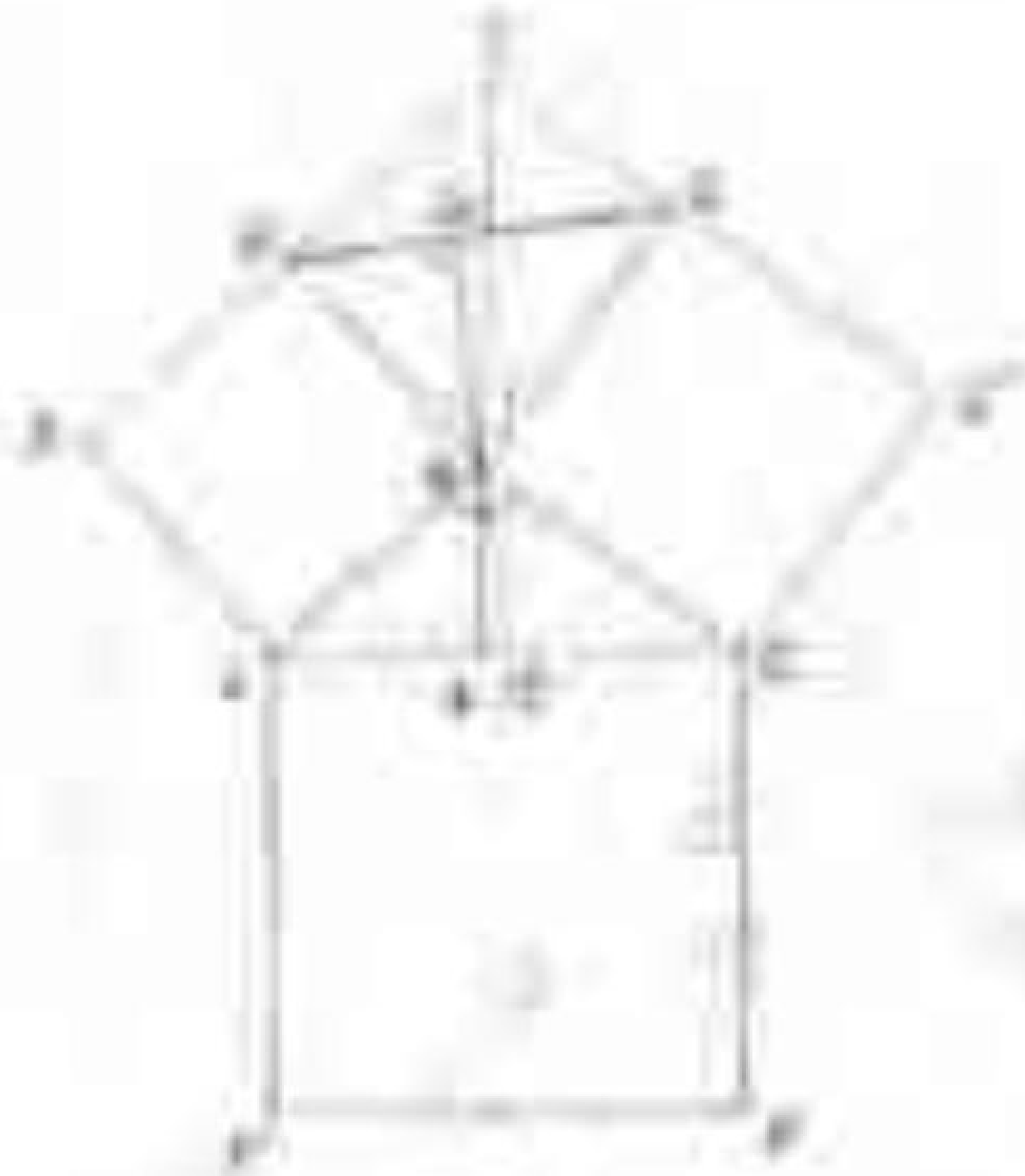


图15—17

同理，BY、CZ亦系陪位中线，故三线会于$\triangle ABC$的陪位重心。

7. 过三角形的顶点作外接圆的切线，设交成一个三角形，则这三角形与原三角形是透视的，而且透视中心是原三角形的陪位重心。

提示：(1) 过X作$DE\parallel YZ$，

则$\angle ACB=\angle EAZ=\angle BED$

且 $XE=XB=XC=XD$

故DE是BC的逆平行线且X是DE的中点，故AX是陪位中线。

(2) AX、BY、CZ会于$\triangle ABC$的陪位重心G'，且G'为透视中心。

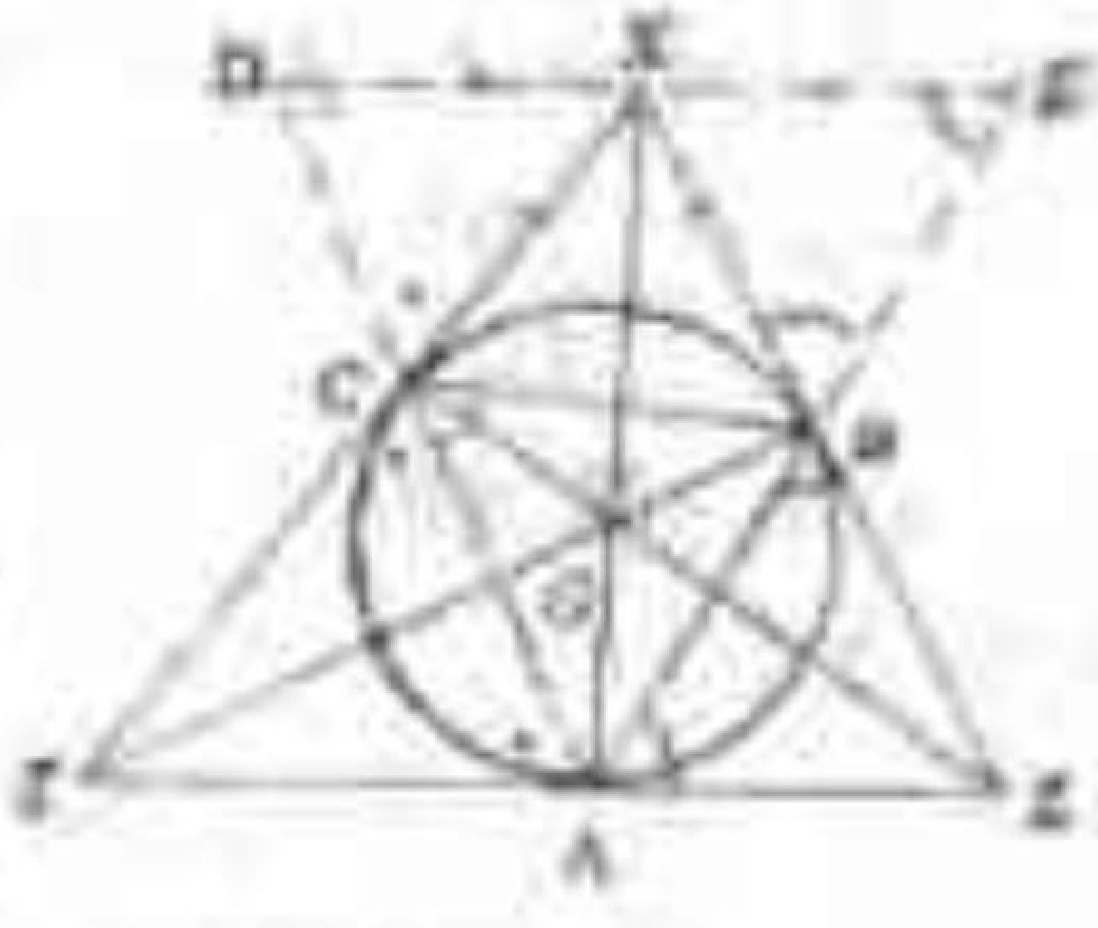


图15—18

19. 若自三角形的顶点向一直线作垂线，则由各垂足分别向对边所作的垂线共点.

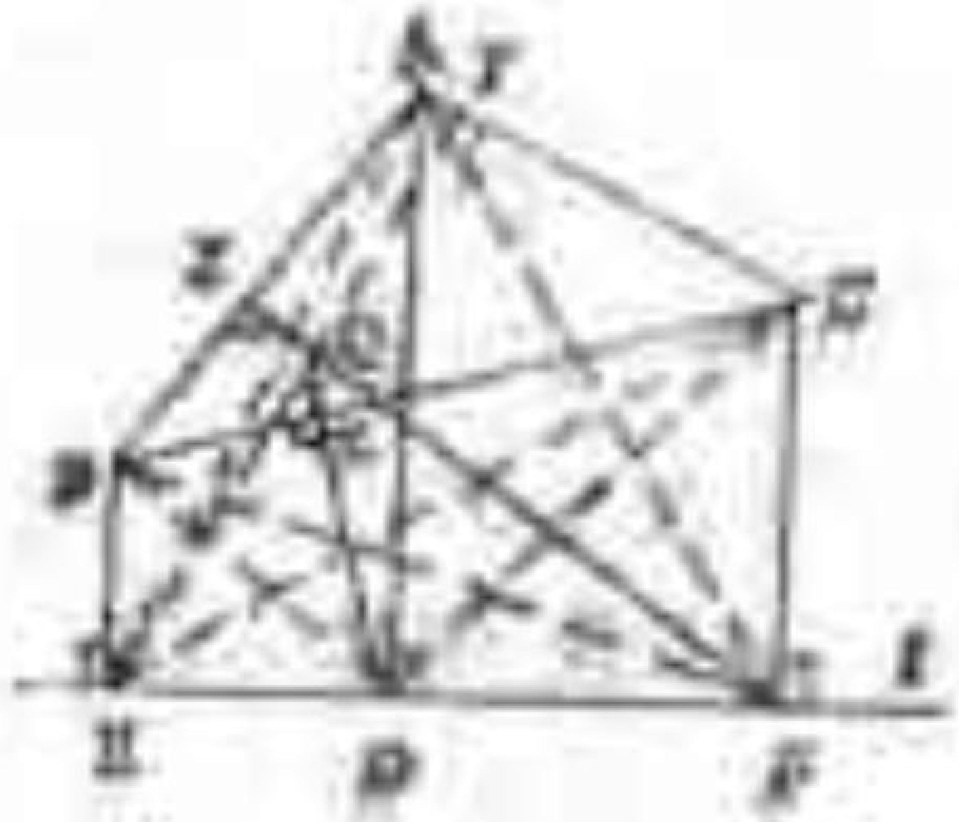


图15—19

证：由Rt△XBD，Rt△XCD，

$XB^2-XC^2=DB^2-DC^2$

由直角△YCE，直角△YAE，

$YC^2-YA^2=EC^2-EA^2$.

由直角△ZAF，直角△ZBF，

$ZA^2-ZB^2=FA^2-FB^2$.

三式相加，

$XB^2-XC^2+YC^2-YA^2+ZA^2-ZB^2$

$=DB^2+EC^2+FA^2-(DC^2+EA^2+FB^2)$

$=[(DB^2+BE^2)+(EF^2+CF^2)+(FD^2+AD^2)]$

$-[(CE^2+FD^2)+(AD^2+DE^2)+(BE^2+EF^2)]=0$

由定理148，XD、YE、ZF共点于Q.

20. 有两三角形△ABC与△A'B'C'，设自A、B、C各向B'C'、C'A'、A'B'所作的垂线共点，则自A'、B'、C'各向BC、CA、AB所作的垂线亦共点.

证：∵ $A'X\perp BC$，

$B'Y\perp CA$，

$C'Z\perp AB$，

∴ $X'B^2-X'C^2=A'B^2-A'C^2$

$Y'C^2-Y'A^2=B'C^2-B'A^2$

$Z'A^2-Z'B^2=C'A^2-C'B^2$

三式相加得：

$X'B^2-X'C^2+Y'C^2-Y'A^2$

$+Z'A^2-Z'B^2$

$=A'B^2+B'C^2+C'A^2-(A'C^2+B'A^2+C'B^2)$

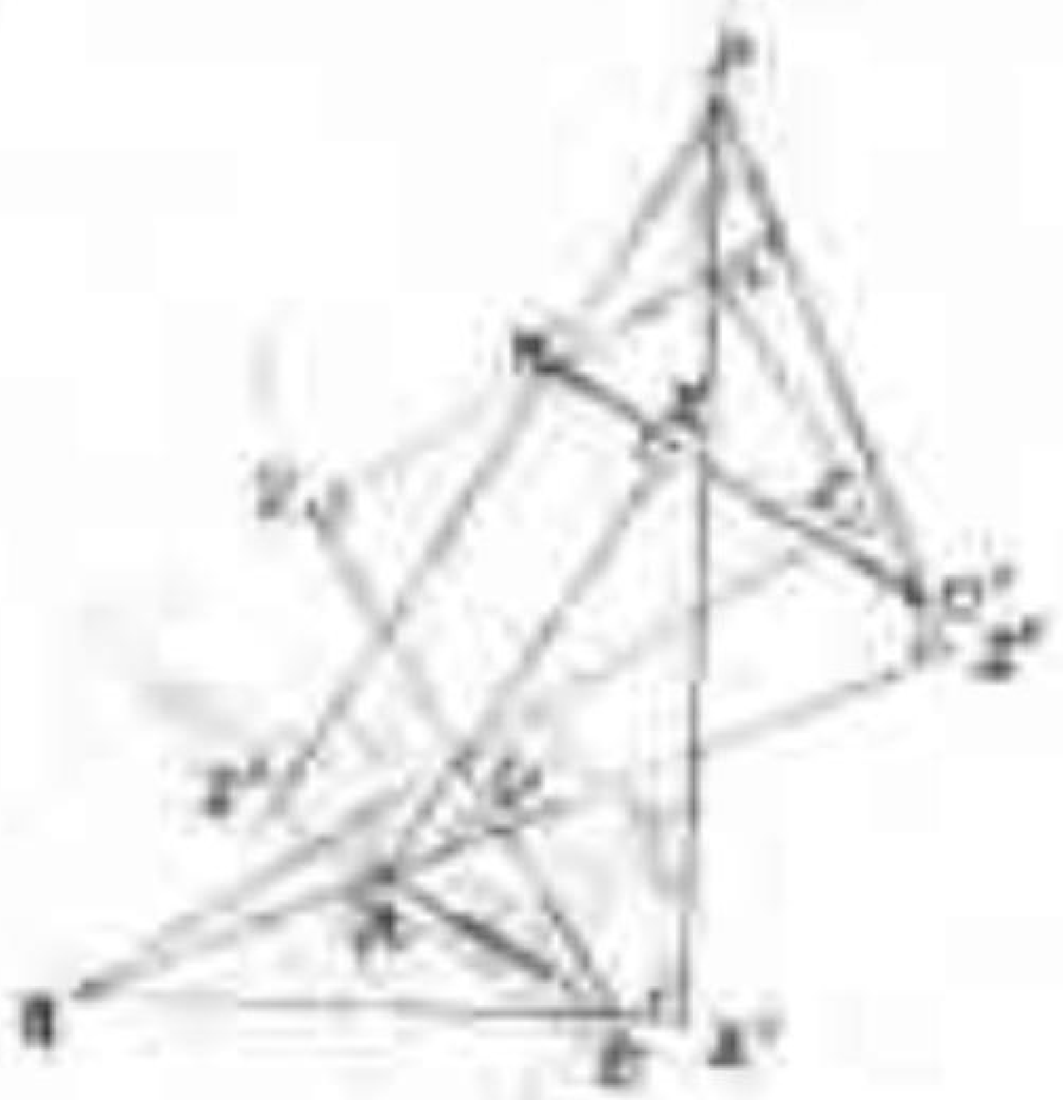


图15—20

$=(YA'^2+YB^2)+(ZB'^2+ZC^2)+(XC'^2+XA^2)$

$-[(ZA'^2+ZC^2)+(XB'^2+XA^2)+(YC'^2+YB^2)]$

$=XC'^2-XB'^2+YA'^2-YC'^2+ZB'^2-ZA'^2=0.$

故 $A'X'$、$B'Y'$、$C'Z'$ 共点.

21．设P点在$\triangle ABC$三边BC、CA、AB所在直线上的射影为X、Y、Z，则自YZ、ZX、XY的中点各向BC、CA、AB所作的垂线共点.

证：引用定理132中线公式：

$$m_a^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\frac{1}{4}a^2.$$

由 $DX'\perp BC$，$EY'\perp CA$，$FZ'\perp AB$.

$$\therefore\ X'B^2-X'C^2=BD^2-CD^2=\frac{1}{2}(BZ^2+BY^2)-\frac{1}{4}YZ^2-\left[\frac{1}{2}(CY^2+CZ^2)-\frac{1}{4}YZ^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(BY^2+BZ^2-CY^2-CZ^2).$$

同理 $Y'C^2-Y'A^2=\frac{1}{2}(CZ^2+CX^2-AZ^2-AX^2)$

$Z'A^2-Z'B^2=\frac{1}{2}(AX^2+AY^2-BX^2-BY^2)$

三式相加得 $X'B^2-X'C^2+Y'C^2-Y'A^2+Z'A^2-Z'B^2$

$$=\frac{1}{2}(XC^2-XB^2+YA^2-YC^2+ZB^2-ZA^2)=0.$$

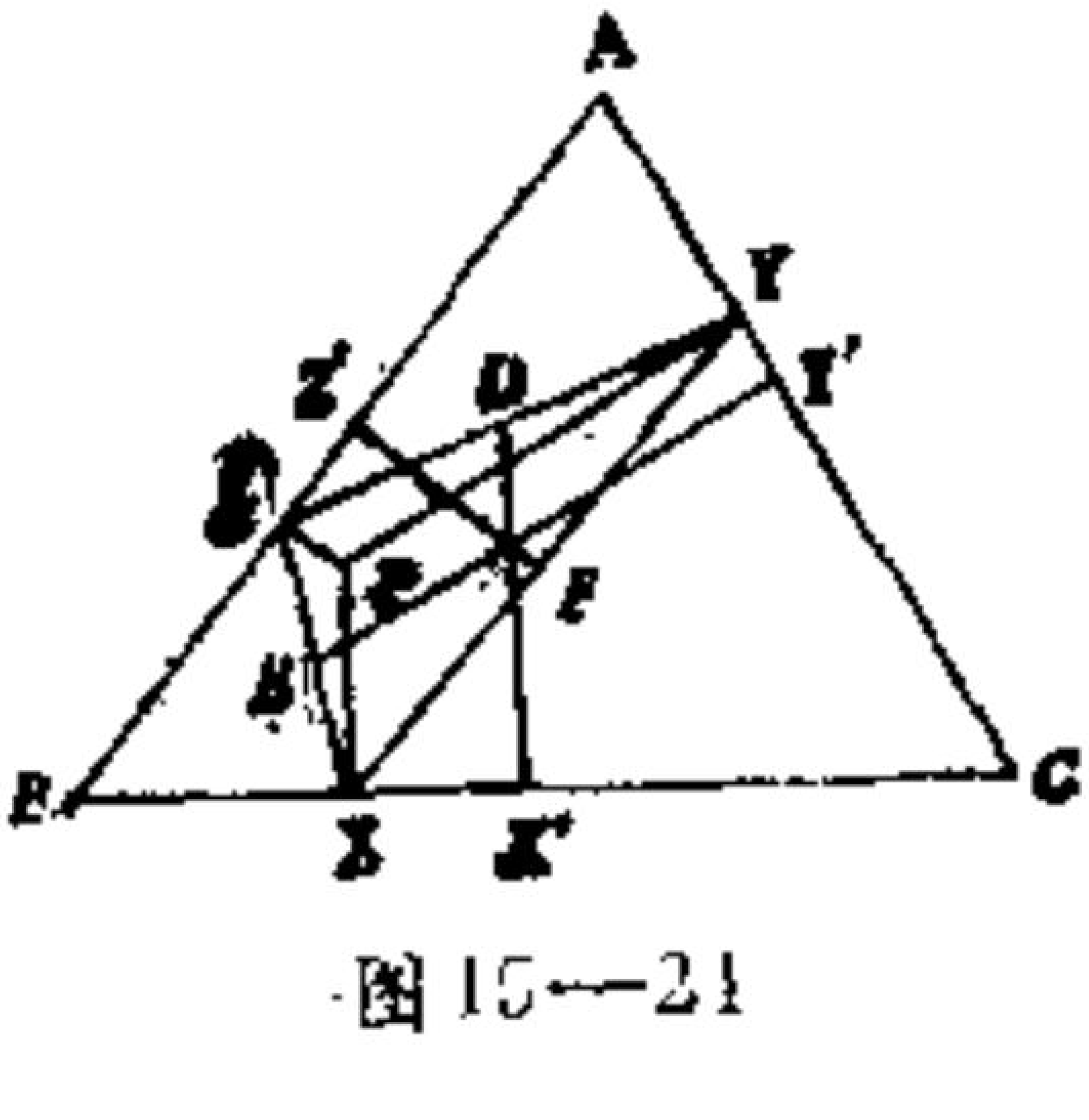


图15—21

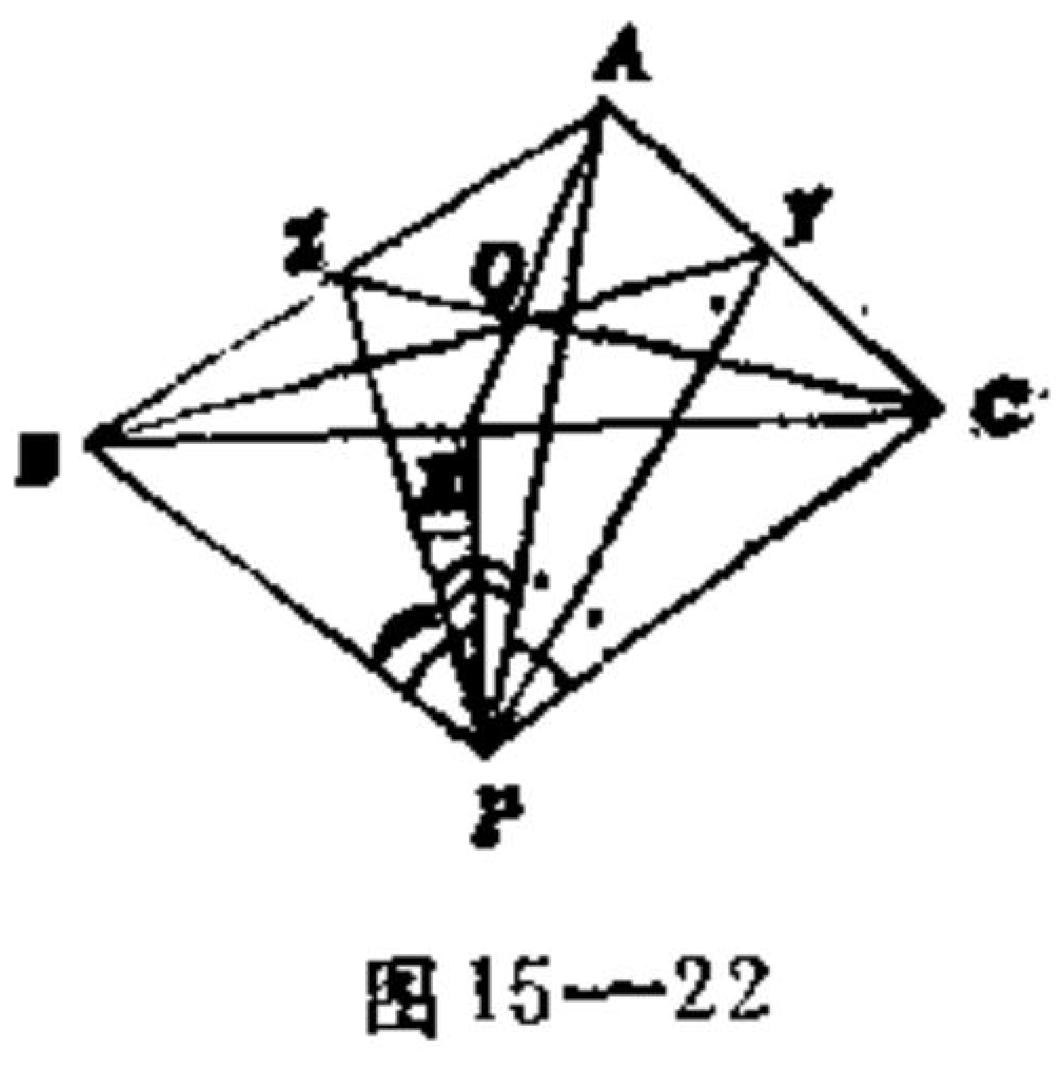


图15—22

22　将一点P与$\triangle ABC$的顶点相连，设$\angle BPC$、$\angle CPA$、$\angle APB$的平分线各交BC、CA、AB于X、Y、Z．则AX、BY、CZ三线共点．

证．由内角平分线定理

$$\frac{BX}{XC}=\frac{PB}{PC},\quad \frac{CY}{YA}=\frac{PC}{PA},\quad \frac{AZ}{ZB}=\frac{PA}{PB}$$

三式相乘　$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=-1$

由塞瓦定理，AX、BY、CZ共点．

23　在$\triangle ABC$中，X与X'、Y与Y'、Z与Z'各是BC、CA、AB上的等截点，设AX、BY、CZ三线会于一点P，则AX'、BY'、CZ'三线会于一点P'或互相平行．

当P与P'存在时，我们把它们叫做$\triangle ABC$的等截共轭点，有时也说它们关于$\triangle ABC$互为等截共轭点．

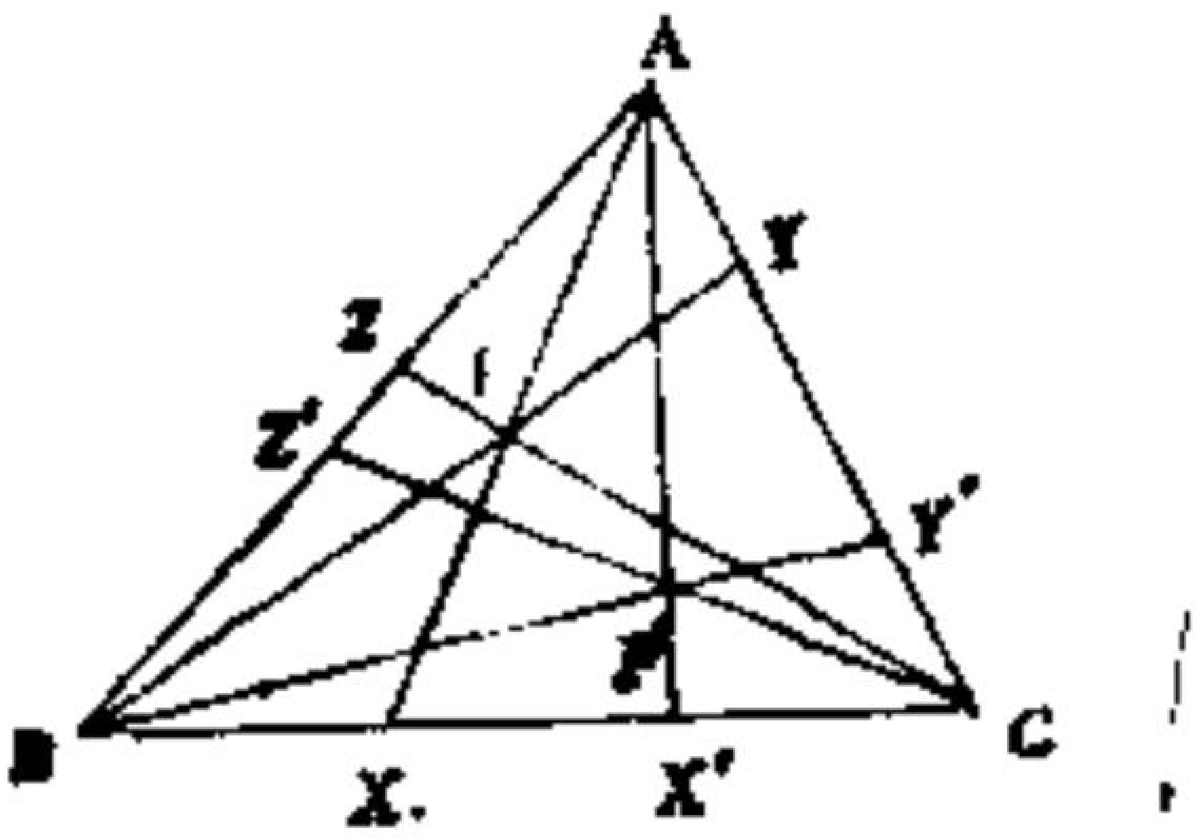


图15—23

证：$\frac{\overline{X'C}}{\overline{X'B}}\cdot\frac{\overline{Y'C}}{\overline{Y'A}}\cdot\frac{\overline{Z'A}}{\overline{Z'B}}$

$=\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}$

$=-1$，

故AX'、BY'、CZ'或会于一点P'或互相平行．

24．设$\odot I$是$\triangle ABC$的内切圆或旁切圆，它切BC、CA、AB于X、Y、Z，则AX、BY、CZ三线共点．

这样的点共四点，称为$\triangle ABC$的葛尔刚（Gergonne）点．这四点的等截共轭点是存在的，它们叫做$\triangle ABC$的奈

格耳（nagel）点．三角形的每个奈格耳点与任一顶点的连线，都分别通过一个葛耳刚点（参看复习题一第13题）

提要：$\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}$

$\frac{\overline{XB}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{YA}}$

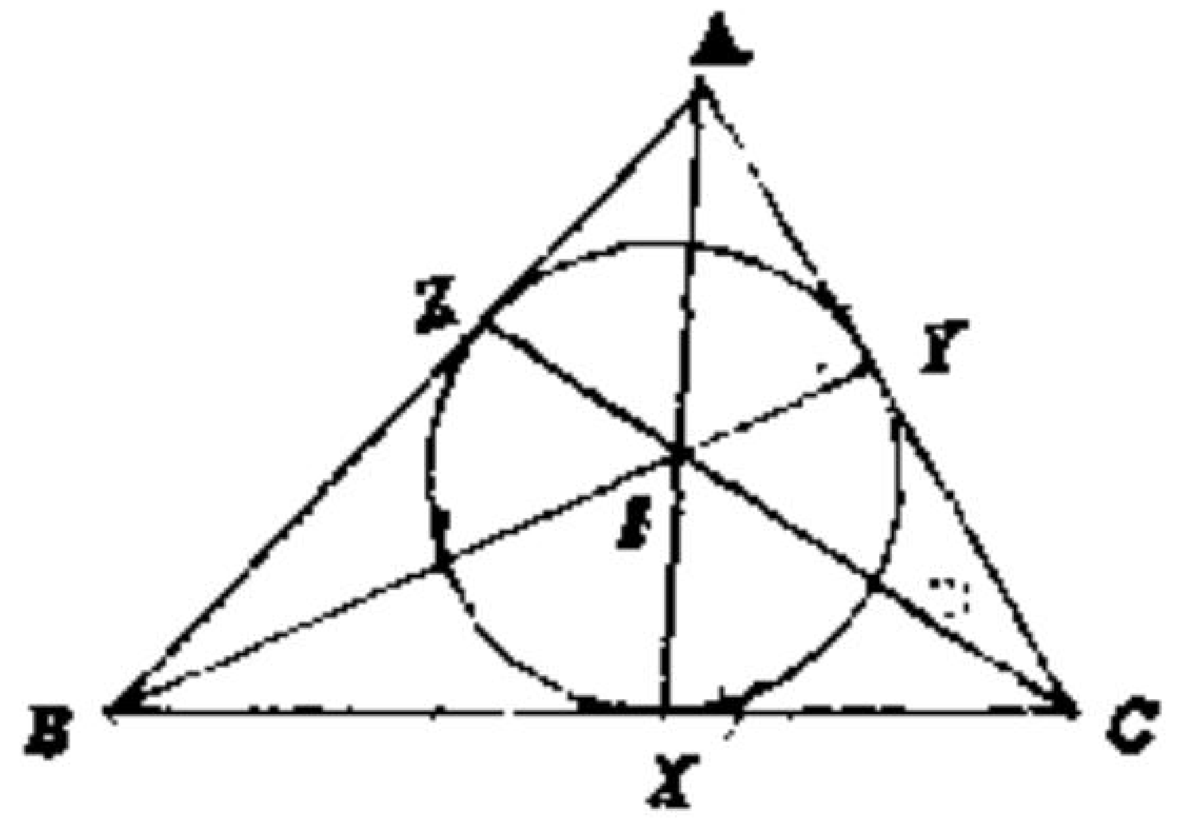


图15—24

等式右边是等式左边的重新安排使每一比式的绝对值为1，因三个比式均为－1，由塞瓦定理得AX、BY、CZ共点．

25．设自$\triangle ABC$的顶点A、B、C各引一直线使会于一点而交BC、CA、AB于X、Y、Z，则线段AX与BC，BY与CA、CZ与AB的中点连线共点或平行．

提要：D、E、F'，E、F、D'，F、D、E'共线．

$\because \frac{XB}{XC}=\frac{D'F}{D'E}$，$\frac{YC}{YA}=\frac{E'D}{E'F}$，$\frac{ZA}{ZB}=\frac{F'E}{F'D}$，

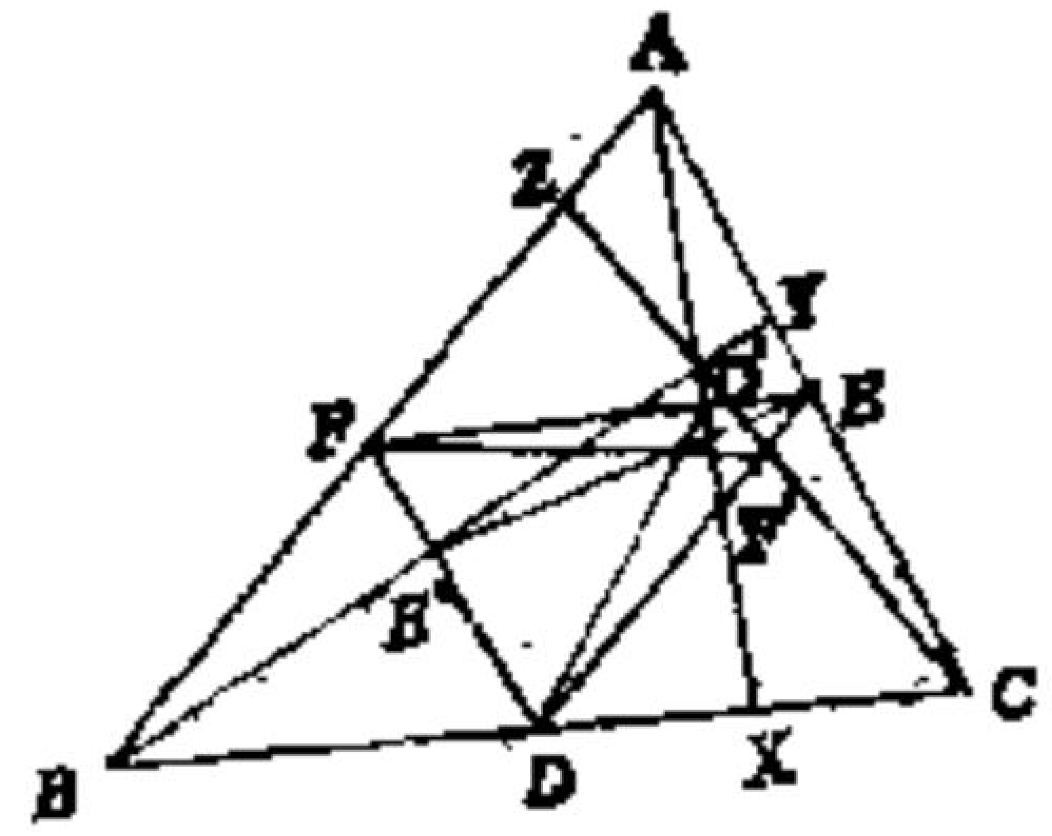


图15—25

故 $\frac{\overline{D'F}}{\overline{D'E}}\cdot\frac{\overline{F'E}}{\overline{F'D}}\cdot\frac{\overline{E'D}}{\overline{E'F}}$

$=\frac{\overline{XB}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{YA}}\cdot\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}=-1$

26. 设X与X'、Y与Y'、Z与Z'各是$\triangle ABC$三边BC、CA、AB或其延长线上的点。A'、B'、C'各是YZ与$Y'Z'$，ZX与$Z'X'$，XY与$X'Y'$的交点。求证：若AX、BY、CZ三线共点，则$A'X'$、$B'Y'$、$C'Z'$三线共点或互相平行。

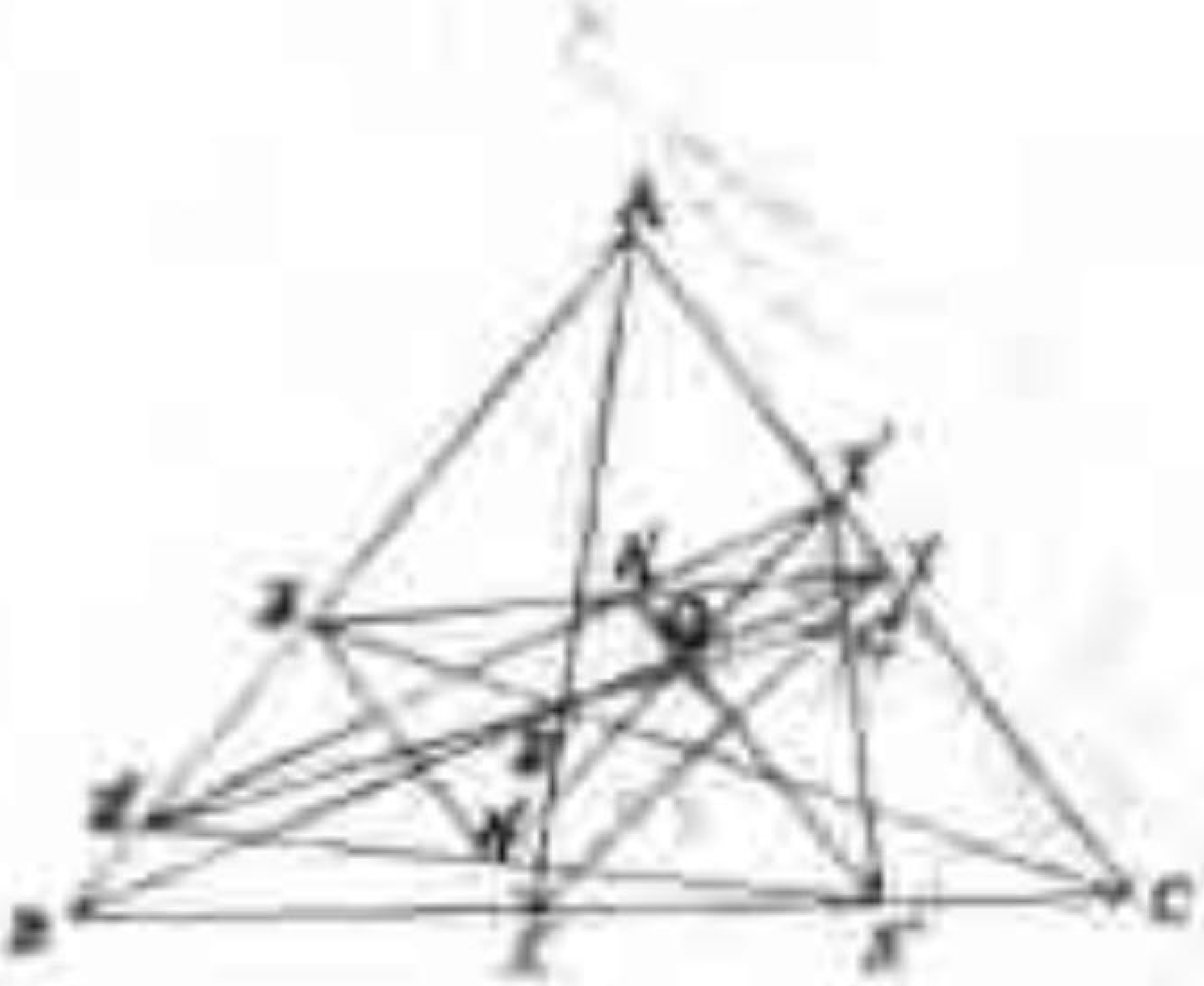


图15—26

证：由$\triangle X'Y'C$与截线$XC'Y$，$\triangle Y'Z'A$与截线$YA'Z$，$\triangle Z'X'B$与截线$ZB'X$有以下三组等式：

$$\frac{XX'}{XC}\cdot\frac{YC}{YY'}\cdot\frac{C'Y'}{C'X'}=1,\quad \frac{YY'}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZZ'}\cdot\frac{A'Z'}{A'Y'}=1,$$

$$\frac{ZZ'}{ZB}\cdot\frac{XB}{XX'}\cdot\frac{B'X'}{B'Z'}=1.$$

三式相乘并约去公因子得

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{B'X'}{C'X'}\cdot\frac{C'Y'}{A'Y'}\cdot\frac{A'Z'}{B'Z'}=1.$$

$$\therefore\ \frac{X'B'}{X'C'}\cdot\frac{Y'C'}{Y'A'}\cdot\frac{Z'A'}{Z'B'}=-1.$$

27. 将一点P与正三角形的顶点相连，求证：$\triangle PBC$、$\triangle PCA$、$\triangle PAB$的欧拉线共点或互相平行。

三角形的外心、重心、垂心三者共线，这直线叫做三角

形的欧拉（Euler）线.

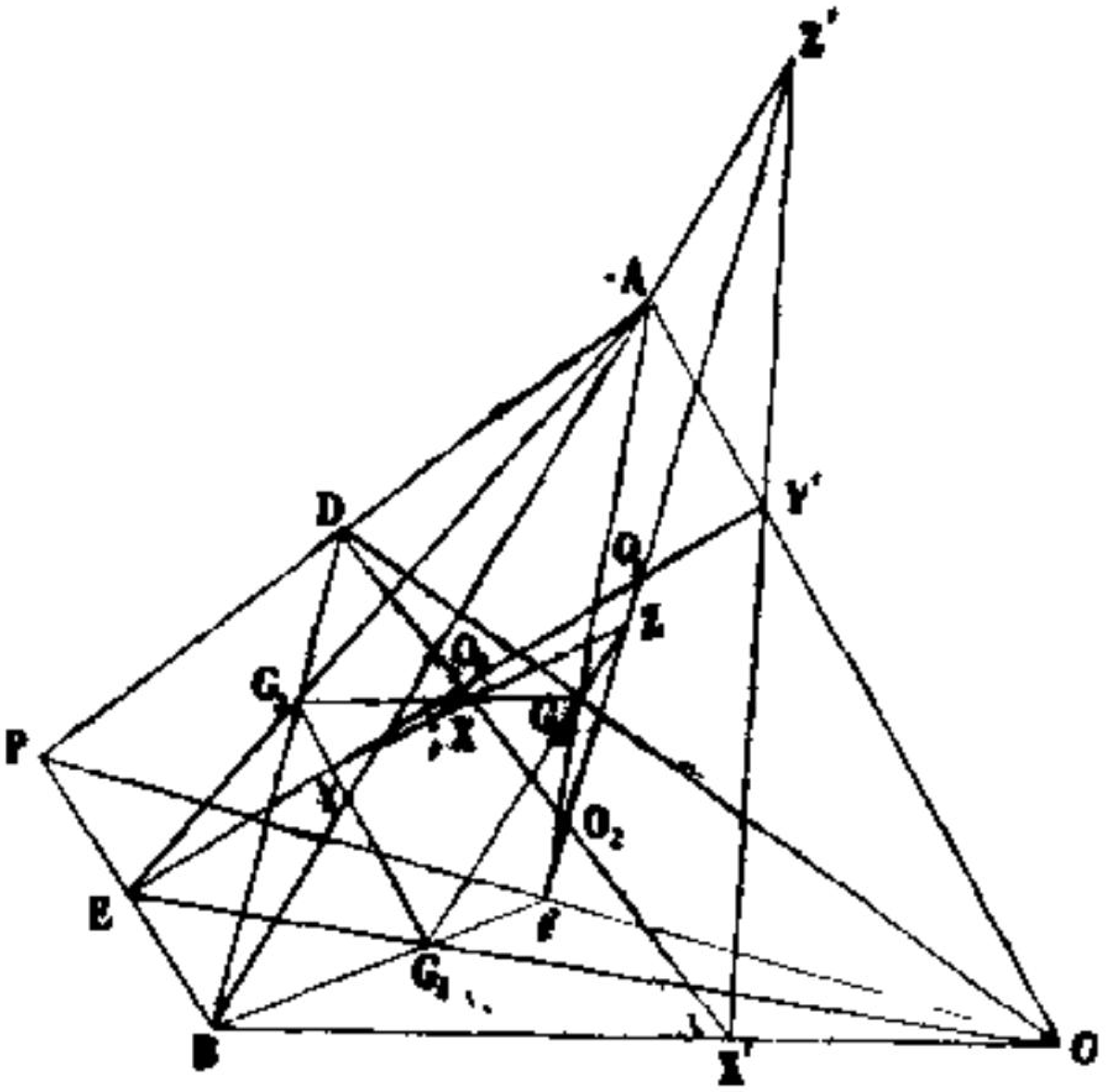


图15—27

证：由$\triangle FG_1G_2 \backsim \triangle FBA$、$\triangle DG_2G_3 \backsim \triangle DCB$、$\triangle EG_3G_1 \backsim \triangle EAC$.

且$G_1G_2 \parallel BA$，$G_2G_3 \parallel CB$，$G_3G_1 \parallel AC$.

有 $\dfrac{ZG_2}{ZG_1}=\dfrac{Z'A}{Z'B}$，$\dfrac{XG_3}{XG_2}=\dfrac{X'B}{X'C}$，$\dfrac{YG_1}{YG_3}=\dfrac{Y'C}{Y'A}$.

三式相乘得

$$\frac{\overline{XG_3}}{\overline{XG_2}}\cdot\frac{\overline{ZG_2}}{\overline{ZG_1}}\cdot\frac{\overline{YG_1}}{\overline{YG_3}}=\frac{X'B}{X'C}\cdot\frac{Y'C}{Y'A}\cdot\frac{Z'A}{Z'B}.$$

由习题十四第25题，X'、Y'、Z'三点共线.故X、Y、Z亦三点共线. 而X、Y、Z是$\triangle O_1O_2O_3$与$\triangle G_1G_2G_3$对应边的交点，由笛沙格定理的推论得其对应顶点的连线会于一点或平行.

第七节　共圆点　习题十六

1．设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，P 是这三角形外接圆上任一点，连 PG 并延长至 Q，使 $GQ=\frac{1}{2}PG$.

求证：Q 点在 $\triangle ABC$ 的九点圆上．

证：由例题44，$OG:GK=2:1$，可得 $\triangle GOP\backsim\triangle GKQ$ 故 $OP:KQ=2:1$，而九点圆半径为外接圆半径的二分之一，故 Q 在九点圆上．

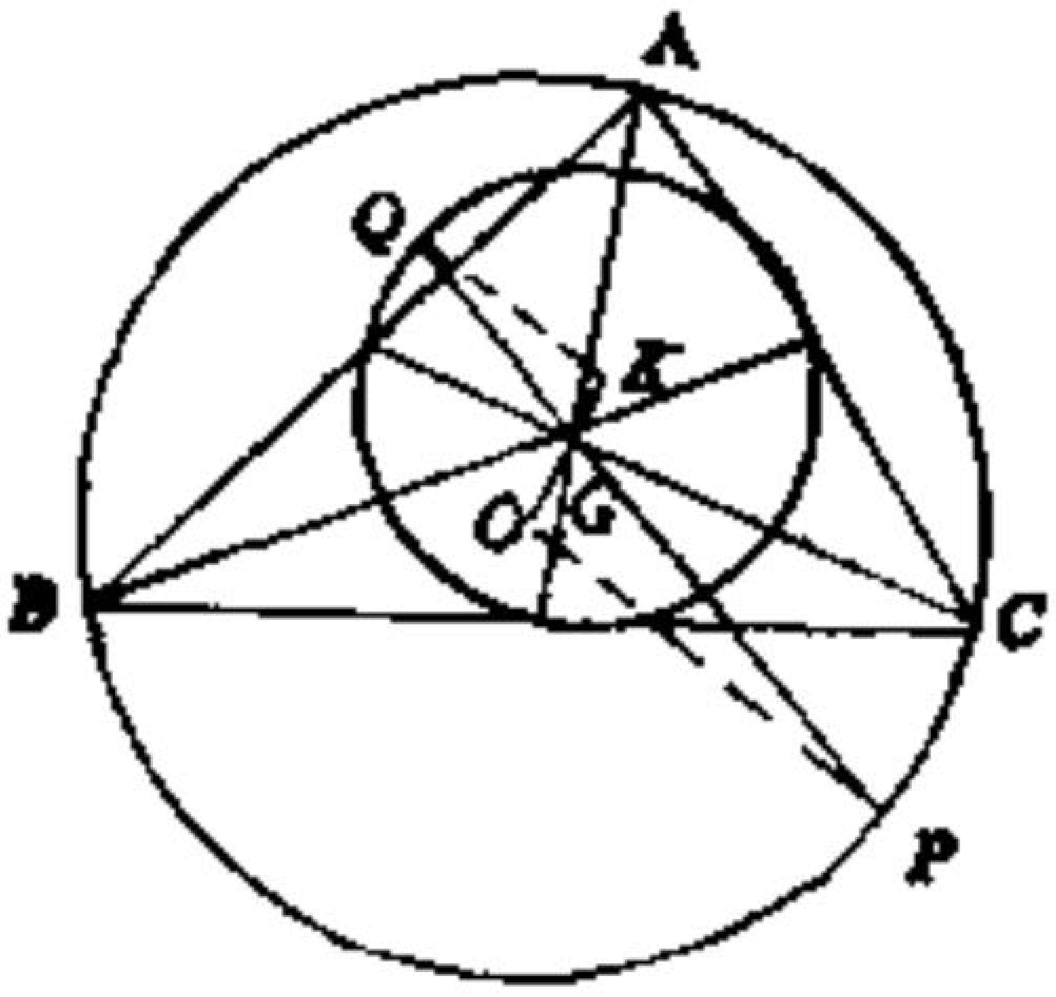


图16—1

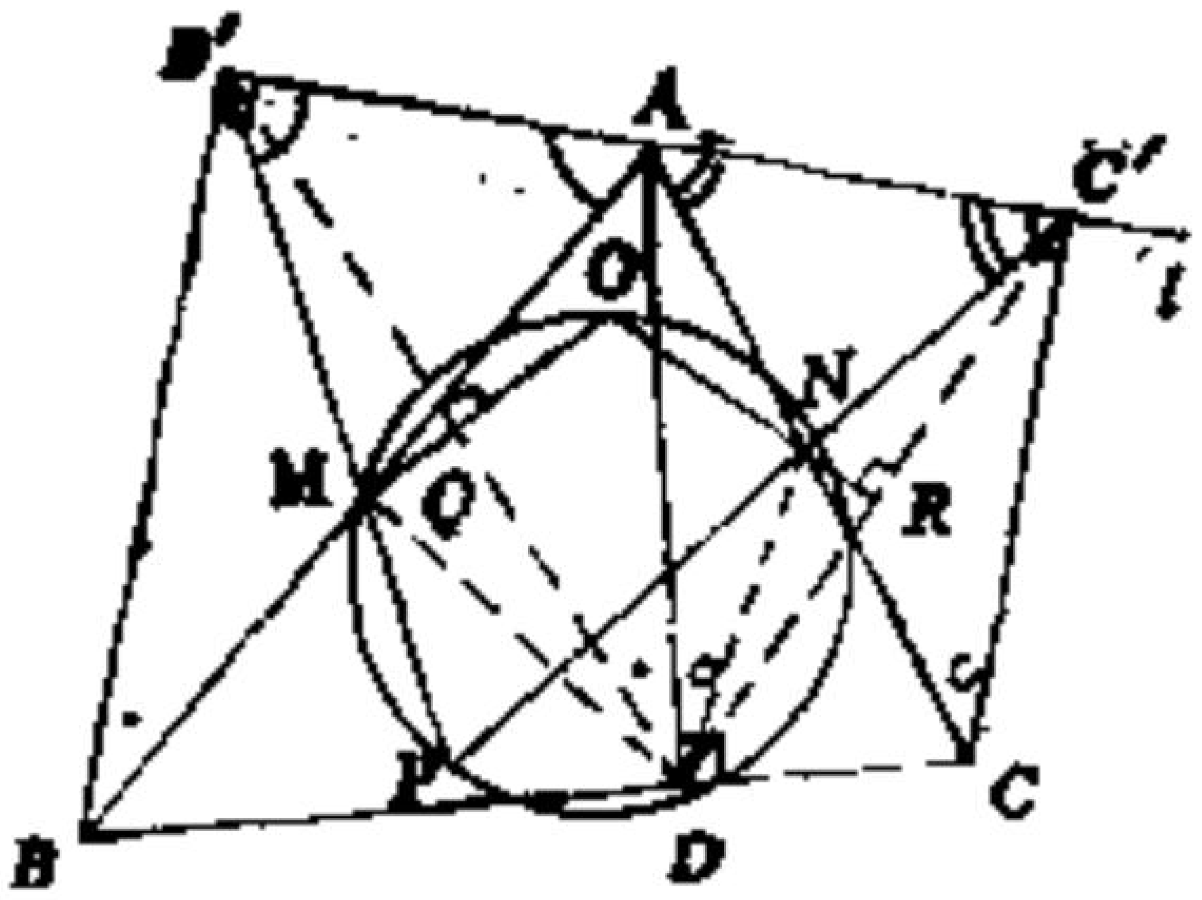


图16—2

2．在 $\triangle ABC$ 中，AD 是 BC 边的高，M、N 分别是 CA、AB 两边的中点，今有直线 l 通过 A 点．命 BC 在 l 上的射影为 $B'C'$，连 $B'N$ 与 $C'M$ 设交于 P，求证：B'、C'、D、P 四点共圆，且圆心 O 与 P 同在 $\triangle ABC$ 的九点圆上．

提要：（1）$\angle P=180^\circ-\angle PB'C'-\angle PC'B'$

$$=180^\circ-\angle BAB'-\angle CAC'$$

$$=\angle ABB'+\angle ACC'=\angle B'DC'.$$

（2）由 $\triangle MAD$、$\triangle NAD$ 为等腰三角形，有 $\angle MDN=\angle MAN=\angle MPN$，又 $\angle MON$ 与 $\angle QDR$、$\angle MDN$ 均互补，O、P 在 $\odot MND$ 上．

3. 有四圆轮週外切，求证四个切点共圆

证：$\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle AO_2B+\angle BO_3C)$,

$\angle ADC=\frac{1}{2}(\angle AO_1D+\angle DO_4C)$.

$\therefore\ \angle ABC+\angle ADC$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=180^\circ$

故 A、B、C、D 共圆.

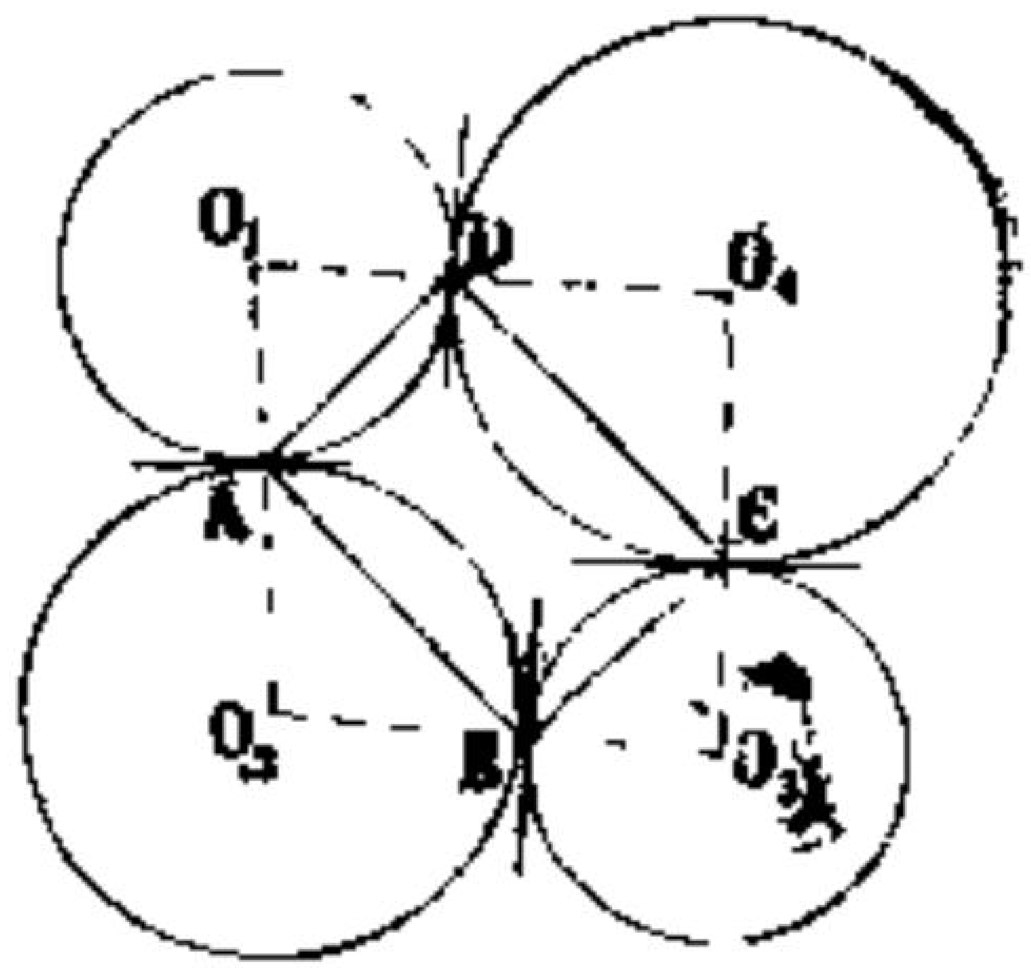


图 16—3

4. 两圆交于 P、Q 两点，过 Q 任作一直线交两圆于 A、B，自这两点各引所在圆的切线设交于 C，则 A、B、C、P 四点共圆.

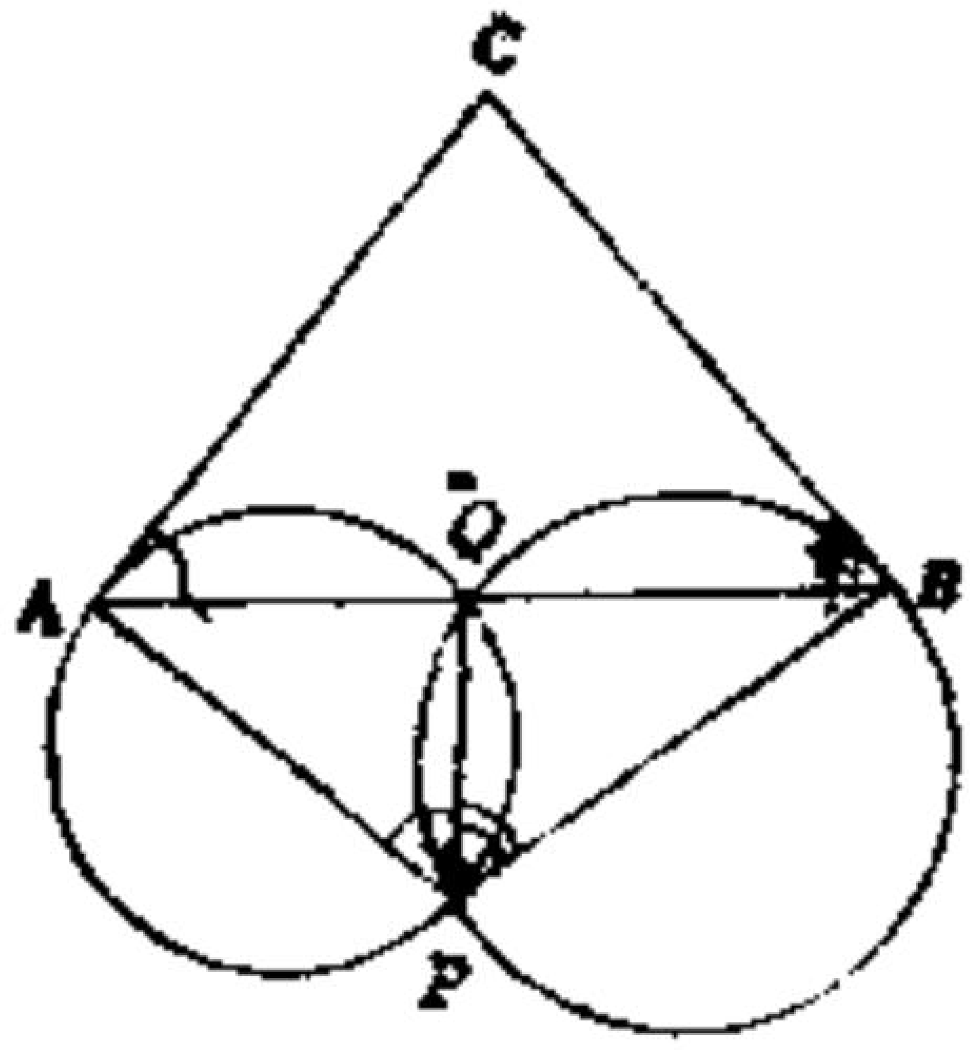


图 16—4

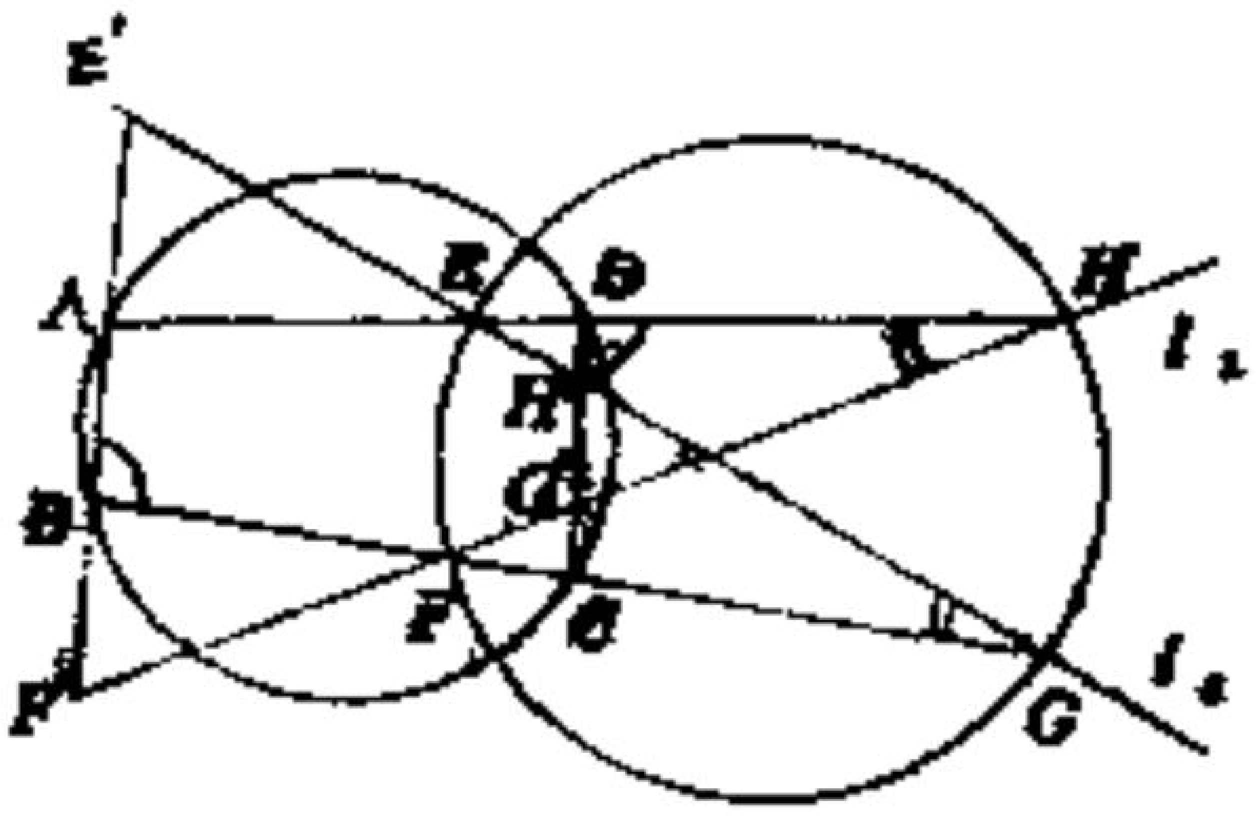


图 16—5

提要：$\angle CAP+\angle CBP=180^\circ$

5. 若两直线交圆内接四边形一双对边（所在直线）于共圆点，则亦必交他双对边（所在直线）于共圆点.

提要：$\angle F'G'H'=\angle G'DH+\angle G'HD$

$=\angle ABC+\angle EGF$,

$\therefore\ \angle F'G'H'+\angle E'=180^\circ$.

6．AB、CD 是一圆的两弦，连 AC 与 BD 设交于 P，求证：$\triangle PAB$ 与$\triangle PCD$ 的外心及垂心凡四点共圆．

提要：(1) 因三角形的垂心与外心互为等角共轭点，

$\therefore \angle O_2PM=\angle BPE=90^\circ-\angle B=90^\circ-\angle C=\angle CPF$，

故 O_1、P、H_2 共线　$\therefore$　O_2、P、H_1 共线．

(2) 由$\triangle PAB\backsim\triangle PDC$，根据定理116得

$$\triangle PO_1H_1\backsim\triangle PO_2H_2$$

$\therefore \angle O_1H_1O_2=\angle O_1H_2O_2$．

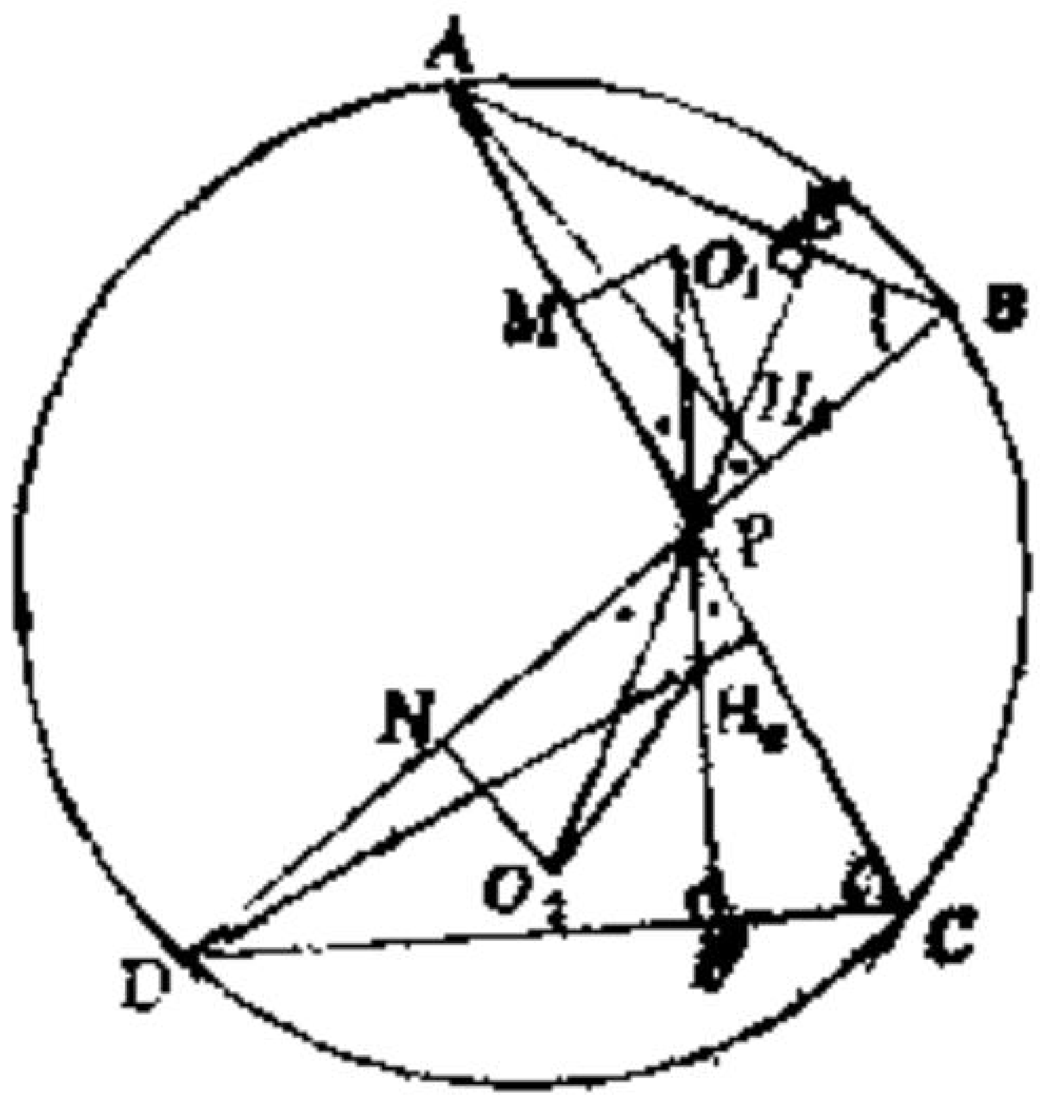


图 16—6

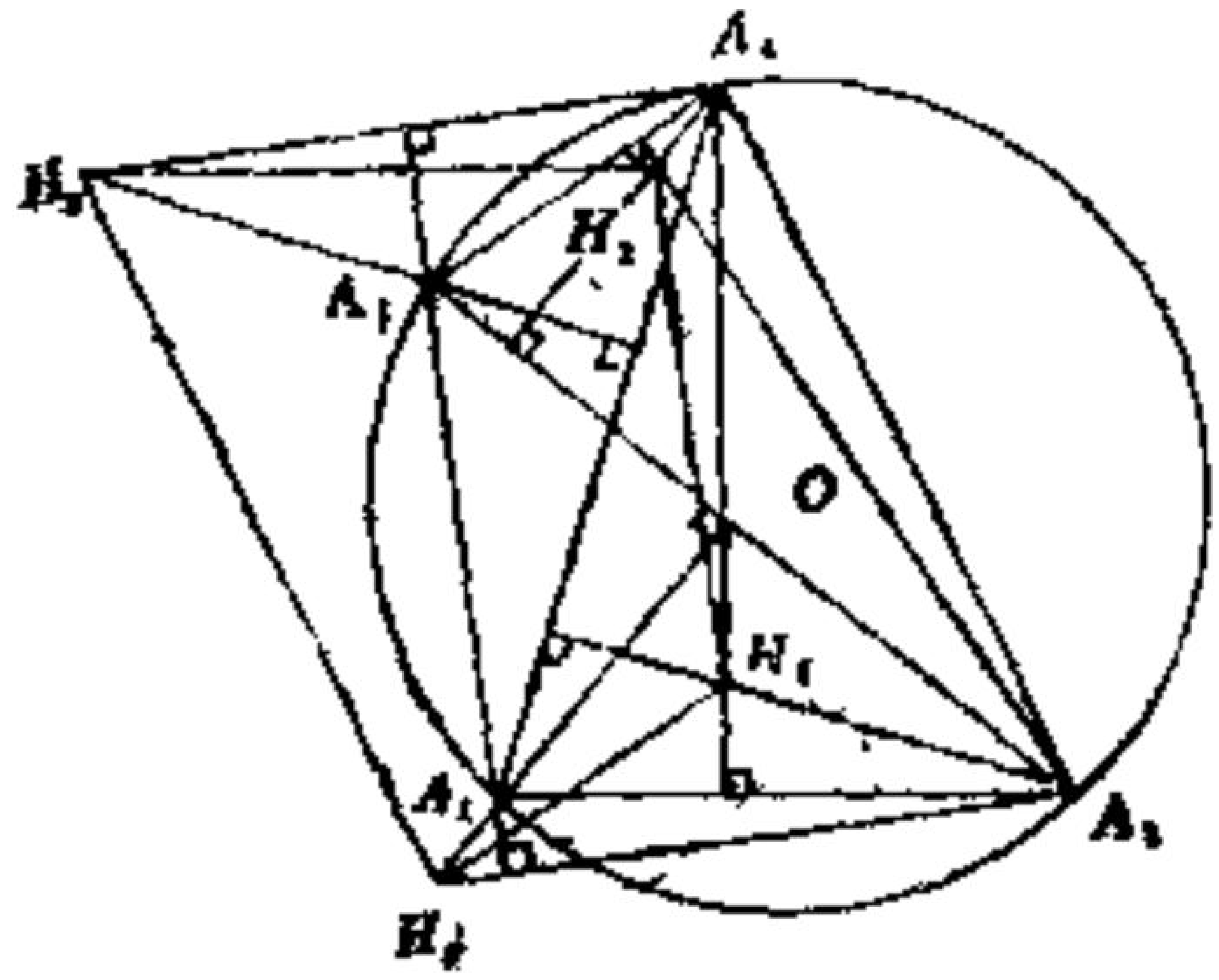


图 16—7

7．圆上四点，两两连成四个三角形，它们的垂心共圆，且这圆与原圆一般大小．

证：H_3 是$\triangle A_4A_1A_2$的垂心．由例题19知，A_4H_3的距离是外心 O 到 A_1A_2 距离的二倍；H_4 是 $\triangle A_3A_1A_2$ 的垂心，A_3H_4的距离也是 O 到 A_1A_2 距离的二倍，故有 $A_3A_4H_3H_4$为平行四边形．　$\therefore$　$A_3A_4 \perp\!\!\!\!= H_3H_4$．

同理有 $A_1A_2 \perp\!\!\!\!= H_1H_2$，$A_2A_3 \perp\!\!\!\!= H_2H_3$，$A_4A_1 \perp\!\!\!\!= H_4H_1$．

故四边形$A_1A_2A_3A_4$与四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 合同

8. 无内切圆的四边形中，每边两邻角的平分线交点，凡四点共圆.

证：$\angle EFG$

$=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle C+\angle D)$,

$\angle EHG$

$=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$,

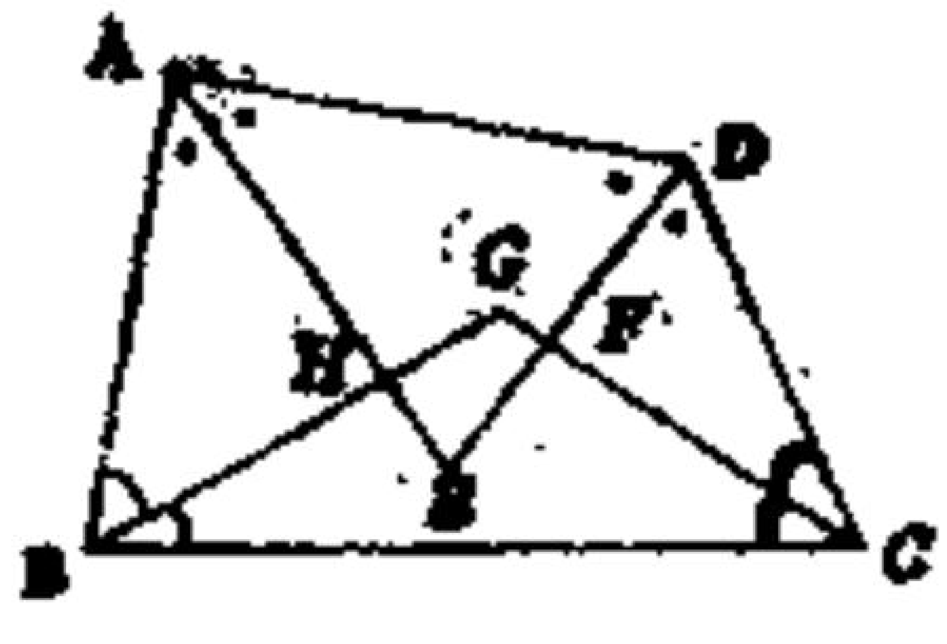


图16—8

∴ $\angle EFG+\angle EHG=180^\circ$.

9. 凸四边形各外角的平分线顺次相交，所得四交点共圆.

提要：四边形的外角和为360°. 四外角和的二分之一为180°. $\angle F+\angle H=360^\circ-180^\circ=180^\circ$.

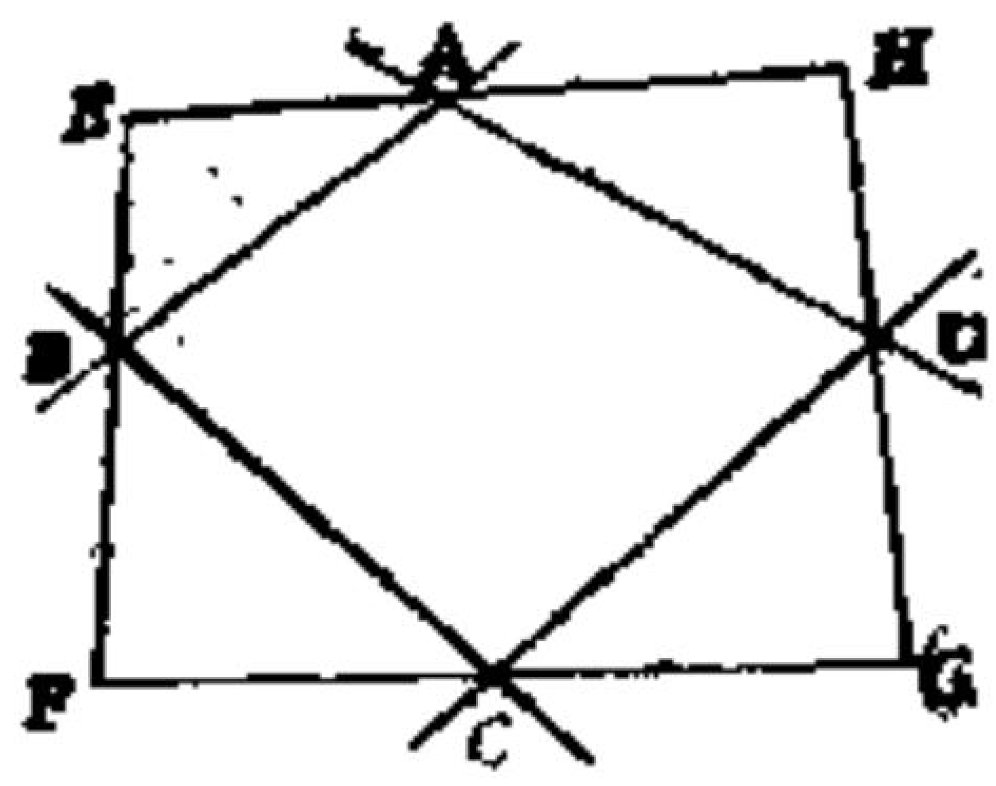


图16—9

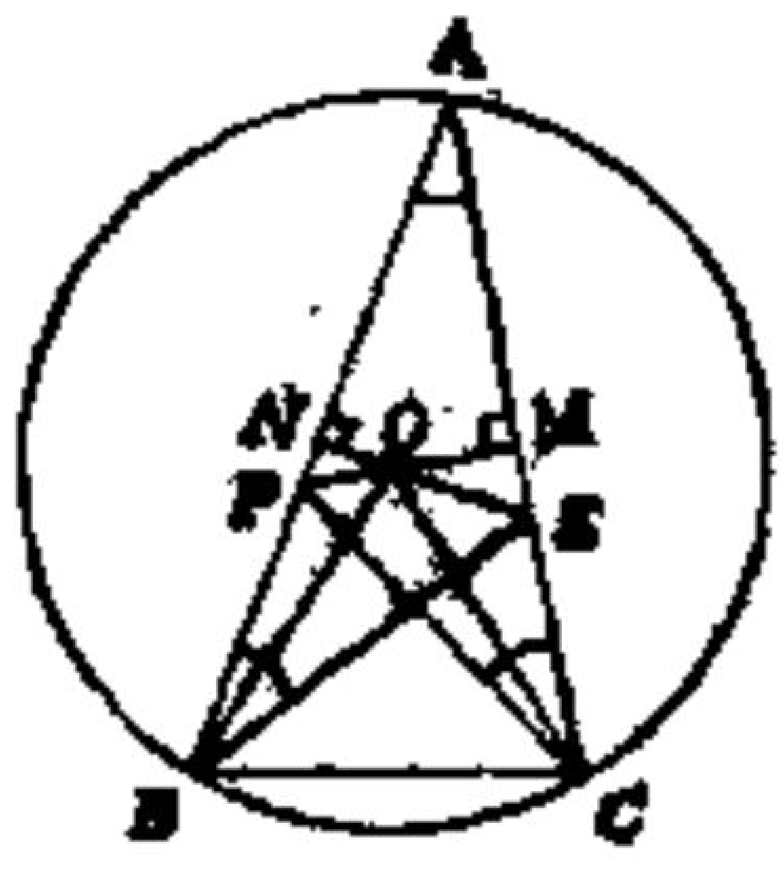


图16—10

10. 在△ABC中，O是外心，并设AB边的中垂线交直线AC于E，AC边的中垂线交直线AB于F. 求证：B、C、E、F、O五点共圆.

提要：$\angle BOC=2\angle A=\angle BEC$.

11. 在△ABC中，作AB、AC两边的逆平行线AX、AX'而交BC于X、X'；又作$X'Y$平行于BA而交AC于Y；XZ平行于CA而交AB于Z. 求证：A、X、X'、Y、Z五点共圆.

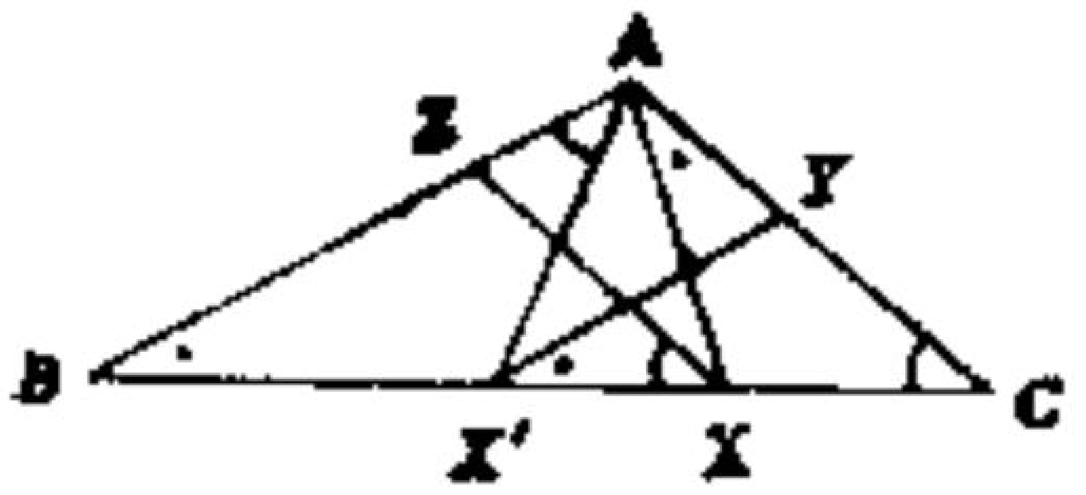


图16—11

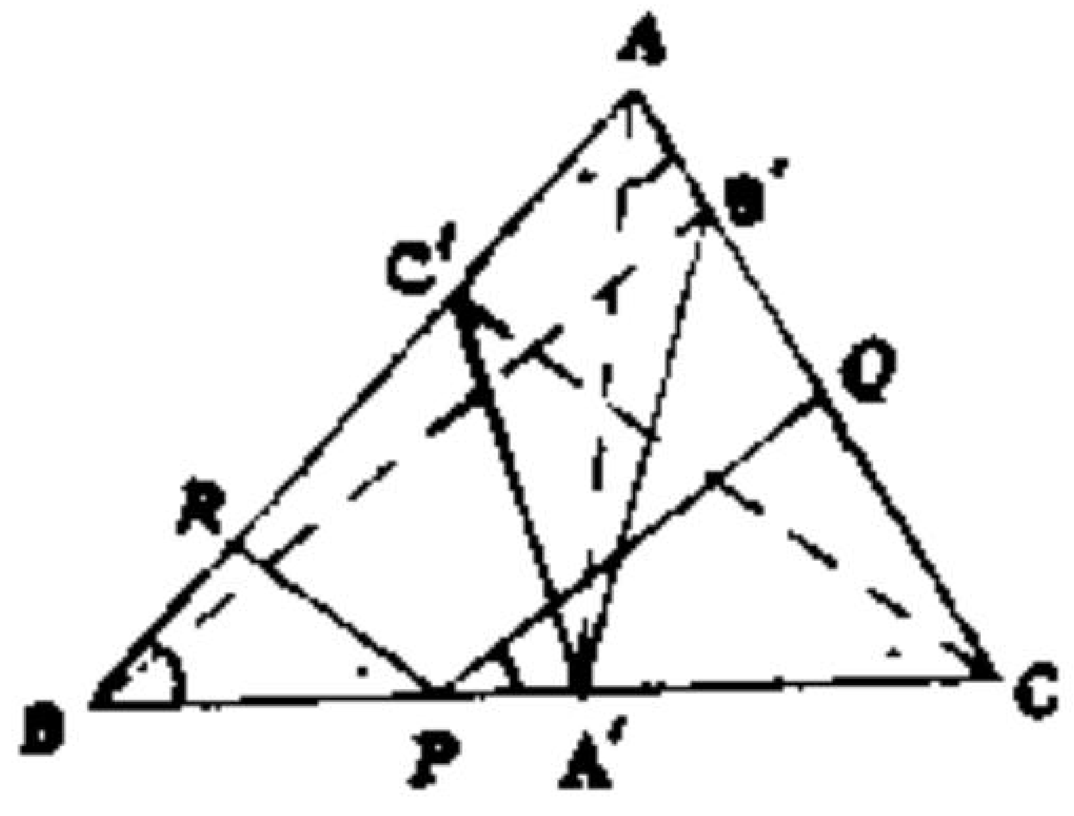


图16—12

提要：$\angle XAY=\angle ABX=\angle XX'Y$.

12．在ABC中，A'是BC上的任一点。过A'分别作AB、AC两边的逆平行线各交AC、AB于B'、C'。今在BC、CA、AB上各取一点P、Q、R，使合于

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{QB'}}{\overline{QC}}=\frac{\overline{RB}}{\overline{RC'}}$$，求证：A、A'、P、Q、R五点共圆．

提要：A、C、A'、C'四点共圆且$PR\parallel CC'$，

$\therefore\quad \angle RAA'=\angle C'CB=\angle RPB$，

故A、A'、P、R四点共圆．

13．P是四边形$ABCD$的对角线交点，设$\odot PAB$与$\odot PCD$交于Q，$\odot PAD$与$\odot PBC$交于R。则P、Q、R三点与AC、BD的中点凡五点共圆．

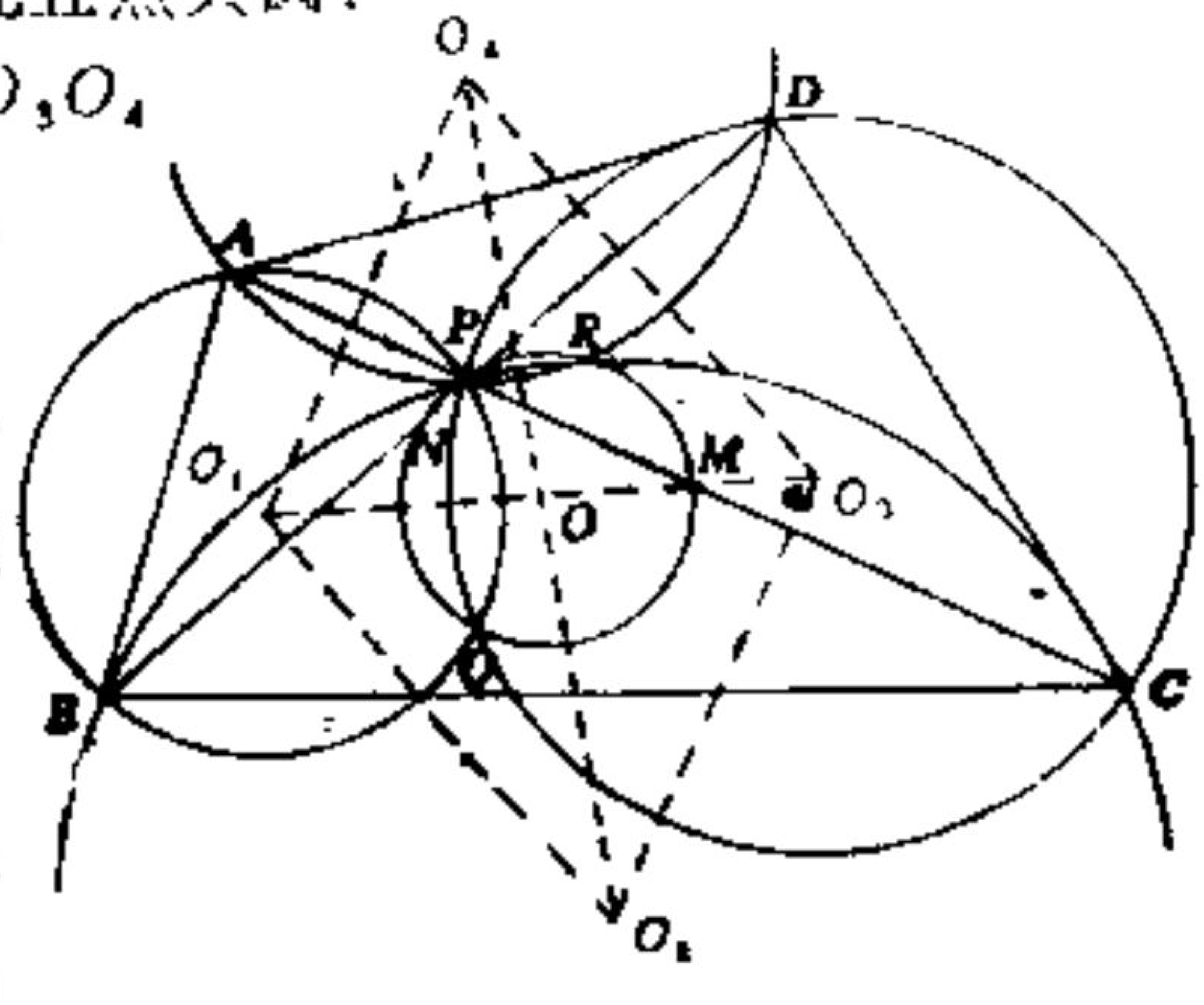


图16—13

证：(1) O_1O_2、O_3O_4均垂直于BD；O_2O_3、O_4O_1均垂直于AC，故$O_1O_2O_3O_4$为平行四边形，其对角线交点为O．

(2) 由习题十第9题，$\odot O_1$与$\odot O_3$交于P点，O是O_1O_3的中点，AC是过P且交

$\odot O_1$、$\odot O_3$的直线，其中点为 M。故 $OP=OM$.

同理，$OP=ON$

又O_1O_3、O_2O_4分别垂直平分 PQ、PR。故 $OP=OQ=OR$

14．三圆 c_1、c_2、c_3 会于 O 点，而 c_2 与 c_3、c_3 与 c_1、c_1 与 c_2 另外的交点 A、B、C 不共线，过 O 点任作一直线交 c_1、c_2、c_3，于 X、Y、Z。连 BZ 与 CY、CX 与 AZ、AY 与 BX 各交于 A'、B'、C'.

求证：A、A'、B、B'、C、C' 六点共圆.

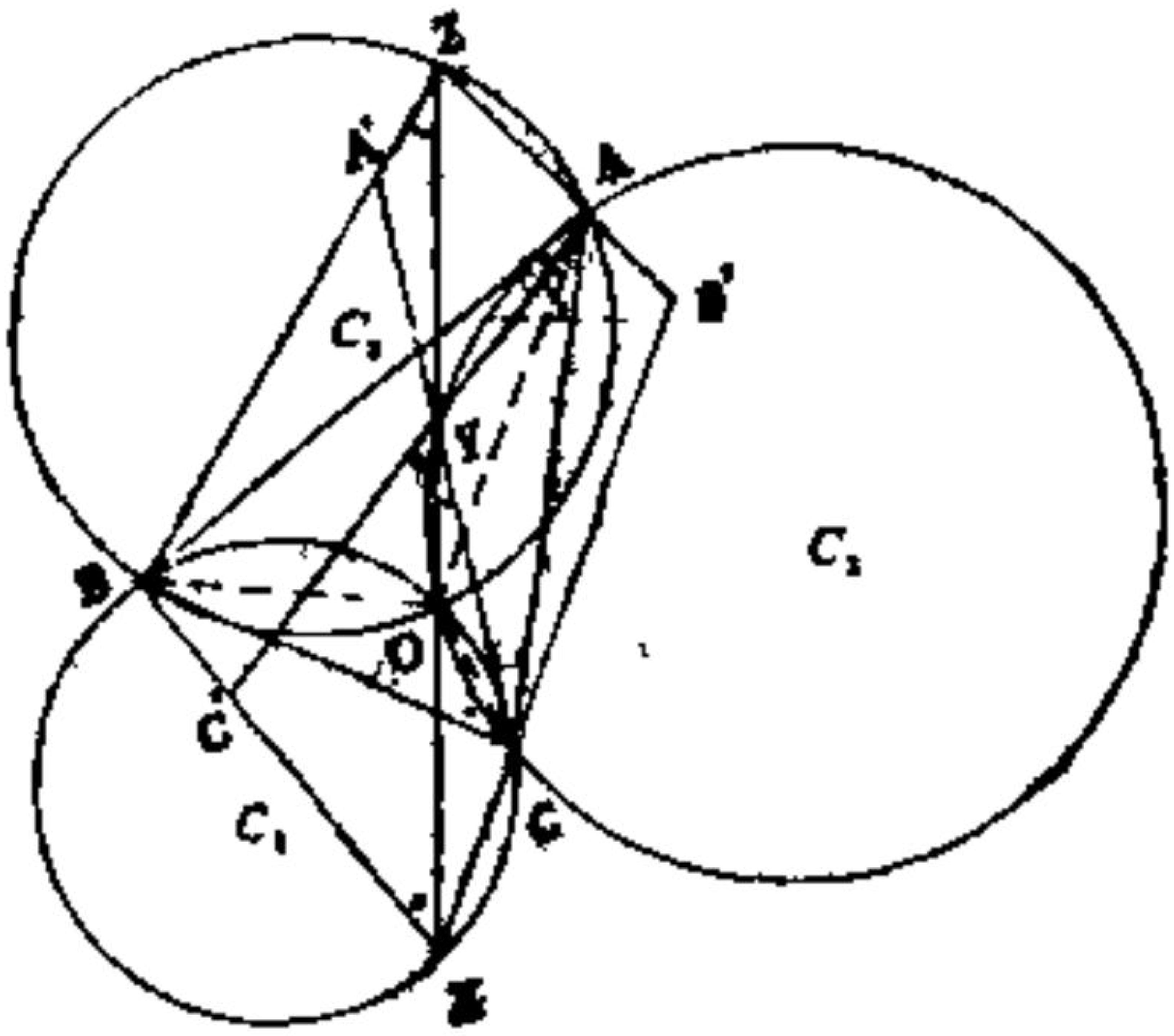


图16—14

提要：$\angle BAC=\angle BAO+\angle OAC=\angle A'ZY+\angle A'YZ$
$=\angle BA'C$

∴ A、B、C、A' 四点共圆.

15．设 I 是$\triangle ABC$的内心或旁心，E、F 各是 I 关于 AB、AC 的对称点，D 是 BE 与 CF 的交点，今过 I 作两直线使与 IA 构成30°的角．求证：所作两直线与 AB、AC 的交点连同 D、E、F 凡七点共圆

∵ (1) $\triangle AIR \cong \triangle AIS$，∴ $\angle PRQ=\angle PSQ$，

∴ P、Q、R、S四点共圆。

(2) $\triangle PER \cong \triangle PIR$，且$\triangle IPQ$为正三角形。

∴ $\angle PER=\angle PIR=\angle PQI$。

∴ P、Q、R、E四点共圆。

(3) $\triangle QIF$、$\triangle QPF$均为等腰三角形。

∴ $\angle PFI=\angle QPF-\angle QIF$，

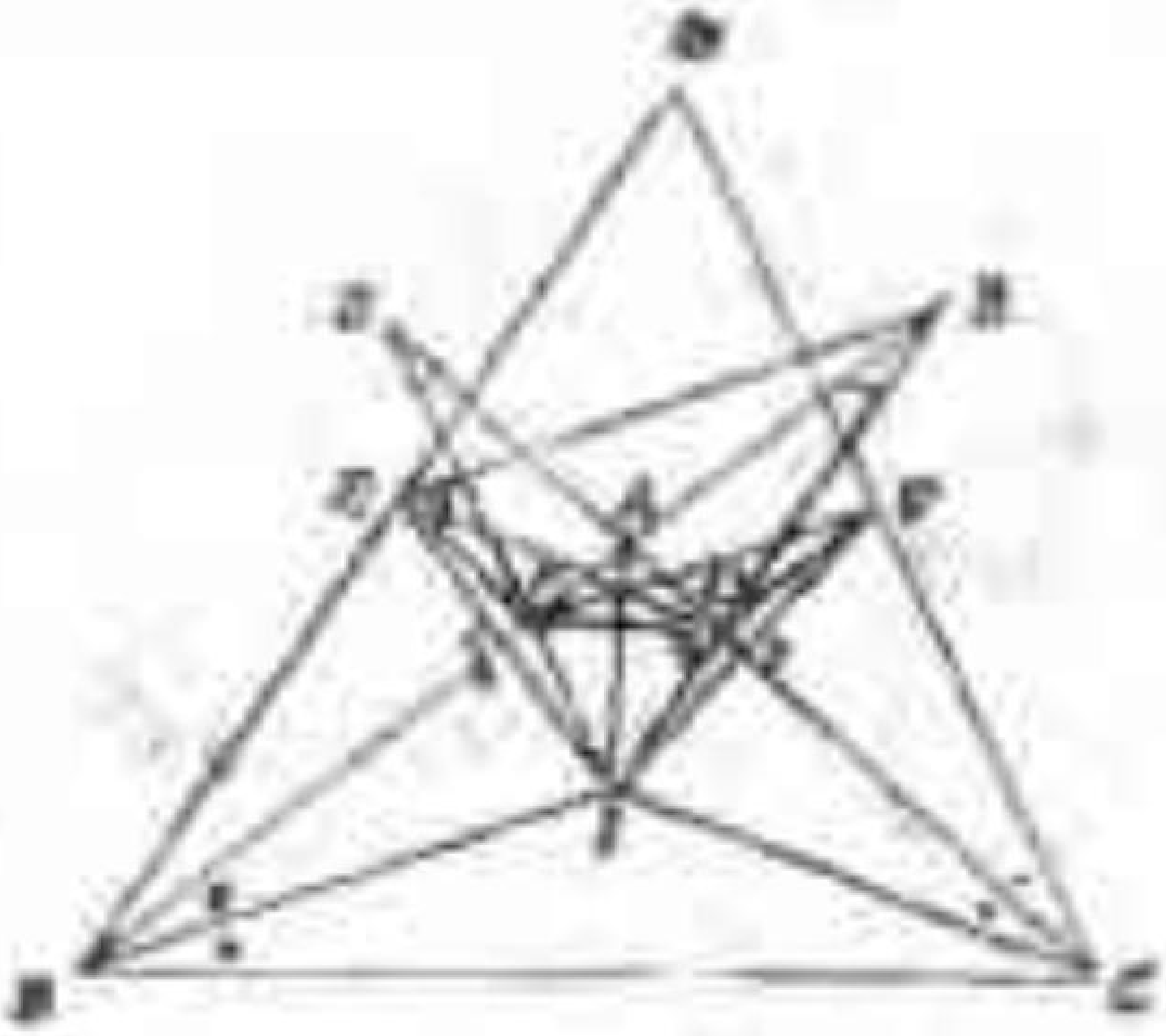


图16—15

而在$\triangle FPI$中，由$\angle QPI=\angle QIP=60°$，可以得$\angle PFI=30°$。

(4) $\angle BEP=\angle BIP=\angle BIA-30°$

$$=\left[180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)\right]-30°$$

$$=150°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)。$$

$$\angle PFC=\angle PFI+\angle IFC=30°+(90°-\frac{1}{2}\angle C)。$$

∴ $\angle BEP+\angle PFC=270°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=180°$。

故$\angle PFC=\angle PED$。∴ P、D、E、F四点共圆。

16. 由一已知点向一三角形各边引垂线，以每垂足为起点在所在边（视为直线）上截两线段，使均等于该垂足与已知点的等角共轭点之距离，则六截点共圆。

证：$CD_1\cdot CD_2=(CD+DD_1)(CD-DD_2)$

$$=(CD+DP')(CD-DP')$$

$= CD^2 - P'D^2$

$= CP^2 - PD^2 - P'D^2$

$= CP^2 - (PD^2 + P'D^2)$.

令 O 为 PP' 的中点，由定理131得：

$CD_1 \cdot CD_2$

$= CP^2 - \frac{1}{2}P'P^2 - 2DO^2$.

同理 $CE_1 \cdot CE_2$

$= CP^2 - \frac{1}{2}P'P^2 - 2EO^2$.

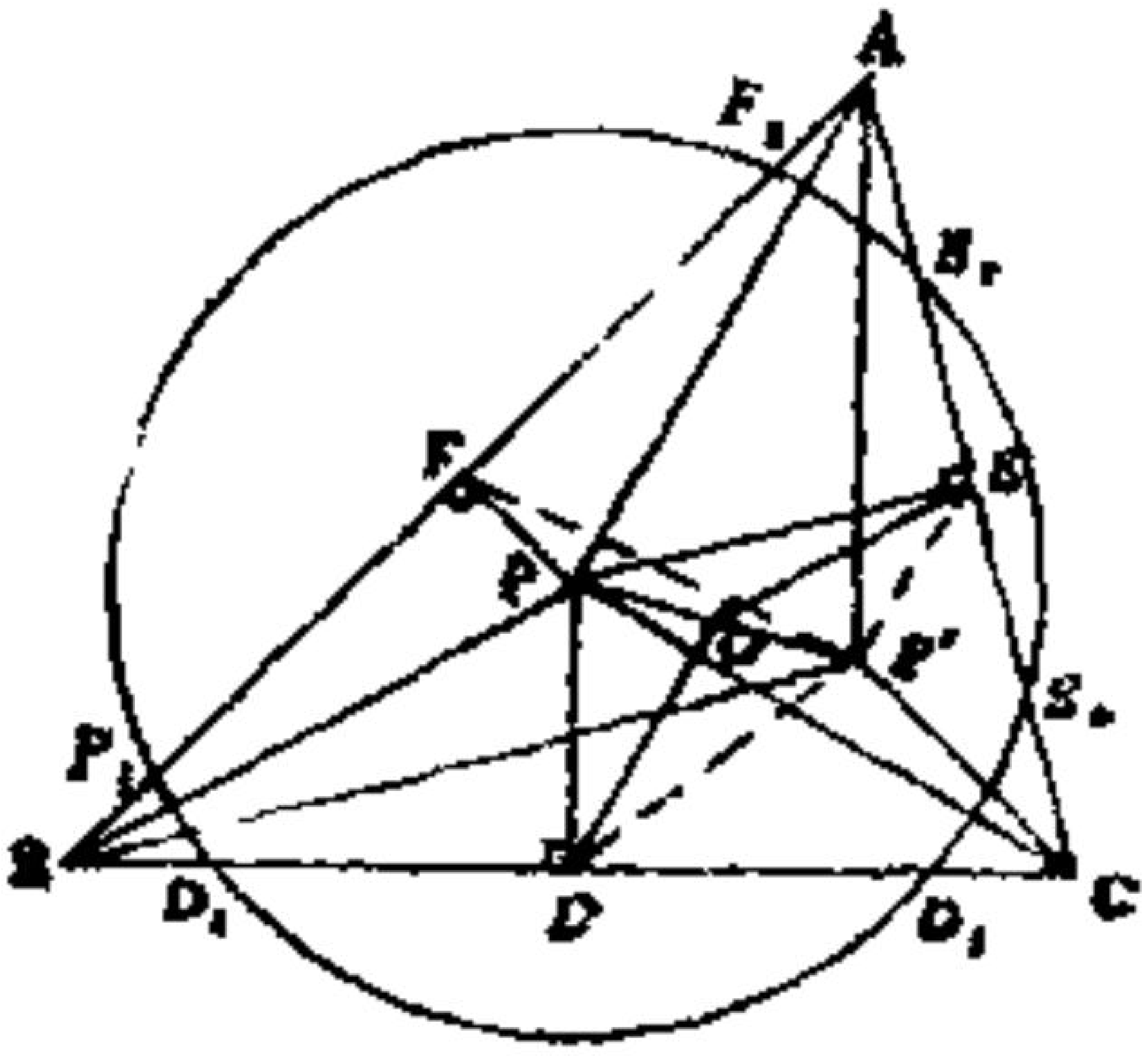


图16—13

由 P186例题46，$DO = EO$，

$\therefore \quad CD_1 \cdot CD_2 = CE_1 \cdot CE_2$.

故 D_1、D_2、E_1、E_2四点共圆．

同理，E_1、E_2、F_1、F_2四点共圆．

由 P172 Davis定理，D_1、D_2、E_1、E_2、F_1、F_2 六点共圆，P 点为圆心．

17．一三角形每边（所在直线）上有一对点，这些点与对顶点的连结线均等长，求证：六条连结线的中点共圆．

证：定长 r 以 A、B、C 为顶点在三边 BC、CA、AB 上的交点为 D_1、D_2、E_1、E_2、F_1、F_2，其各中点为 P、P'、Q、Q'、R、R'；L、M、N 为 BC、CA、AB的中点．

$\because$ L、M、R、R'，N、L、Q、Q' 共线，所以有：

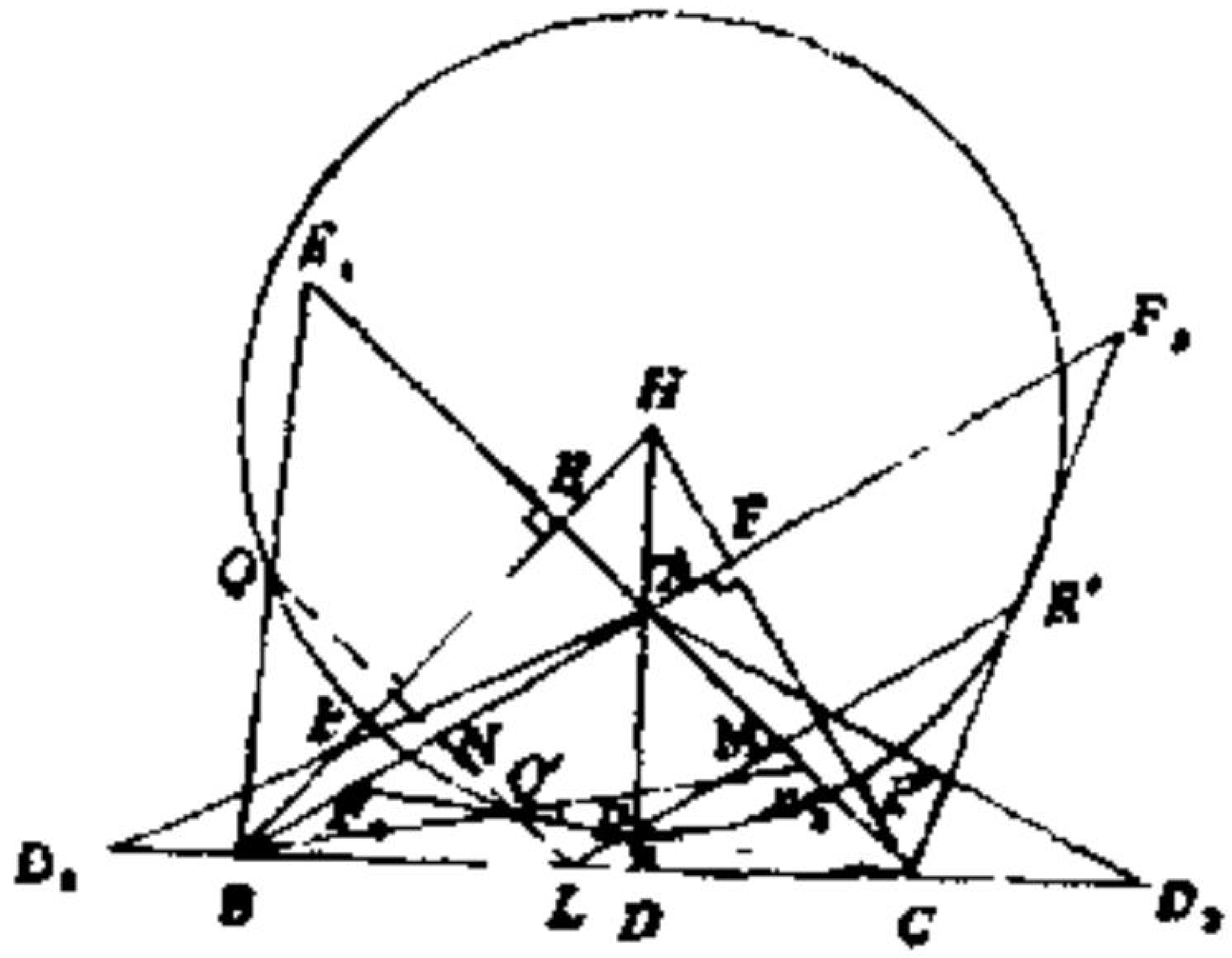


图16—17

$$LR\cdot LR'=\frac{1}{2}BF_1\cdot\frac{1}{2}BF_2$$

$$=\frac{1}{4}(BF-F_1F)(BF+FF_2)$$

$$=\frac{1}{4}(BF^2-F_1F^2)$$

$$=\frac{1}{4}\left[(BC^2-CF^2)-(CF_1{}^2-CF^2)\right]$$

$$=\frac{1}{4}(BC^2-r^2).$$

同理， $LQ\cdot LQ'=\frac{1}{4}(BC^2-r^2)$.

∴ $LR\cdot LR'=LQ\cdot LQ'$，故R、R'、Q、Q'四点共圆．

因P、P'、Q、Q'、R、R'在$\triangle LMN$的三边上，由Davis定理，六点在以H为圆心的圆上．

18．在每三角形中，求证下列十二点共圆：

(1)在第16题中，当已知点是三角形的垂心时所得的六个截点；

(2)在第17中，当六条连结线均等于三角形的外接圆直径时，该六条连结线的中点．

显见(1)：当第16题中三角形是锐角三角形时，其等角共轭点为外心O，故两圆有共同垂心H为其圆心。

(2)：设第16题中圆上六点在图16—18中为D_1'、D_2'、E_1'、E_2'、F_1'、F_2'，则后圆的半径r′为：

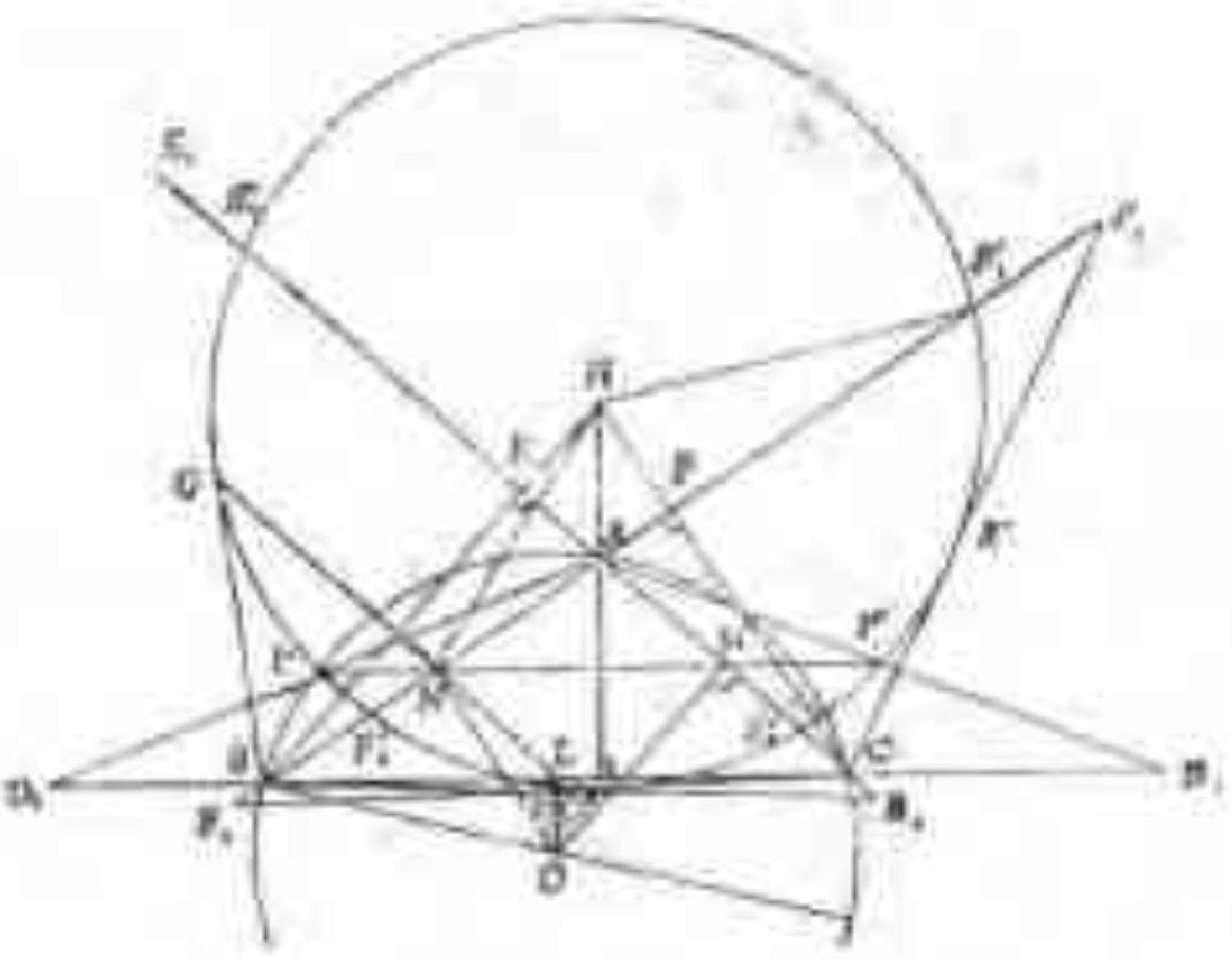


图16—18

$$HF_2'^2 = F_2'F^2 + HF^2 = OF^2 + HF^2 = ON^2 + NF^2 + HF^2$$
$$= ON^2 + HN^2.$$

设上题中⊙H的半径为r'，当其定长为三角形外接圆直径$2R$时，点N关于⊙H的幂为：

$$NP \cdot NP' = r'^2 - NH^2 = \frac{1}{4}(4R^2 - AB^2).$$

$$\therefore \quad r'^2 = R^2 - \frac{1}{4}AB^2 + NH^2 = OB^2 - NB^2 + NH^2$$
$$= ON^2 + HN^2$$，故两圆半径相等。

19. 任一圆与三角形的外接圆同心且与各边（所在直线）相交，将各交点分别与对顶点相连。则诸连结线的中点共圆，且此圆与三角形的九点圆同心。

证：(1) L、M、N 是$\triangle ABC$三边BC、CA、AB的中点，则AB_2、AC_1的中点D、D'在MN上，BC_2、BA_1的中点E、E'在NL上，CA_2、CB_1的中点F、F'在LM上。

(2) $ND\cdot ND'=\frac{1}{4}B_2B\cdot BC_1=\frac{1}{4}CC_1\cdot CB_2$

$$=\frac{1}{4}CC_2\cdot CA_1=\frac{1}{4}AA_1\cdot AC_2=NE'\cdot NE,$$

∴ D、D'、E、E'四点共圆。

(3) ∵ $BB_2=CC_1$，∴ $ND=MD'$，NM与DD'的中垂线重合。故此圆与三角形$\triangle ABC$的九点圆同心。

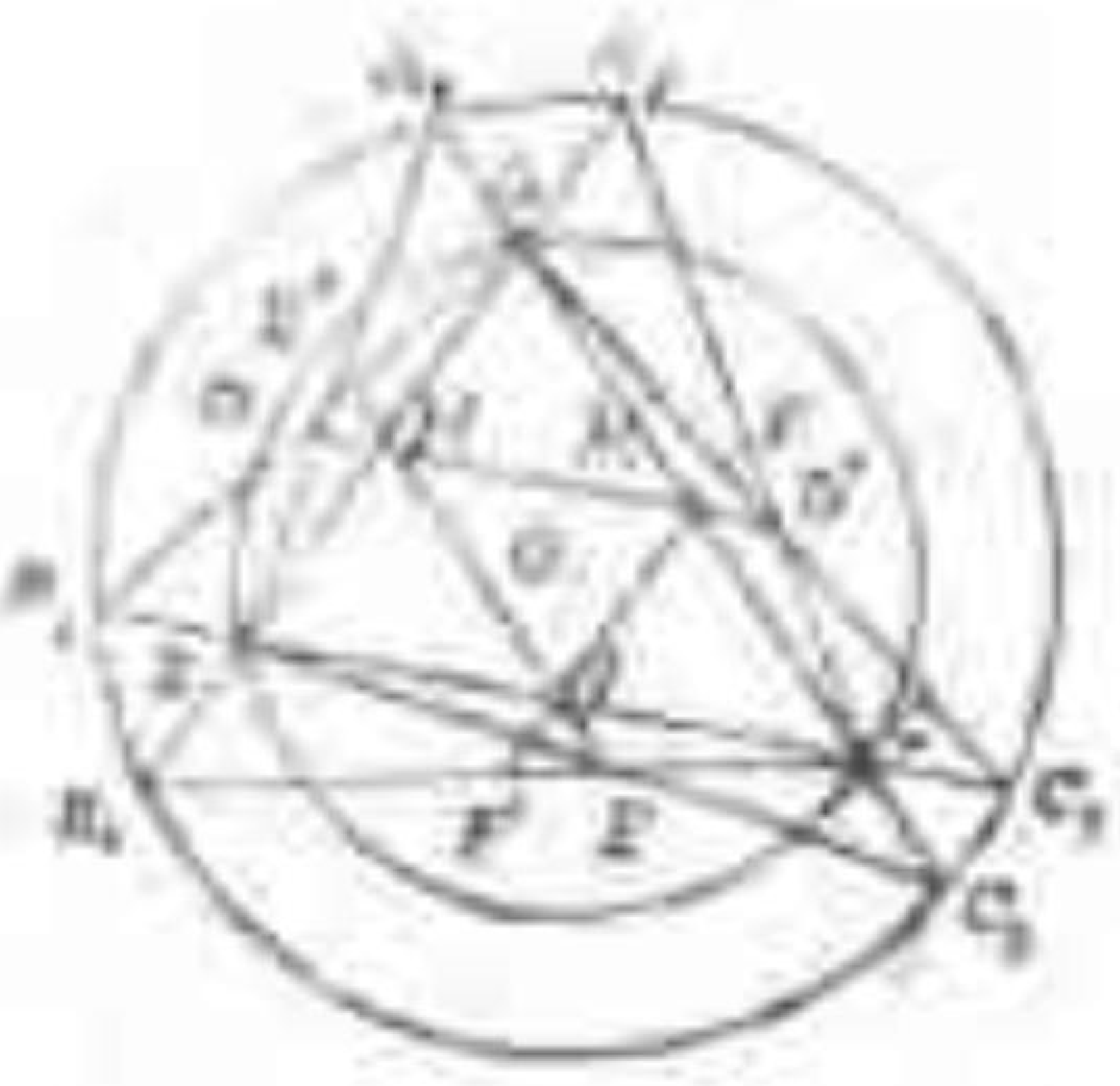


图16—19

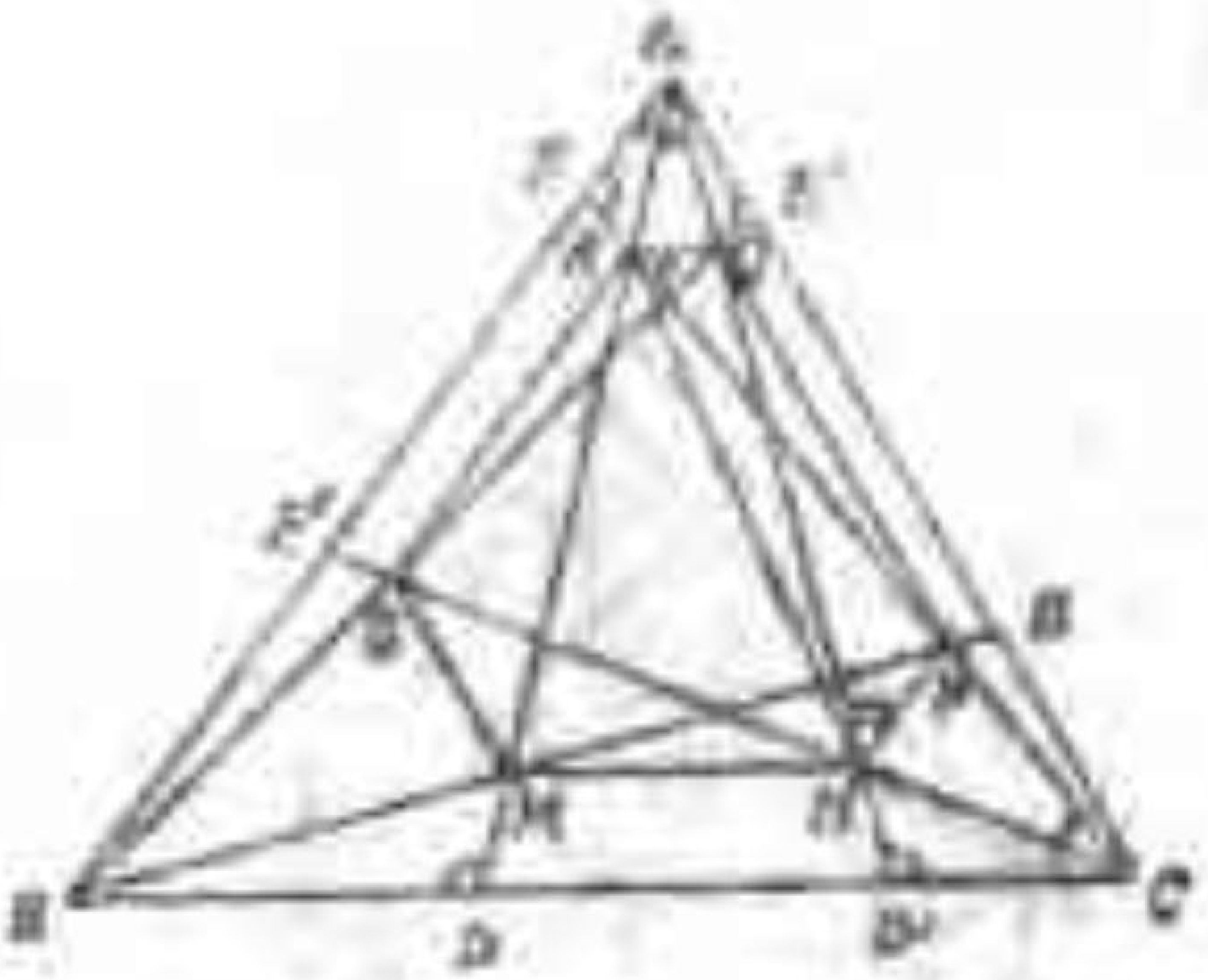


图16—20

20. 有三个顶角相同的等腰三角形，它们的底边分别落在一已知三角形的三边（所在直线）上，顶角的顶点分别落在该已知三角形的三顶点上。求证：这三个等腰三角形的对应腰（所在直线）的六个交点共圆。

证：(1) 由$\triangle ADD'\backsim\triangle BEE'\backsim\triangle CFF'$，有$B$、$D$、

R、F、B、C、E'、F、C、D'、Q、E'均四点共圆．

$\therefore\quad AR\cdot AD=AF\cdot AB=AE'\cdot AC=AQ\cdot AD'$

又 $AD=AD'$，$\therefore\quad AR=AQ$　故 $RQ/\!/DD'$．

同理 $MN/\!/DD'$，且 $MNQR$ 为等腰梯形，有 M、N、Q、R 四点共圆．

（2）在$\triangle BAD'$与$\triangle BCF$中，有$\angle BAD'=\angle BCF$．

$\therefore\quad \angle PNQ=\angle BAD'=\angle BCR=\angle PRQ$，有 P、N、Q、R 四点共圆．

21．H 是$\triangle ABC$的垂心，A'、B'、C' 各是AH、BH、CH 三线上的点，这三点没有两点重合也不共线，设$B'C'$连线与直径为 BC 的圆交于 X、X'，$C'A'$ 连线与直径为CA的圆交于 Y、Y'，$A'B'$ 连线与直径为 AB 的圆交于 Z、Z'，则这六交点共圆．

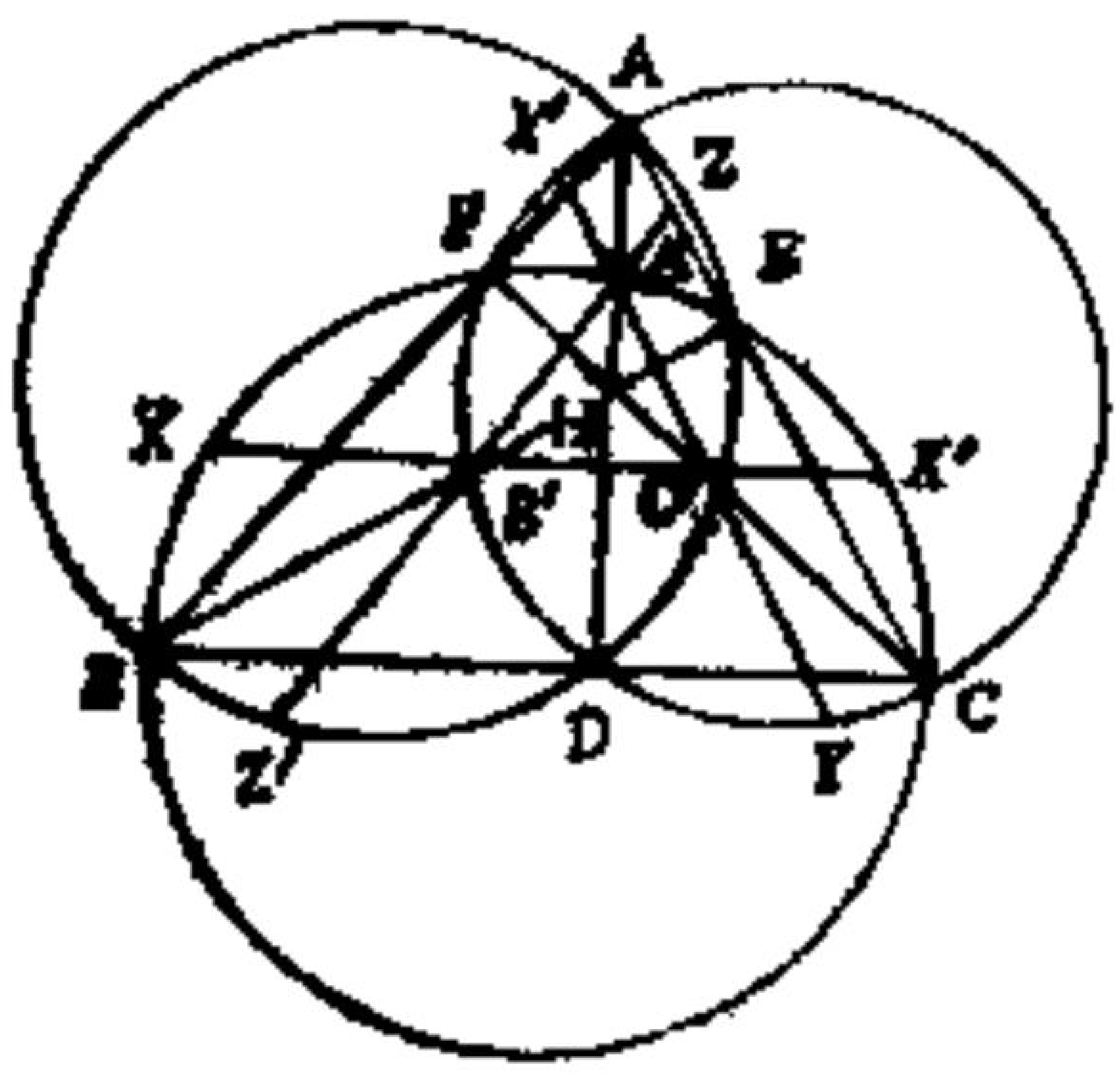


图16—21

证：由 X、X'、C、F，Y、Y'、C、F四点共圆，

$\therefore\quad C'X\cdot C'X'$

$=C'C\cdot C'F$

$=C'Y\cdot C'Y'$．

故 X、X'、Y、Y' 四点共圆．

同理，Y、Y'、Z、Z'，Z、Z'、X、X' 均共圆．若此三圆不相同，则它们的三公弦XX'、YY'、ZZ'应共点，与已知不合．故三圆为同一圆，即六交点共圆．

22. H 是$\triangle ABC$的垂心，X、Y、Z 各是 BC、CA、AB 上的点，并假定AX、BY、CZ三线共点，若

(1) 过H所引AX、BY、CZ的垂线各与直径为BC、CA、AB的圆相交，则诸交点共圆；

(2) 过H所引AX、BY、CZ的垂线与直径为AX、BY、CZ的圆相交，则诸交点共圆；

(3) 直径为BC、CA、AB的圆各与直径为AX、BY、CZ的圆相交，则诸交点共圆或共线.（Hagge定理）

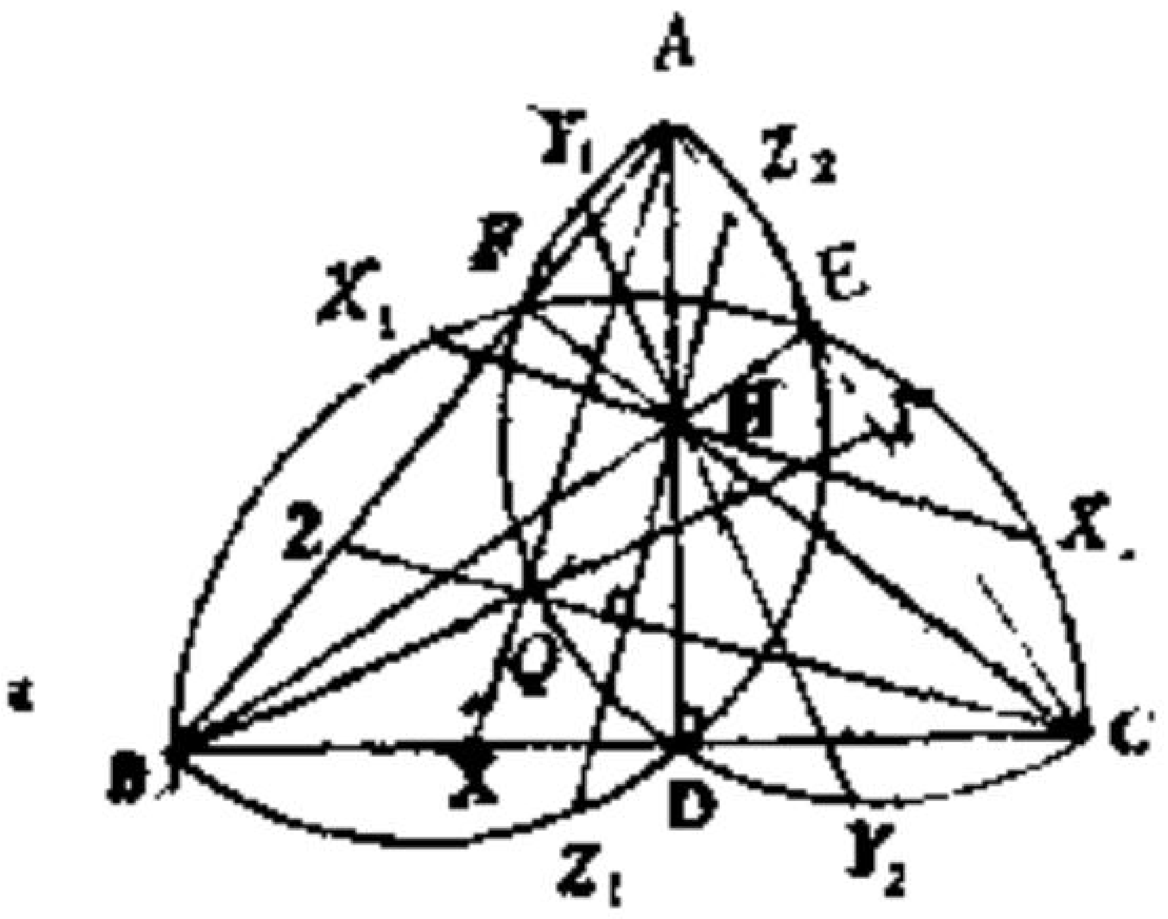


图16—22(1)

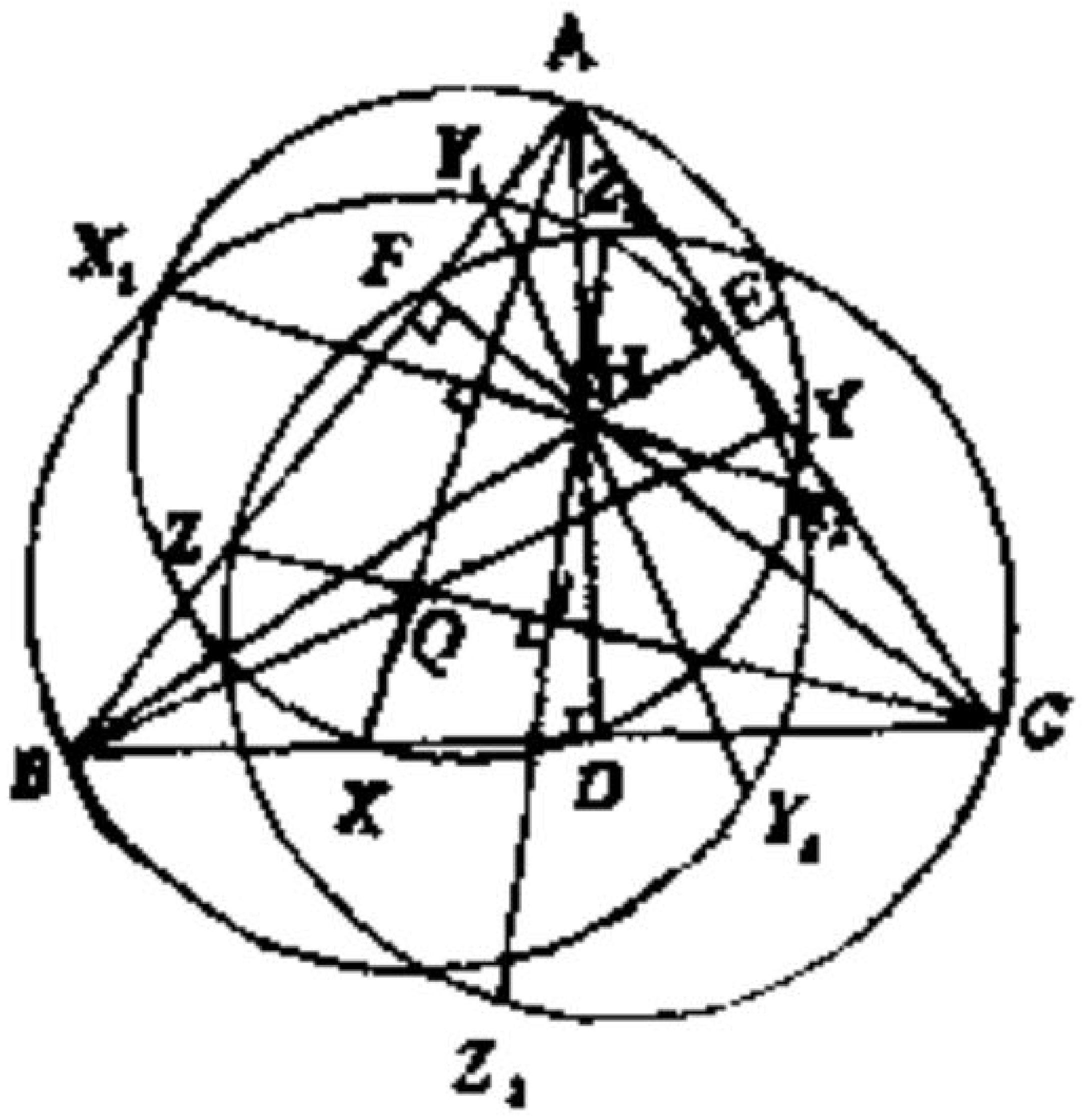


图16—22(2)

提要 (1) ⊙AB、⊙BC、⊙CA的每圆上均有六点.

∴ $HZ_1\cdot HZ_2=HB\cdot HE=HX_1\cdot HX_2$

$=HC\cdot HF=HY_1\cdot HY_2$.

(2)：在⊙AX、⊙BY、⊙CZ上，有：

$HX_1\cdot HX_2=HA\cdot HD$、$HY_1\cdot HY_2=HB\cdot HE$、

$HZ_1\cdot HZ_2=HC\cdot HF$.

又 $HA\cdot HD=HB\cdot HE=HC\cdot HF$.

(3)：为了证明(3)，我们来研究⊙BC与⊙AX的交点情况. 以下将证明两圆的交点X_1、X_2过垂心H.

作以 AC 为直径的圆，记为 $\odot AC$，则 CP 为 $\odot BC$ 与 $\odot AC$ 的公弦；AD 为 $\odot AX$ 与 $\odot AC$ 的公弦，而 X_1X_2 为 $\odot AX$ 与 $\odot BC$ 的公弦，所以 X_1X_2 过 CP、AD 的交点 H。

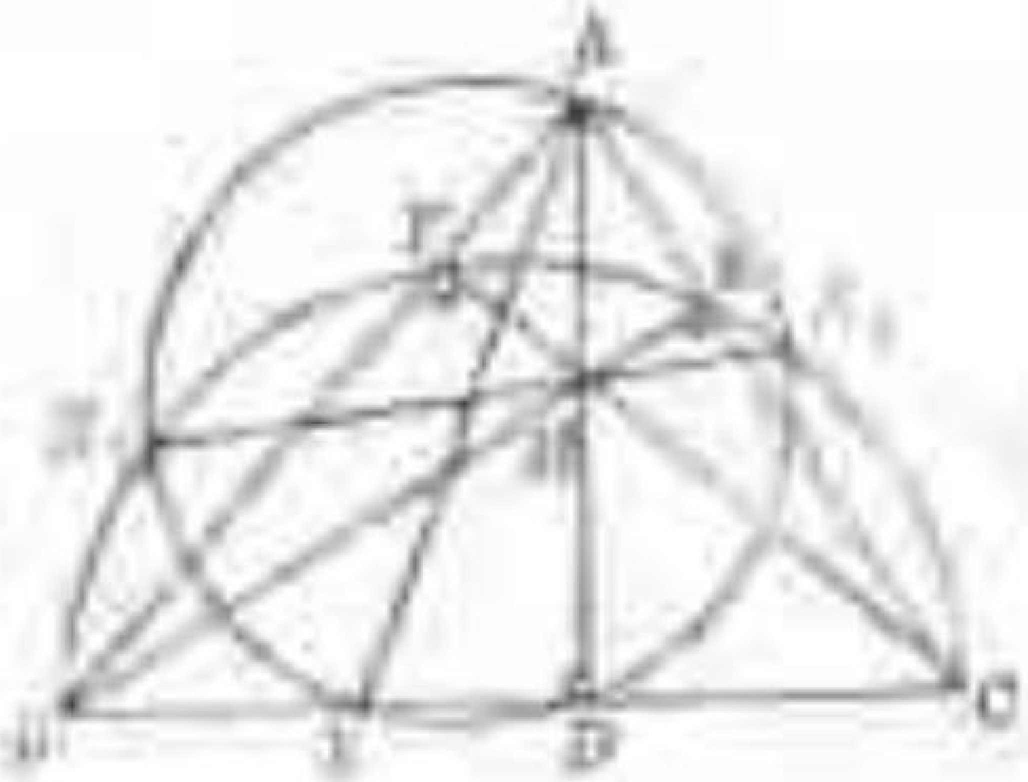


图16—22(3)

22. 由三角形的顶点向以对边为直径的圆引切线，则诸切点共圆，圆心是三角形的重心．证明．问三角形的……

证：AX_1、AX_2 是自顶点 A 向 $\odot BC$ 所作两切线，M 是 BC 的中点，则 $MX_1 \perp AX_1$，$MX_2 \perp AX_2$，因而 X_1、X_2 正好是 $\odot AM$ 与 $\odot BC$ 的交点，即本题是上题中 X 取在 BC 的中点的特例，由六切点共圆．

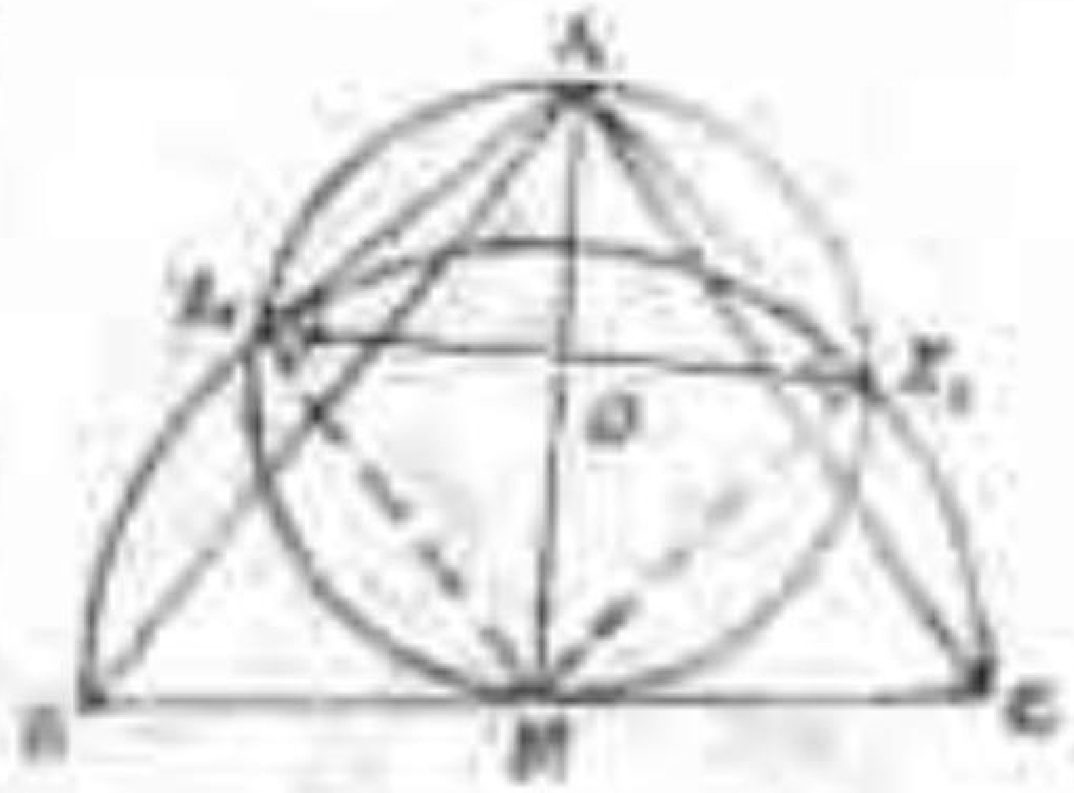


图16—23

由于 X_1X_2 是两圆的公弦，故 MO 是 X_1X_2 的中垂线，则 MO 即 BC 边的中线，故其圆心是重心。

23. I 是 $\triangle ABC$ 的内心或旁心，I 是……的垂足点．A'、B'、C' 各是 AI、BI、CI 三线上的点，若 $A'B' \perp CI$ 及 $A'C' \perp BI$，则 $B'C' \perp AI$，而且 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的非对应边（所在直线）的六交点共圆．

证：由 $A'C' \parallel FD$，$B'A' \parallel DE$，

有 $\dfrac{IF}{IC'} = \dfrac{DF}{A'C'} = \dfrac{ID}{IA'} = \dfrac{DE}{A'B'} = \dfrac{IE}{IB'}$．

∴ $B'C' \parallel FE \perp AI$。

又 四边形 $BXB'Z \backsim$ 四边形 $BFED$，且 $BF = BD$。

$\therefore\quad EX=FZ,\ XF=ZD.$

同理有：$DZ=DY=EX'=EZ'=FY'=FX$.

X、X'、Y、Y'、Z、Z'六点共圆，圆心为I.

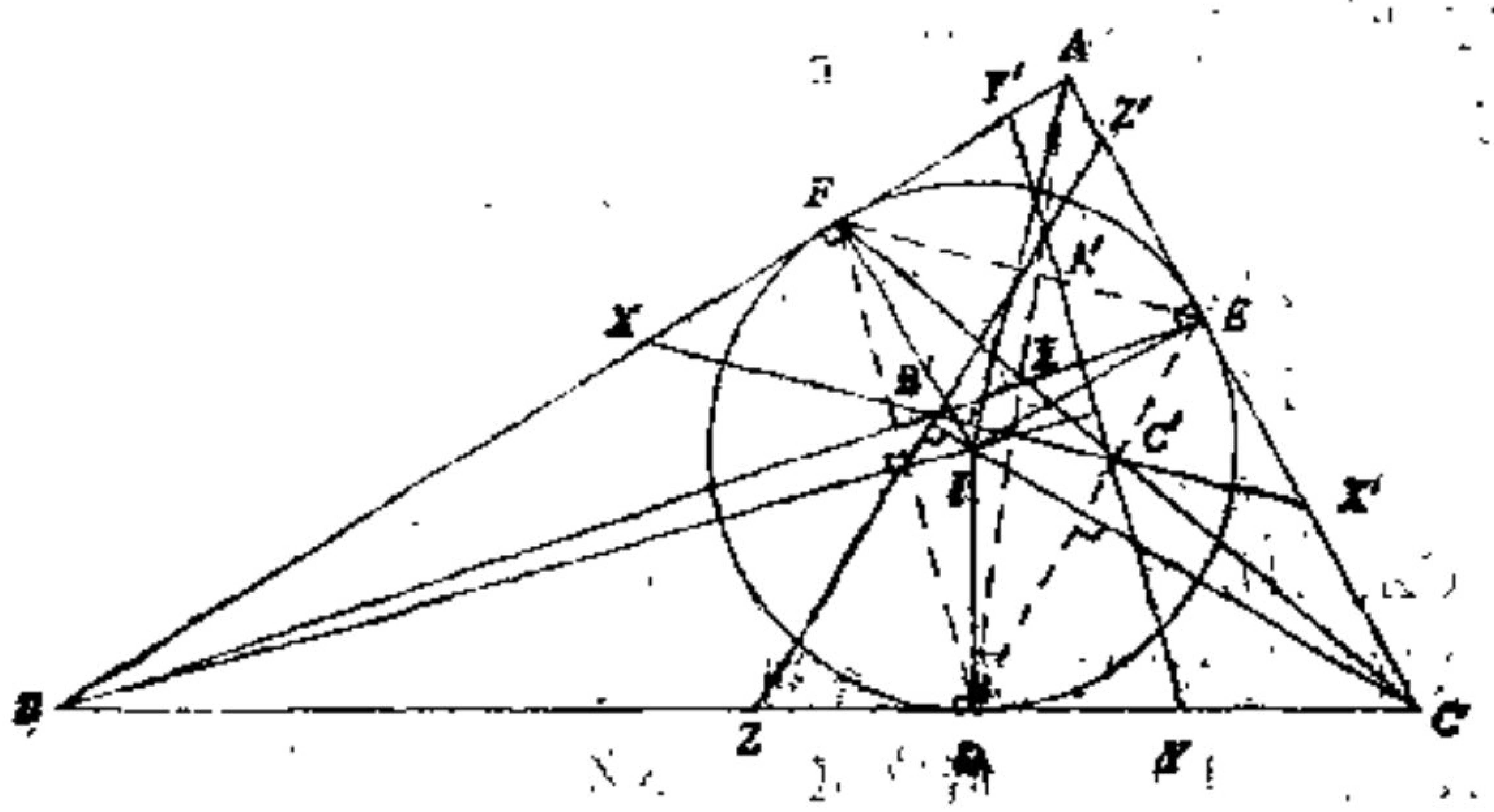


图16—24

25. K是$\triangle ABC$的陪位重心，A'、B'、C'各是AK、BK、CK三线上的点，若$A'B'\parallel AB$及$A'C'\parallel AC$，则$B'C'\parallel BC$，而且$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$的非对应边（所在直线）的六交点共圆.

这圆叫做$\triangle ABC$的塔刻（Tucker，1832—1905年）圆．当A'、B'、C'三点依照条件变动时，如此所得的一群圆，合称$\triangle ABC$的塔刻圆系．三乘比圆和余弦圆都是塔刻圆系中的圆．

证：$\because\ \dfrac{KB'}{B'B}=\dfrac{KA'}{A'A}=\dfrac{KC'}{C'C}$,

$\therefore$ $B'C' \parallel BC$.

$\because$ $AYA'Z'$ 是平行四边形，AA' 即 AK 平分 YZ'，而 AK 是陪位中线．由定理 149，YZ' 是 BC 边的逆平行线，有 Y、Z'、C、B 四点共圆．

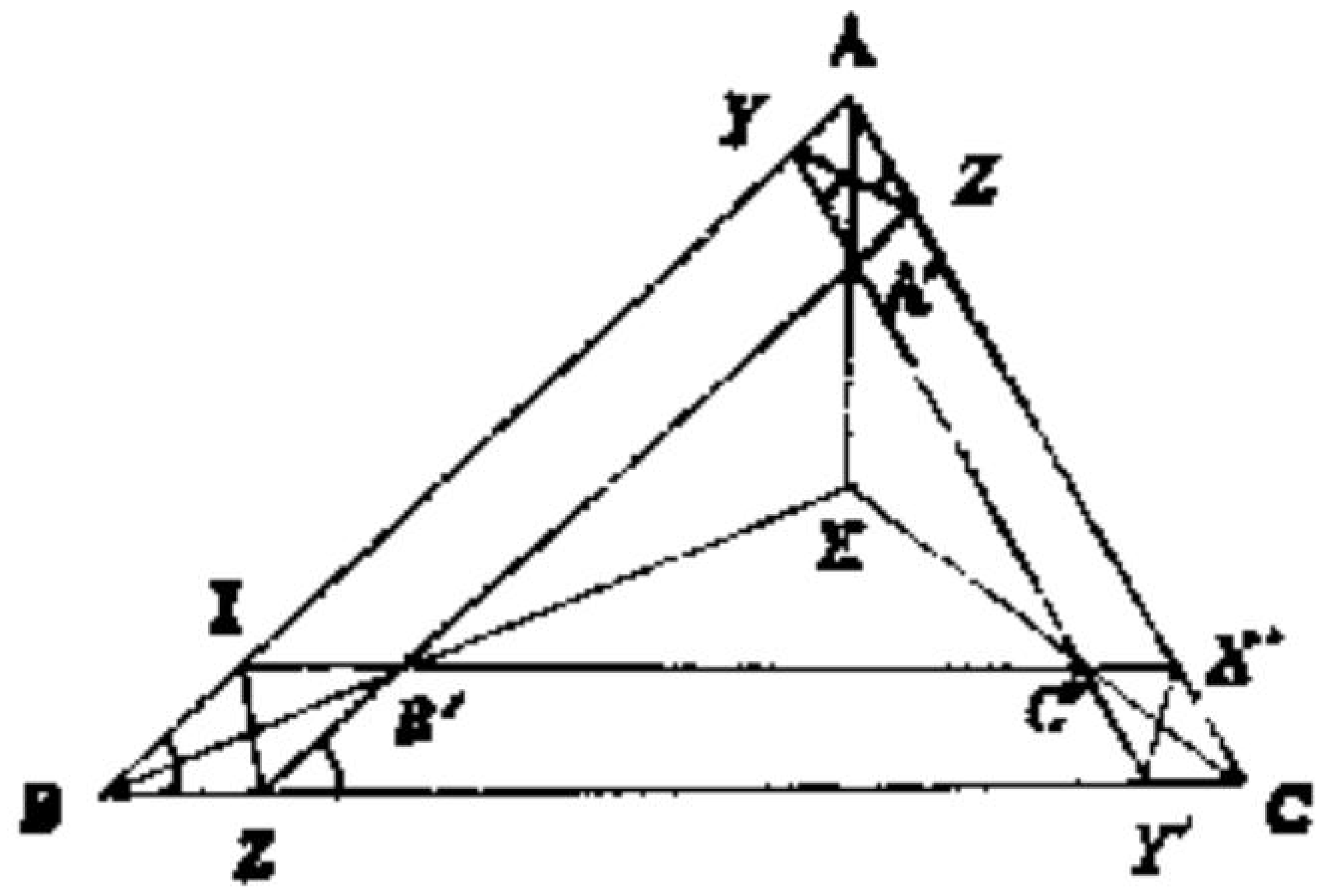


图 16—25

$\therefore$ $\angle Z'YY' = \angle AZ'Y = \angle YBC = \angle Z'ZY'$.

故 Y、Y'、Z、Z' 四点共圆．

26．在上题所说的条件下，若过 A'、B'、C' 各作三边 CB、CA、AB 的逆平行线，则它们的六个端点共圆．

这样所得的圆．属于塔剡圆系．

提要：（1）K 是陪位重心，XZ'、$X'Y'$ 各是 AC、AB 的逆平行线．由定理 149，得 $B'X = B'Z'$，$C'X' = C'Y'$，且 $\angle BXZ' = \angle BAC = \angle CX'Y'$．

又 $B'C' \parallel BC$，$\therefore$ $XX'C'B'$ 为等腰梯形，

故 $Z'Y' \parallel XX'$．

（2）：$\angle AYZ = \angle ABC = \angle ZZ'Y'$，$\therefore$ Y、Y'、Z、Z' 共圆．

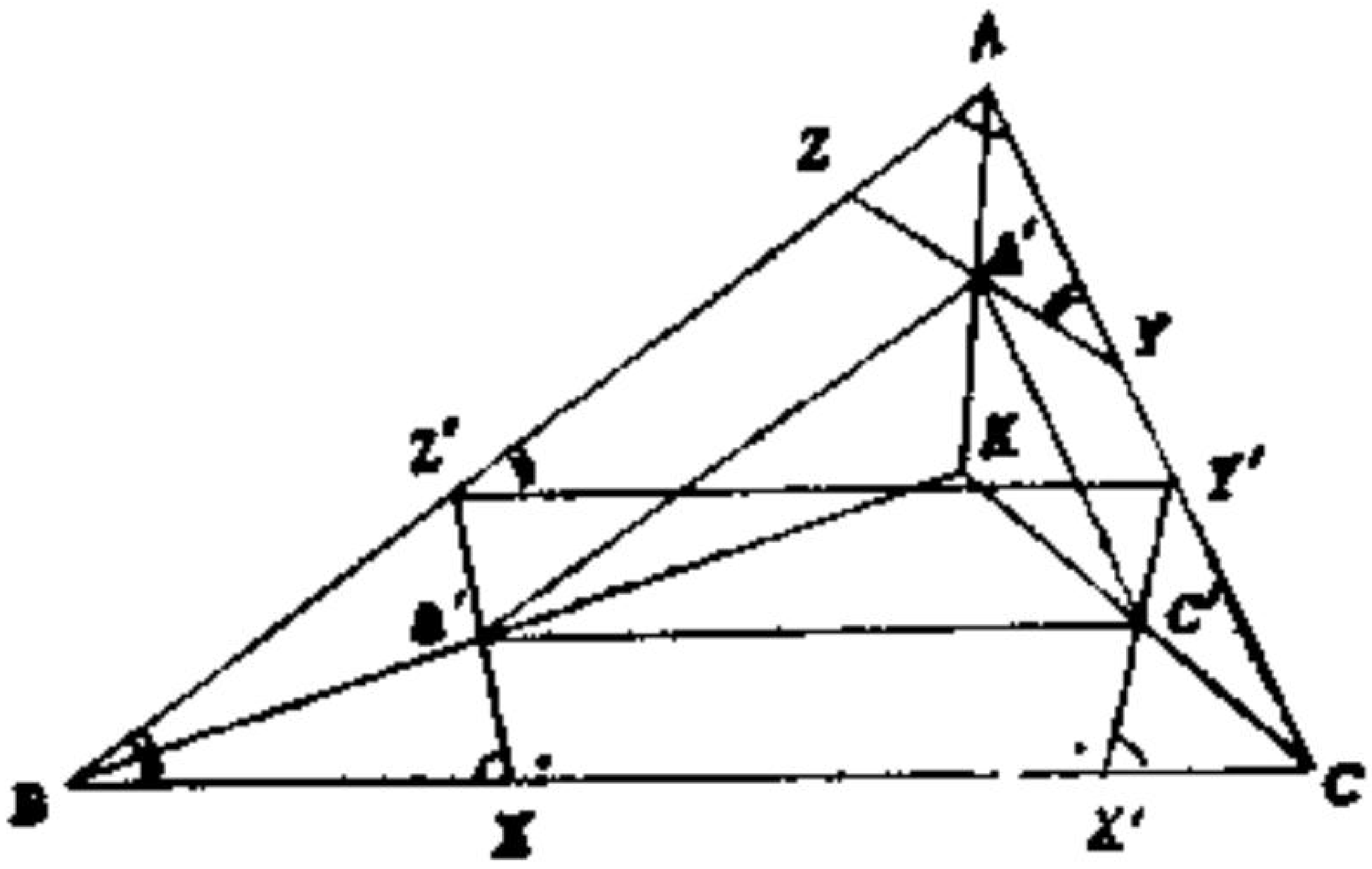


图 16—26

27．在25题中，如果假设 $A'B'$、$A'C'$ 各是 AB、AC 两边的逆平行线，那么 $B'C'$ 也是 BC 的逆平行线，而且 $\triangle A'B'C$ 与 $\triangle ABC$ 的非对应边（所在直线）的六交点共圆．

按此法所得的一群圆，实际还是塔刻圆系．

证：（1）$\triangle DEF$ 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，则 DE、EF、FD 是 AB、BC、CA 的逆平行线．

$\triangle LMN$ 是 $\triangle DEF$ 的中点三角形，则其三边 LM、MN、NL 也是 AB、BC、CA 的逆平行线，且 AL、BM、CN 的交点 K 即 $\triangle ABC$ 的陪位重心．

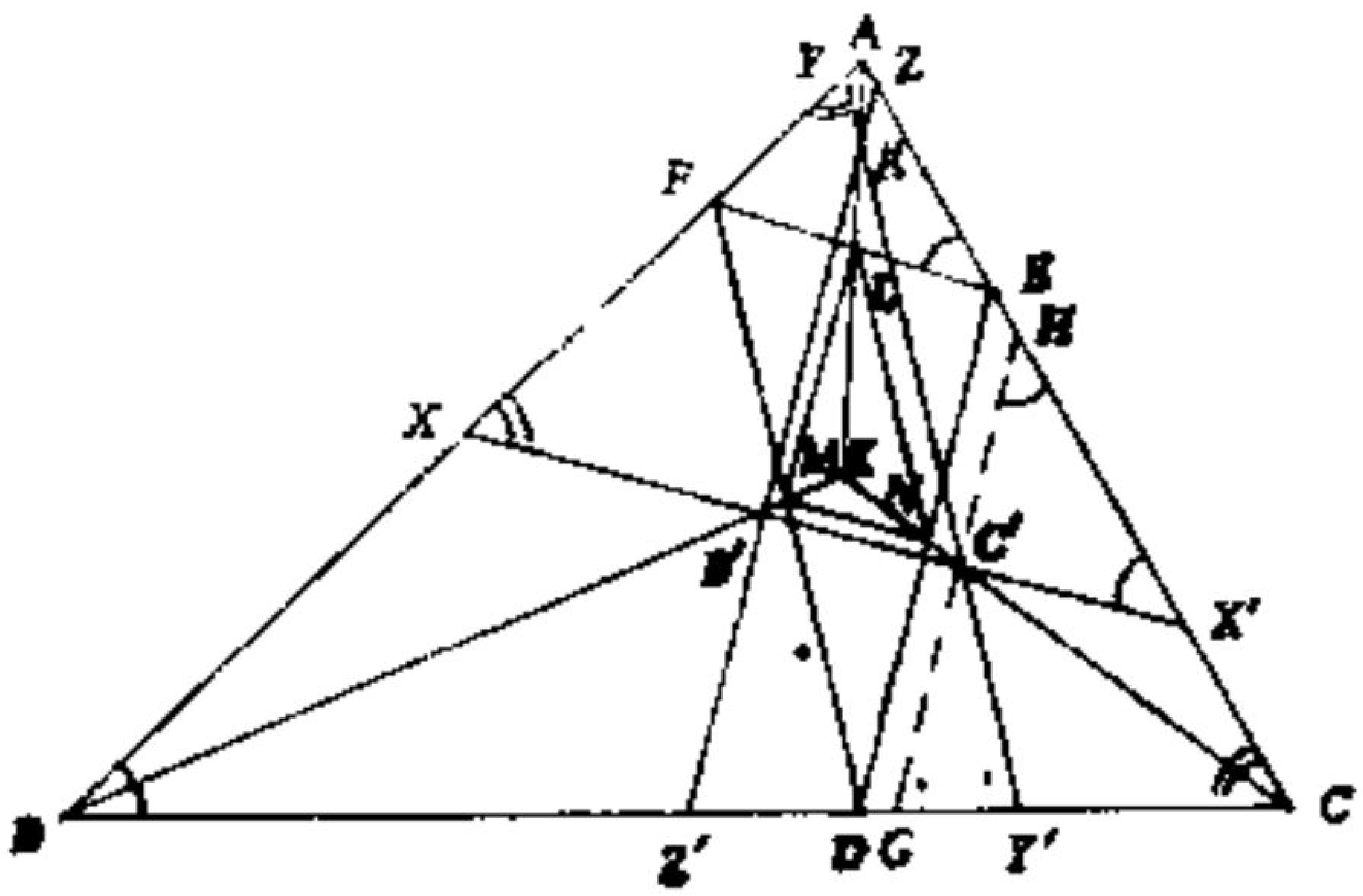


图 16—27

（2）：由 $A'B'$、$A'C'$ 各是 AB、AC 的逆平行线，有 $A'B' \parallel LM$，$A'C' \parallel LN$．故可由相似三角形，得 $B'C' \parallel MN$，所以 $B'C'$ 也是 BC 的逆平行线．

（3）：作 $GH \parallel DE$，则 GH 是 AB 的逆平行线，且 $C'G=C'H$．

又 $\angle C'HX'=\angle ABC=\angle AEF=\angle HX'C'$．

同理，$\angle C'GY'=\angle C'Y'G$，

$\therefore C'X'^2 = C'H \cdot C'G = C'Y'^2$。

由$\angle AXX' = \angle ACB = \angle BYY'$，又$C'X = C'Y$，

故$XYX'Y'$为等腰梯形，有X、X'、Y、Y'四点共圆。

28. 三角形每边上的高线足在其他两边上的射影共六点共圆。

这圆叫做三角形的泰罗（Taylor）圆，是著名圆之一。

证：由$\dfrac{FH}{Z'D} = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{EH}{YD}$，$\angle FHE = \angle Z'DY$，

有$FE \parallel Z'Y$。

$\because Z$、Y'、E、F四点共圆，故ZY'是FE也是$Z'Y$的逆平行线，故Y、Y'、Z、Z'四点共圆。

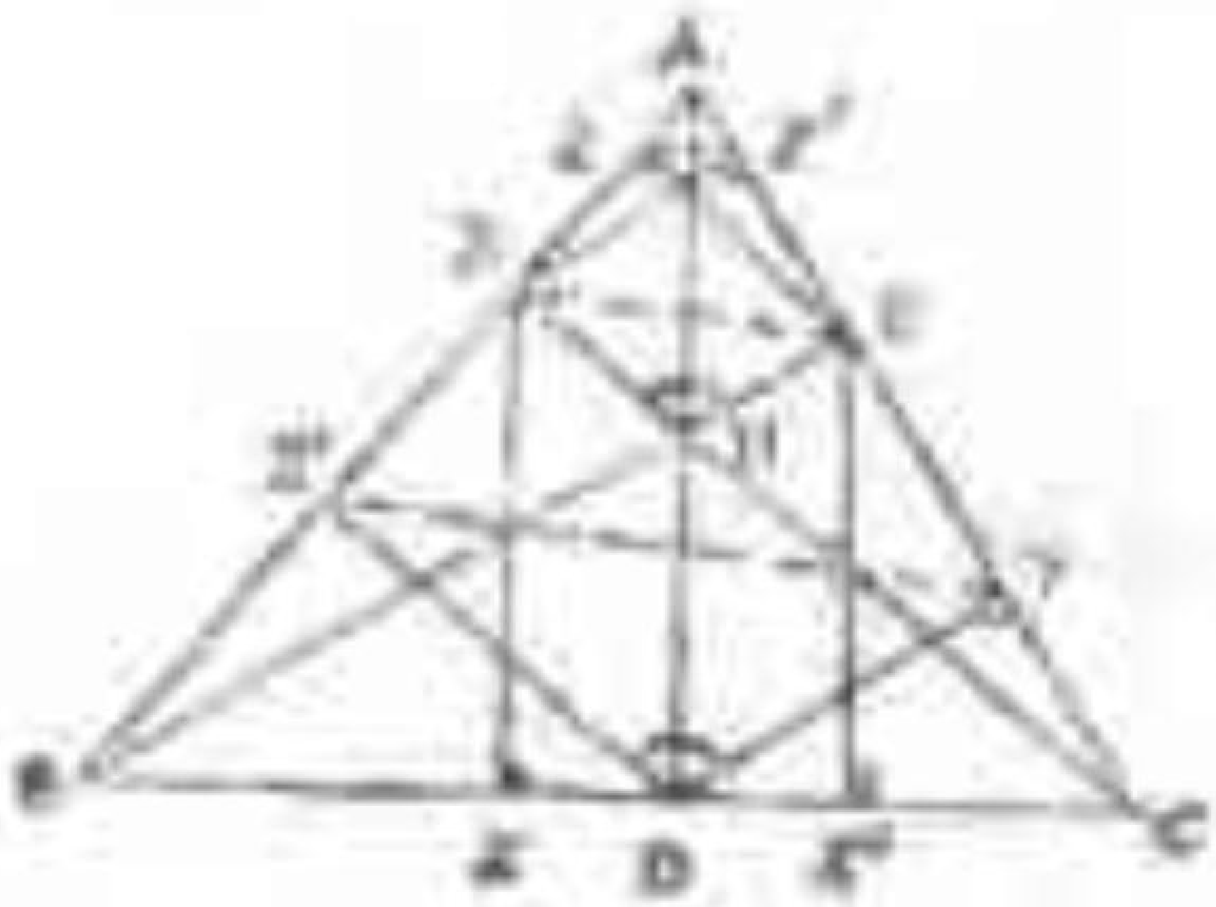


图16—28



图16—29

29. 设A'、B'、C'各是$\triangle ABC$三条高线AD、BE、CF上的点，合于$A'A : A'D = B'B : B'E = C'C : C'F = k$，则$A'$、$B'$、$C'$各在$CA$与$AB$、$AB$与$BC$、$BC$与$CA$上的射影共六点共圆。

提要(1)：欲证$BX \cdot BX' = BZ \cdot BZ'$

或$BX(BC - X'C) = BZ(BA - Z'A)$　　①

由$\triangle BB'X \backsim \triangle BCE$，$\triangle BB'Z \backsim \triangle BAE$，

$\triangle CC'X' \backsim \triangle CBF$，$\triangle AA'Z' \backsim \triangle ABD$。

有：$BX=BB'\cdot\frac{BE}{BC}$，$BZ=BB'\cdot\frac{BF}{BA}$，

$CX'=CC'\cdot\frac{CF}{CB}$，$AZ'=AA'\cdot\frac{AD}{AB}$． ②

（2）：用合比于题设，得 $\frac{AA'}{AD}=\frac{BB'}{BE}=\frac{CC'}{CF}$． ③

（3）：$\triangle ABD\backsim\triangle CBF$，$\frac{AD}{AB}=\frac{CF}{BC}$． ④

②、③、④分别代入①式左、右两边，得：

$$左=BB'\cdot\frac{BF}{BC}\left(BC-CC'\cdot\frac{CF}{CB}\right)$$

$$=BB'\cdot BF\left(1-\frac{CC'\cdot CF}{BC^2}\right)$$

$$=BB'\cdot BF\left(1-\frac{CX'}{BC}\right).$$

$$右=BB'\cdot\frac{BE}{BA}\left(BA-AA'\cdot\frac{AD}{AB}\right)$$

$$=BB'\cdot BE\left(1-\frac{AA'\cdot AD}{AB^2}\right)$$

$$=BB'\cdot BE\left(1-\frac{AZ'}{AB}\right).$$

$\because\ \frac{CX'}{AZ'}=\frac{CC'\cdot CF}{AA'\cdot AD}=\frac{k\cdot CF}{k\cdot AD}=\frac{CF}{AD}=\frac{BC}{AB}$，$\therefore\ \frac{CX'}{BC}=\frac{AZ'}{AB}$，

故①式成立．

30．以三角形每顶点为心作半径等于对边的圆，与两邻边（所在直线）相交于四点，这样共得十二个交点，它们分布于四个圆上，每圆上有六点，圆心恰是三角形的内心和三个旁心．

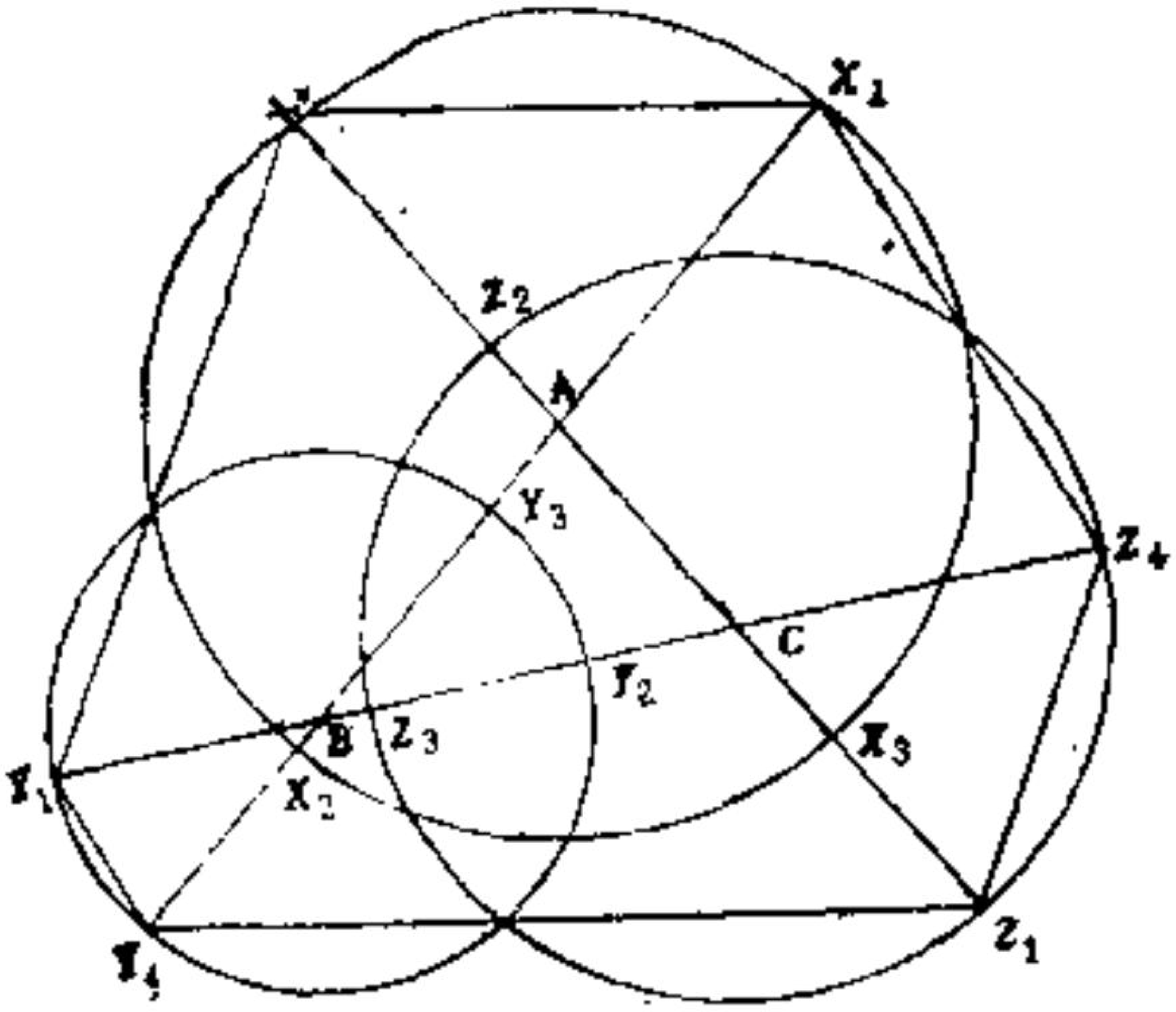


图16—30

提要（1）：$AX_1 = BC = AX_4$，
$AY_4 = AB + BY_4 = CZ_1 + AC = AZ_1$.

∴ $X_1X_4Y_4Z_1$ 是等腰梯形，故 X_1、X_4、Y_4、Z_1 四点共圆．同理，X_1、Y_1、Y_4、Z_4 四点共圆．

因 X_1、Y_4、Y_1、Z_4、Z_1、X_4 在△ABC 每边各两点，知六点共圆．

因 Y_4Z_1、Z_4X_1、X_4Y_1 的中垂线即△ABC 的三内角平分线．故其圆心为内心 I．

（2）：$CX_3 = AX_3 - AC = BC - AC$，

$CY_2 = BC - BY_2 = BC - AC$，

∴ $CX_3 = CY_2$．

又 $CZ_3 = CZ_1$，故 X_3、Y_2、Z_3、Z_1 四点共圆．同理，Y_4、Z_1、X_3、X_2 四点共圆．

可得 X_2、X_3、Y_2、Y_4、Z_1、Z_3 六点共圆．

∵ X_2X_3 的中垂线即 ∠A 的内角平分线；

Y_2Y_4 的中垂线即 $\angle B$ 的外角平分线；

Z_1Z_3 的中垂线即 $\angle C$ 的外角平分线.

故其圆心为 I_A.

31. 圆内接四边形的两对角线的中点，在四边中点所连成的平行四边形各边（所在直线）上的射影凡八点共圆.

提要：（1）：$PP'S'S$、$QQ'R'R$ 均为矩形，故各四点共圆，其圆心均为 MN 的中点 O，且 O 为平行四边形 $EFGH$ 对角线的交点.

（2）：$\angle P'PQ' = \angle MPQ' = \angle MHQ' = \angle MCG = \angle ABD = \angle MFP' = \angle MQP' = \angle P'QQ'$，

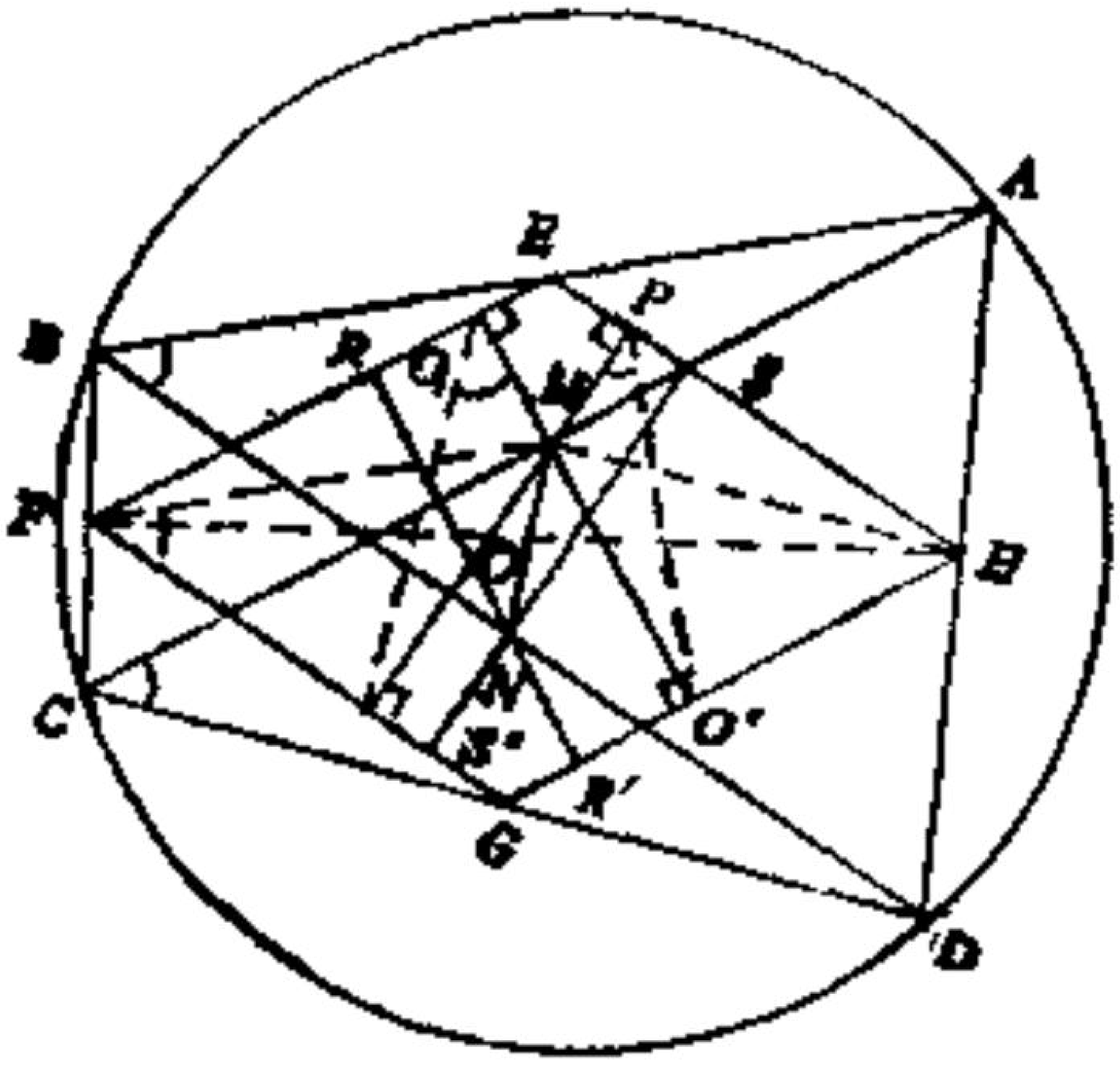


图 16—31

故 P、P'、Q、Q' 四点共圆.

三圆有共同圆心 O，且半径相等.

32. 设圆内接四边形的两对角线互相垂直，则其交点在四边形上的射影与四边形的中点凡八点共圆.

提要：由习题十第23题知，过对角线交点P所作一边的垂线必平分其对边，于是有H_1、H_3、M_1、M_3，H_2、H_4、M_2、M_4各四点共圆，其直径为M_1M_3、M_2M_4。故两圆有共同的圆心O且半径相等。

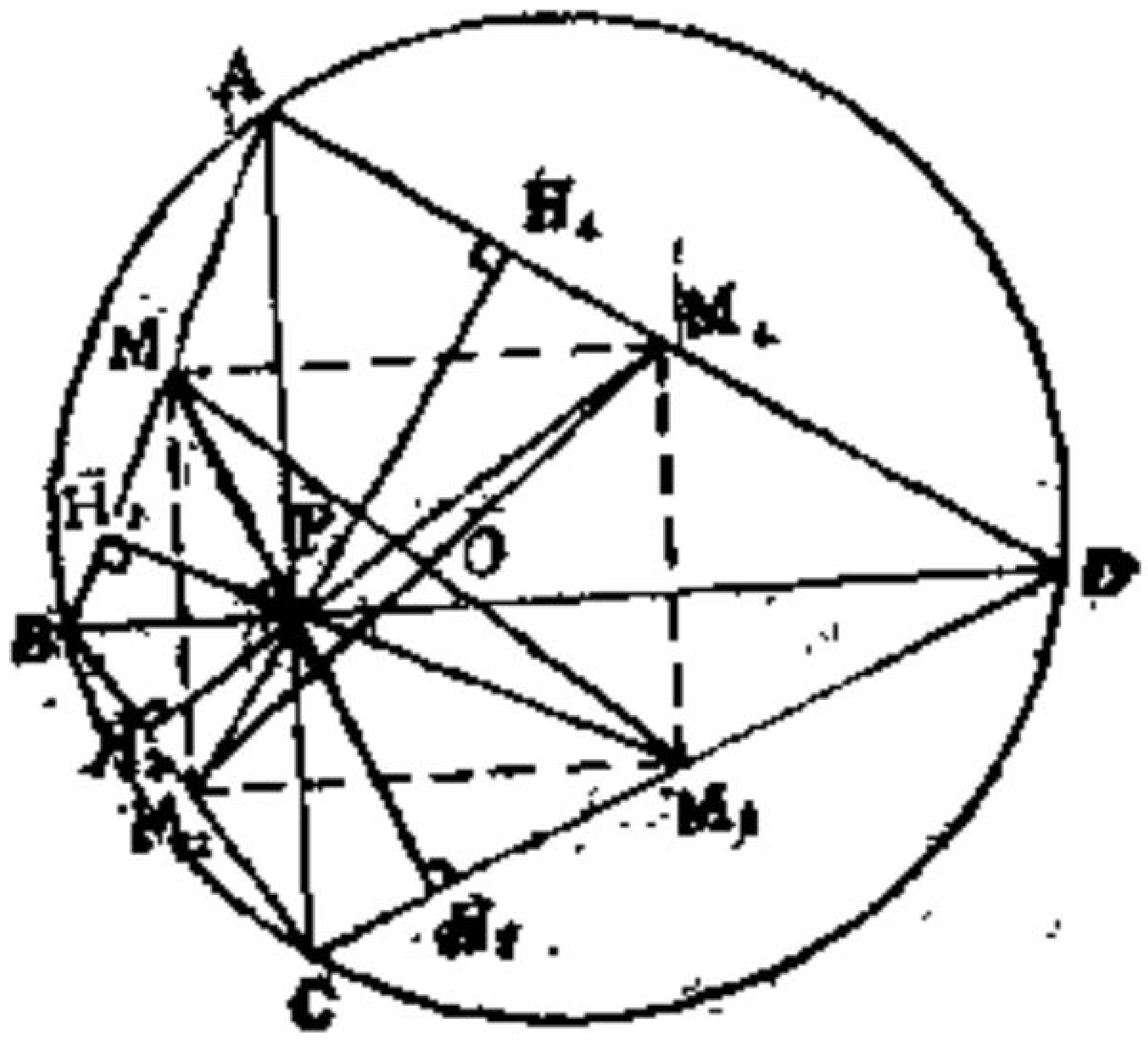


图16—32

33. 在四边形$ABCD$中，$AC\perp BD$，A'、C'是AC上的两点，B'、D'是BD上的两点。若$A'B'\perp AB$、$B'C'\perp BC$、$C'D'\perp CD$，则$D'A'\perp DA$。而且四垂足及$A'B'$与CD、$B'C'$与DA、$C'D'$与AB、$D'A'$与BC的四交点凡八点共圆。

注：当四边形$ABCD$的顶点恰组成垂心组时，则后四交点不存在，而且四垂足共线，参看习题十四第3题。

提要(1)：$\triangle QA'B'\backsim\triangle QBA$，$\triangle QB'C'\backsim\triangle QCB$，$\triangle QC'D'\backsim\triangle QDC$。

$$\therefore\quad \frac{QA'}{QB'}=\frac{QB}{QA},\ \frac{QB'}{QC'}=\frac{QC}{QB},\ \frac{QC'}{QD'}=\frac{QD}{QC}.$$

三式相乘并约去公因子得：$\dfrac{QA'}{QD'}=\dfrac{QD}{QA}$，

且有，$\angle A'QD'=\angle DQA$。

$\therefore\ \triangle A'QD'\backsim\triangle DQA$，可得$A'D'\perp AD$。

(2)：$\angle EHG+\angle EFG=\angle A'AE+\angle B'DE'$
$+\angle B'BE+\angle C'CG=180°$，

故E、F、G、H四点共圆。

又 $\angle EE'G=\angle E'DB'+\angle E'B'D$

$$=\angle GHD'+\angle A'HE=\angle EHG.$$

有 E、G、H、E' 四点共圆．

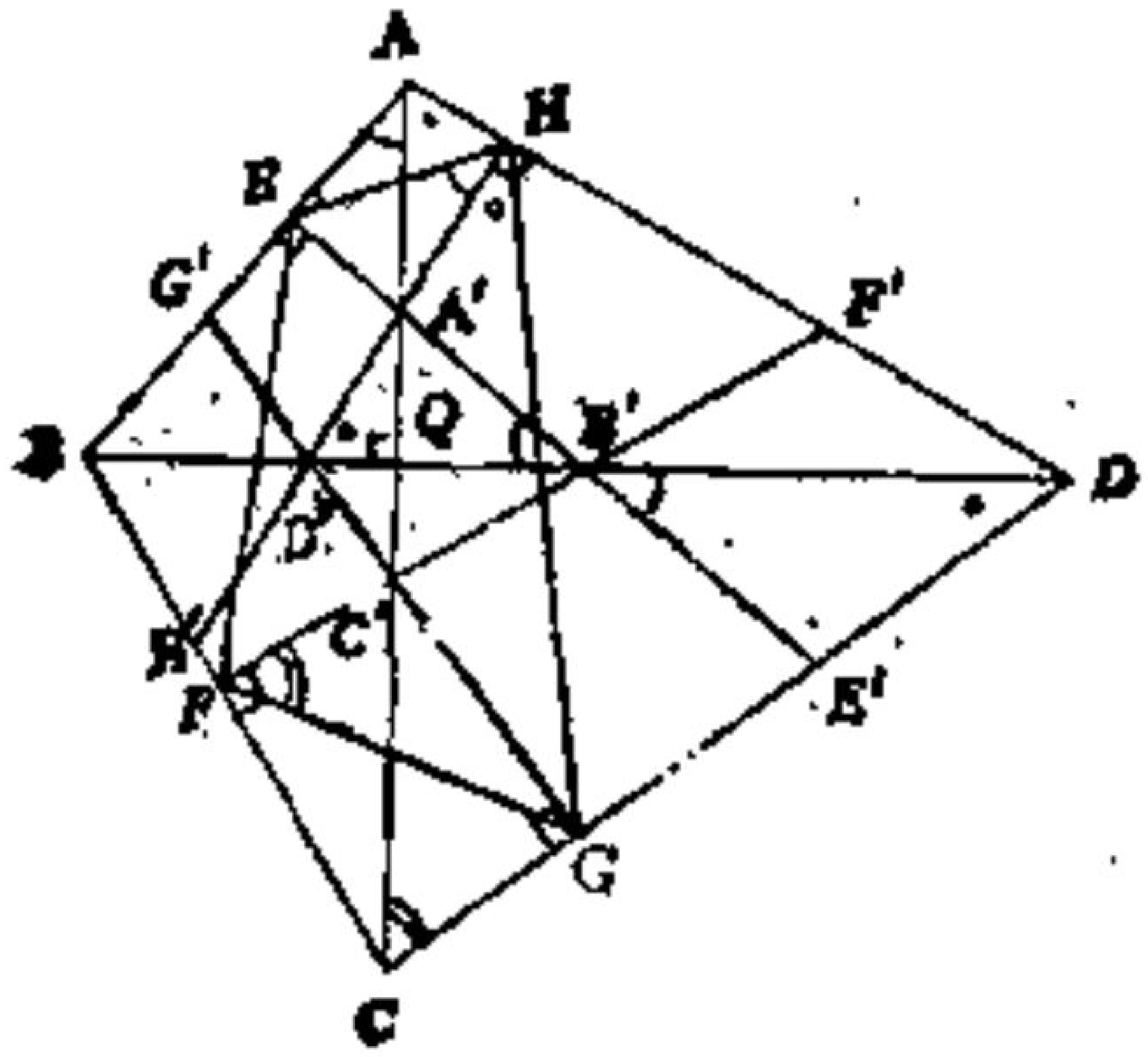


图16—33

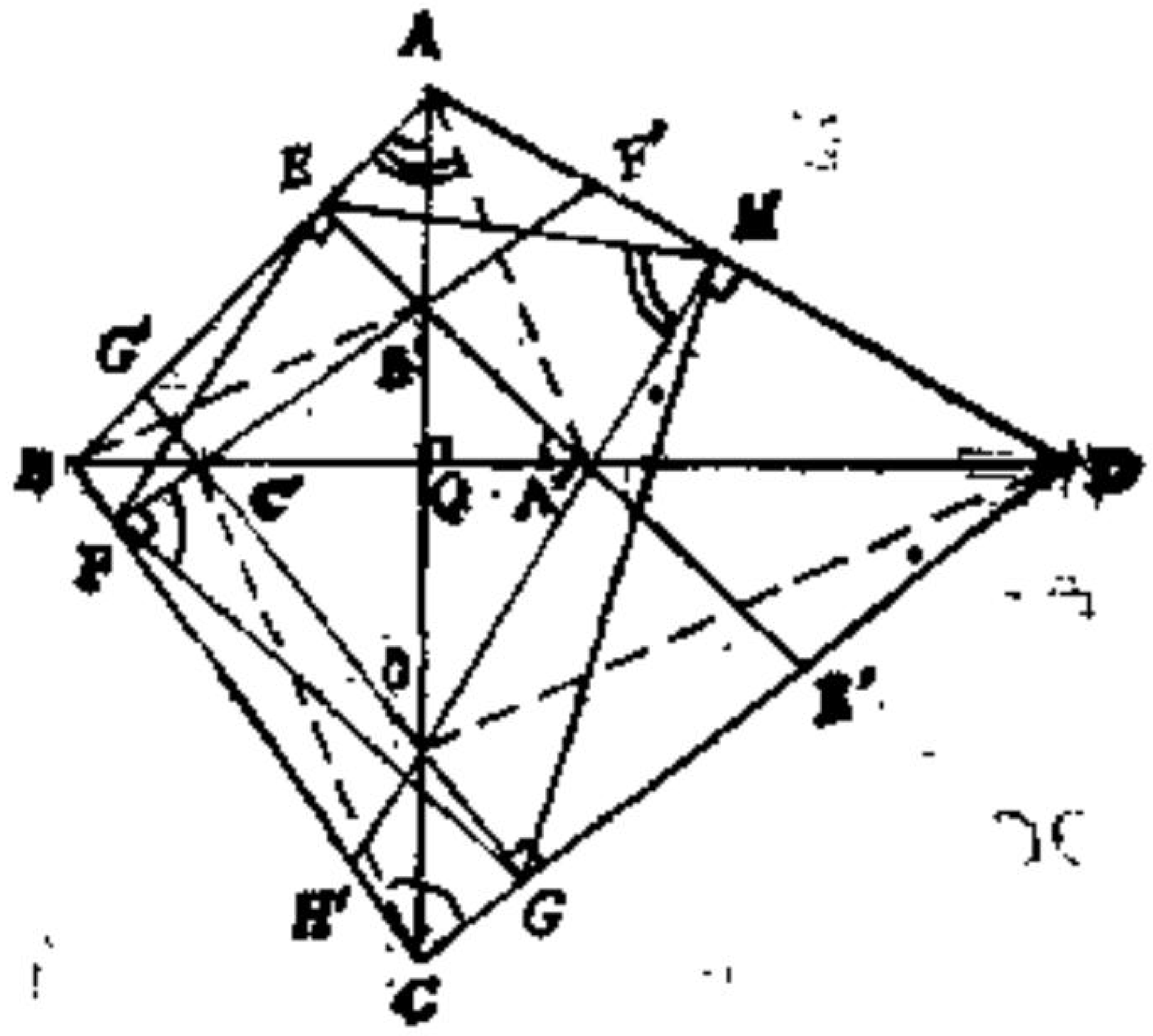


图16—34

34．在上题中，如果 A'、C' 是 BD 上的两点，B'、D' 是 AC 上的两点，其他条件不改，那么仍有相仿的结论．

注：本题也有类似于上题所注的特殊情况，参看习题十四第4题．

提要（1）：$D'A'\perp DA$ 的证明同上题．

（2）：由 $\triangle QD'A'\backsim\triangle QDA$，

$\triangle QB'C'\backsim\triangle QBC$，

可得 $\triangle QDD'\backsim\triangle QAA'$，

$\triangle QCC'\backsim\triangle QBB'$．

$\therefore\ \angle EHG+\angle EFG=\angle EAQ+\angle QAA'+D'DG+\angle GCQ+QCC'+\angle EBB'=\angle FAQ+\angle QDD'+\angle D'DG+\angle GCQ+\angle QBB'+\angle EBB'=180^\circ$．

故有 E、F、G、H 四点共圆．

又 $\angle EE'G=\angle E'DD'+\angle D'DA'+\angle E'A'D$

$= \angle GHD' + \angle A'AQ + \angle QAB$

$= \angle GHD' + \angle EHD' = \angle EHG.$

$\therefore$ E、G、H、F′ 四点共圆.

第八节 共 点 圆 习 题 十 七

1. 以一三角形的每边向外侧各作正三角形，求证：所作三个正三角形的外接圆共点，试问这点是原三角形的什么点？

提要：设⊙ABF与⊙ACE的第二交点为O，连OB、OC，则$\angle BOC = \angle F + \angle E = 120°$.

这点叫做$\triangle ABC$的正等角中心。

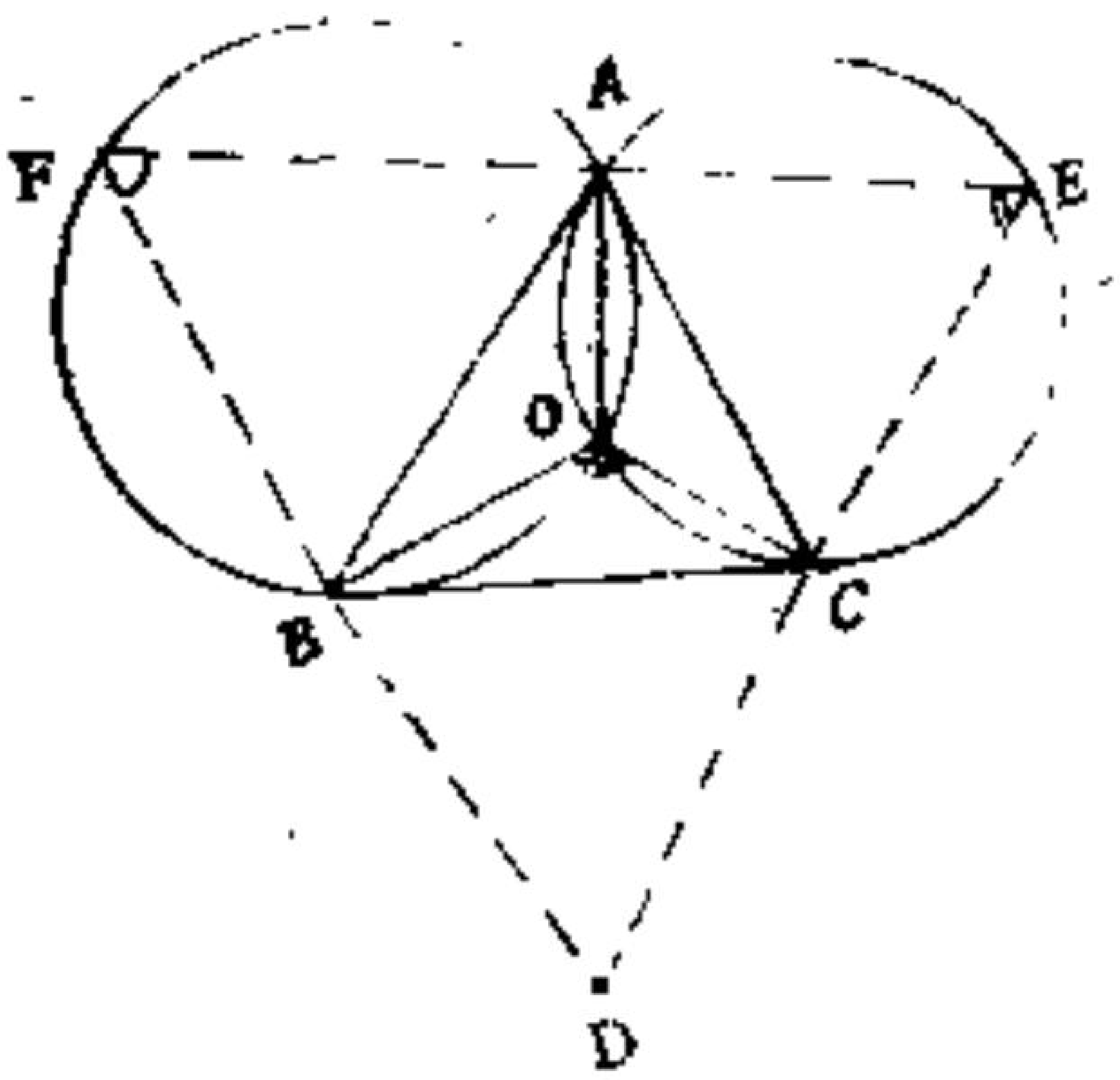


图17—1

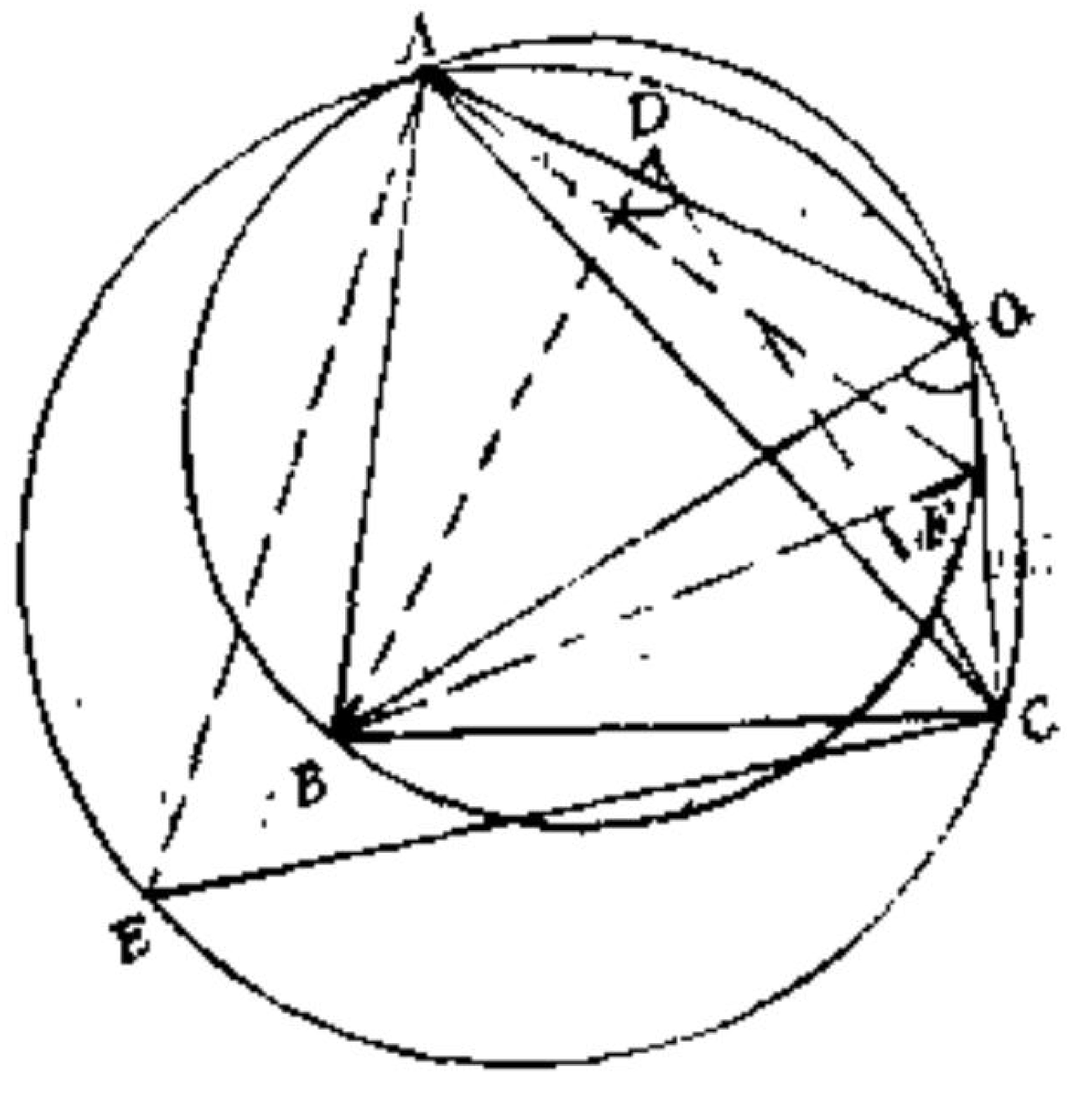


图17—2

2. 在上题中，设原三角形不是正三角形，而所作三个正三角形是向内侧作的。求证所作三个正三角形的外接圆仍然共点，这点是原三角形的什么点？

提要：$\angle AOC - \angle AOB = \angle BOC = 60°$.

此点是原三角形的负等角中心。

3．以一三角形的两边各为一边向外侧作正方形，又以第三边为一对角线作正方形，求证所作三个正方形的外接圆共点。

提要：$\odot ABDE$与$\odot ACFG$的第二交点为P.

$\angle BPC=\angle BEA+\angle CGA=90^\circ=\angle BHC$.

$\therefore$　P在$\odot BHCI$上。

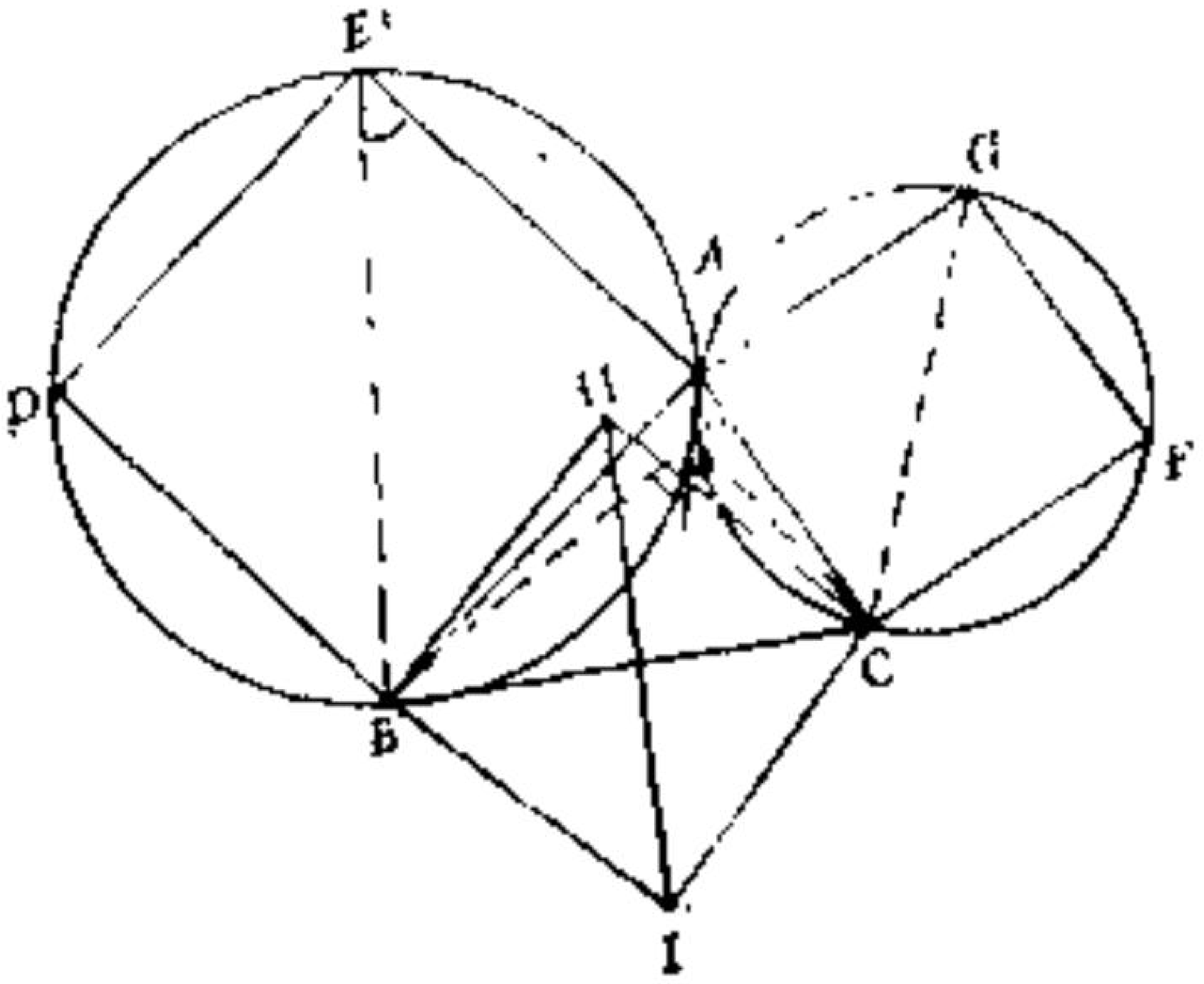


图17—3

4．设I是$\triangle ABC$的内心；过B且切直线CI于I作圆，又过C且切直线BI于I作圆，求证所作两圆与$\odot ABC$共点。

提要(1)：所作两圆相交于Q，

有$\angle IQB=\angle BID$,

$\angle IQC=\angle CIE$.

(2)：$\angle BQC=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

$=\angle B+\angle C$.

(3)：$\angle A+\angle BQC=180^\circ$

故Q在$\odot ABC$上。

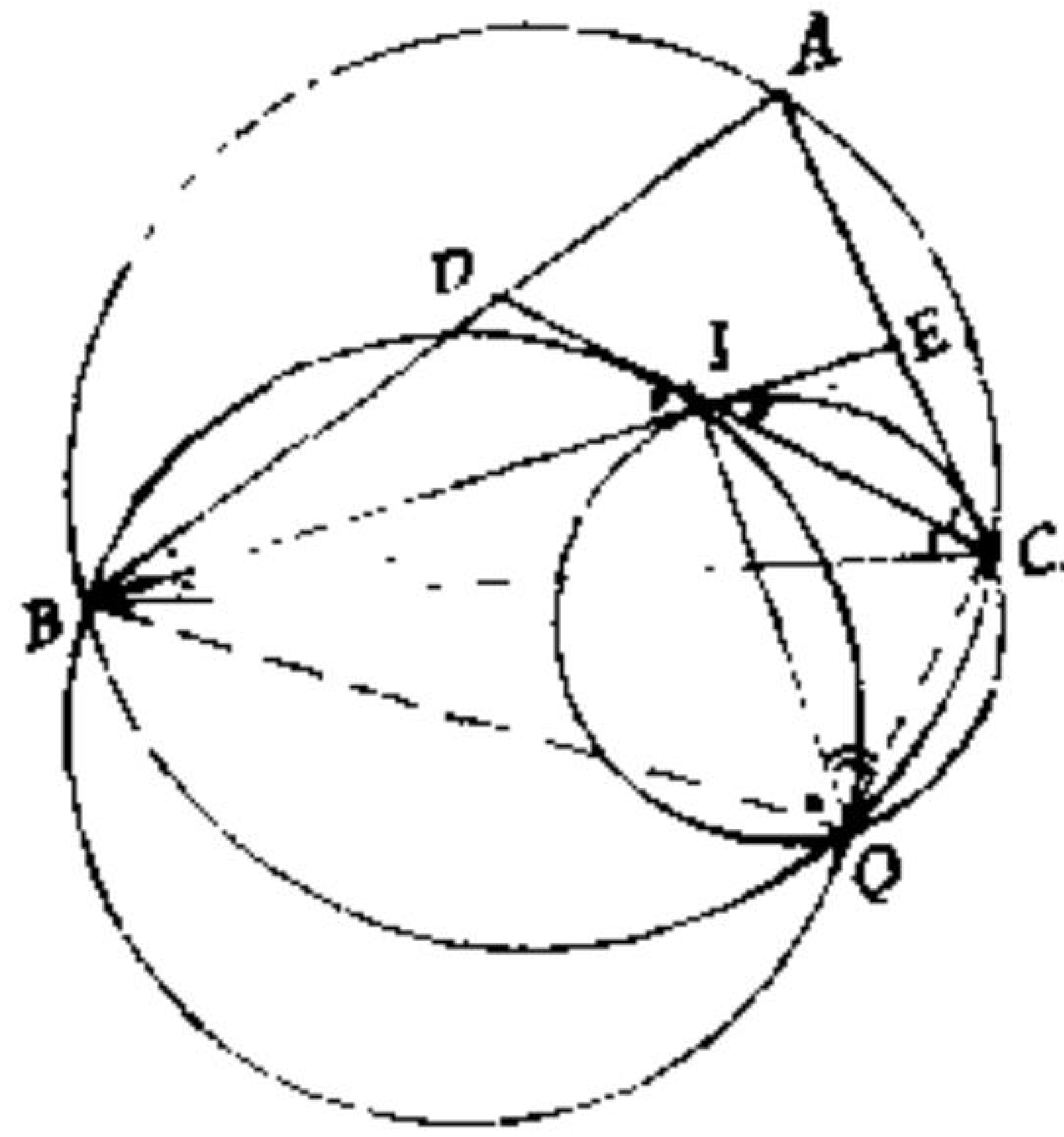


图17—4

5．上题的 I 若是$\triangle ABC$的任一旁心，试问尚成立否？

解(1)：令 I' 是$\angle A$所对的旁心，

$\angle BQC=\angle QBI'+\angle QI'B$

$+\angle QCI'+\angle QI'C$

$=2\angle BI'C$.

(2)：$2\angle I'BC+2\angle I'CB$

$=\angle DBC+\angle ECB$

$=(180°-\angle B)$

$+(180°-\angle C)$

$=360°-(\angle B+\angle C)$

(3)：$\because$ $\angle BQC=2\angle BI'C$

$=2[180°-(\angle I'BC$

$+\angle I'CB)]=\angle B+\angle C$,

故$\angle A+\angle BQC=180°$.

即 Q 仍在$\odot ABC$上。

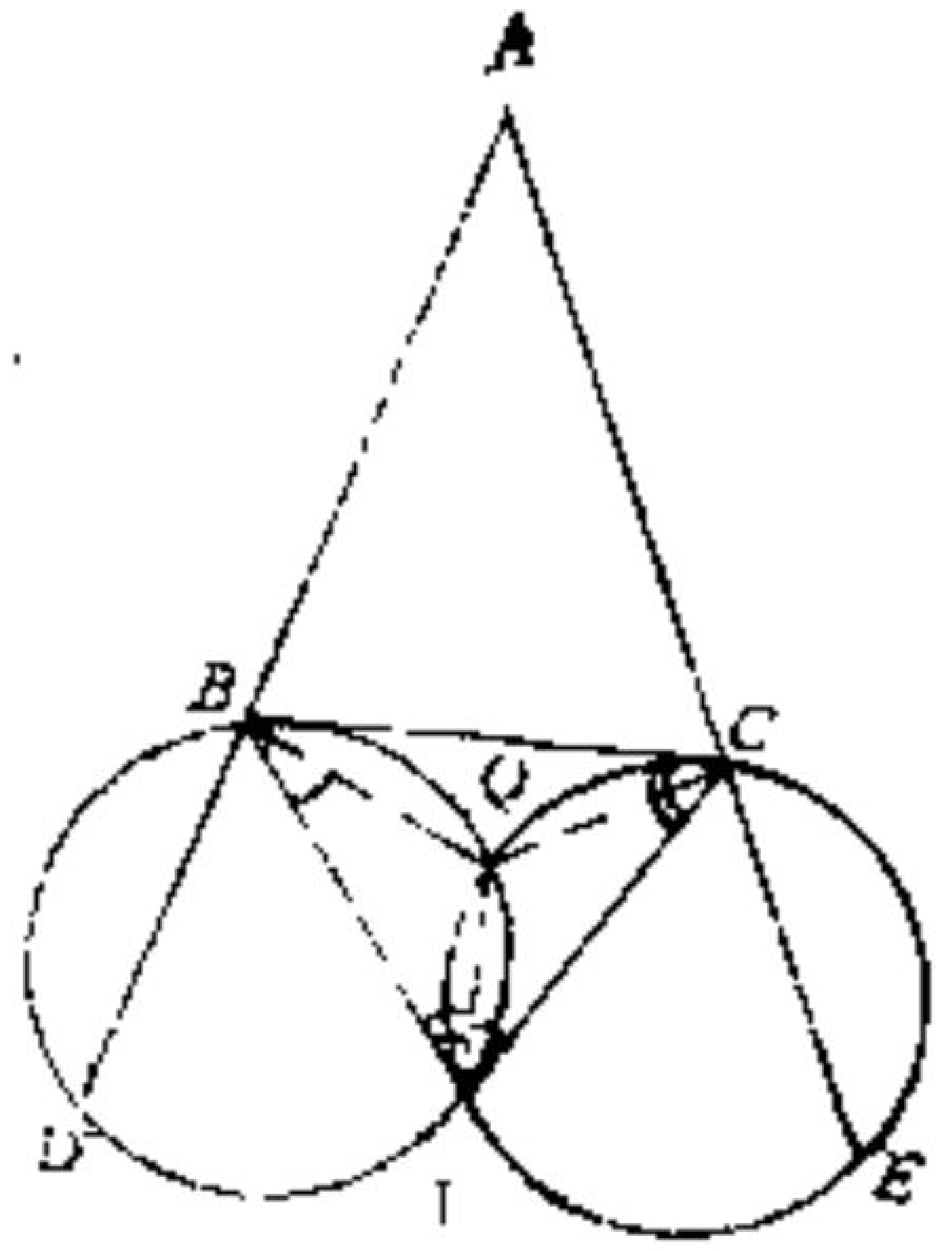


图17—5

6．在$\triangle ABC$中：设 c_1 是过 C 而切 AB 于 A 的圆，c_2 是过 A 而切 BC 于 B 的圆，c_3 的过 B 而切 CA 于 C 的圆，又设 c_1' 是过 B 而切 CA 于 A 的圆，c_2' 是过 C 而切 AB 于 B 的圆；c_3' 是过 A 而切 BC 于 C 的圆，求证：

(1) c_1、c_2、c_3 三圆会于一点Ω；

(2) c_1'、c_2'、c_3' 三圆会于一点 Ω′；

(3) Ω与 Ω′ 是$\triangle ABC$的等角共轭点。

Ω与 Ω′ 两点由克里尔(crelle, 1780—1855 年)于1816年发见，但当时人们对于研究这两点的兴趣未能持久，以致湮没无闻，至1875年，法人布洛卡（Brocard）重新发现这两点，并获得重要定理，因而人们把Ω叫做$\triangle ABC$的正布洛卡点，Ω′ 叫做负布洛卡点。自此而后，人们对于这两点的研究

可谓盛极一时。关于这系统的研究成果，统称布洛卡几何。

提要(1)：设⊙C_1与⊙C_2的第二交点为Ω，连ΩA、ΩB、ΩC．

有$\angle CC_1A=2\angle CAB$

$\angle AC_2B=2\angle ABC$．

又$\angle C\Omega A+\frac{1}{2}\angle CC_1A$

$=180^\circ$

$\angle A\Omega B+\frac{1}{2}\angle AC_2B$

$=180^\circ$

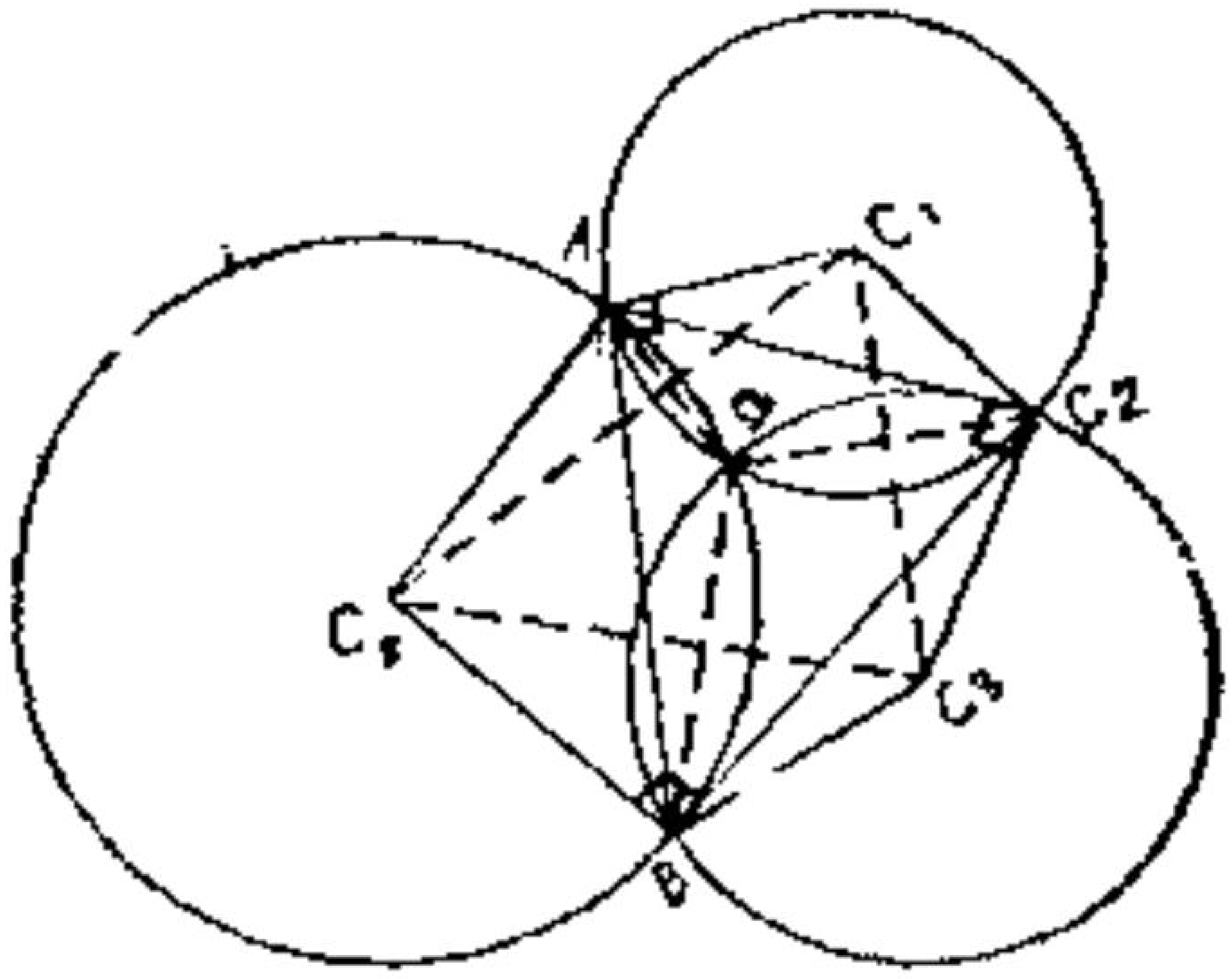


图17—6(1)

(2)：$\angle C\Omega A+\angle A\Omega B=360^\circ-\frac{1}{2}(\angle CC_1A+\angle AC_2B)$

$$360^\circ-(\angle CAB+\angle ABC)=180^\circ+\angle BCA.$$

又$\angle B\Omega C=360^\circ-(\angle C\Omega A+\angle A\Omega B)$

$$=180^\circ-\angle BCA=180^\circ-\frac{1}{2}\angle BC_3C.$$

∴ Ω在⊙C_3上。

证(3)：

需证$\angle \Omega AB=\angle \Omega' AC$．

由$\angle \Omega AB=\angle C_1C_2C_1'$，$\angle \Omega' AC=\angle C_1C_3'C_1'$，

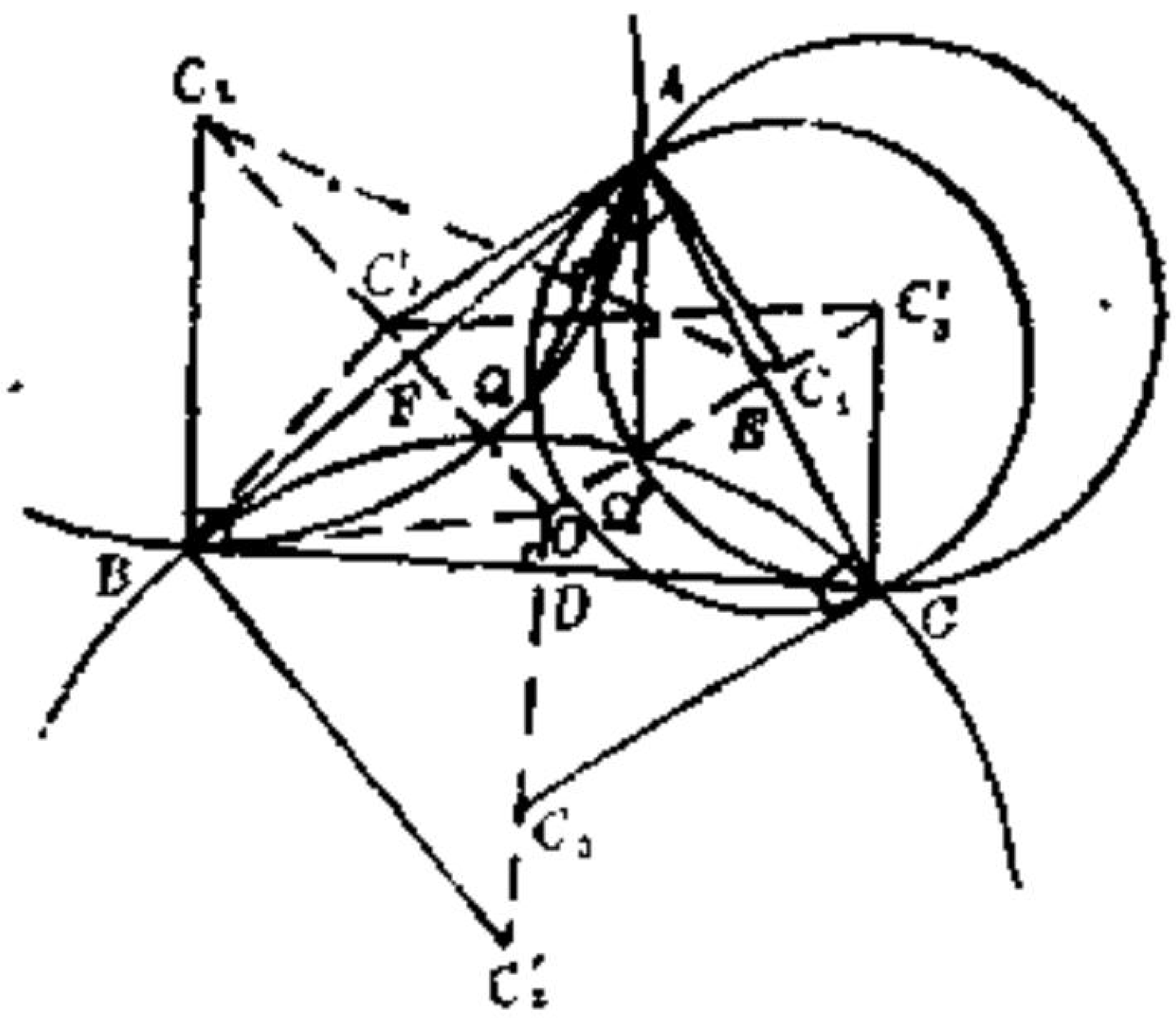


图17—6(3)

故需 C_1、C_2、C_1'、C_3' 四点共圆。

令 O 为△ABC 的外心，由 $C\ O\perp AB$，$C_1'A\perp AC$，

有∠$AC_1'F$、∠CAB 均与∠$C'AF$ 互余，

∴ ∠$AC_1'O$=∠CAB。

又∠BOC_3=∠CAB，

∠OBC_2与∠CAB 均与∠OBD 互余，

故∠OBC_2=∠CAB=∠$AC_1'O$=∠$BC_1'O$。

可得△OBC_2∽△$OC_1'B$，有 $OB^2=OC_2\cdot OC_1'$，

同理△OCC_1∽△$OC_3'C$，有 $OC^2=OC_1\cdot OC_3'$。

∵ $OB=OC$，故 $OC_2\cdot OC_1'=OC_1\cdot OC_3'$，

因而 C_1、C_2、C_1'、C_3' 四点共圆。

即 ∠ΩAB=∠$\Omega' AC$。

故可得 Ω、Ω′ 是△ABC的等角共轭点。

7．设$\angle XAY$是固定的角，在它的两边上各截一线段AB、AC，使$AB+AC$有一定的长，则$\odot ABC$恒过一定点

证(1)：取$AB=AC=\frac{1}{2}$定长l，过B、C各作AX、AY的垂线其交点为M，有A、B、M、C共圆且M为定点。

(2)：当$AB'+AC'=l$时，有$\triangle MBB'\cong\triangle MCC'$，

$\therefore\ \angle BMB'=\angle CMC'$，

故$\angle B'MC'=\angle BMC$，

$\therefore\ \odot AB'C'$必过M点。

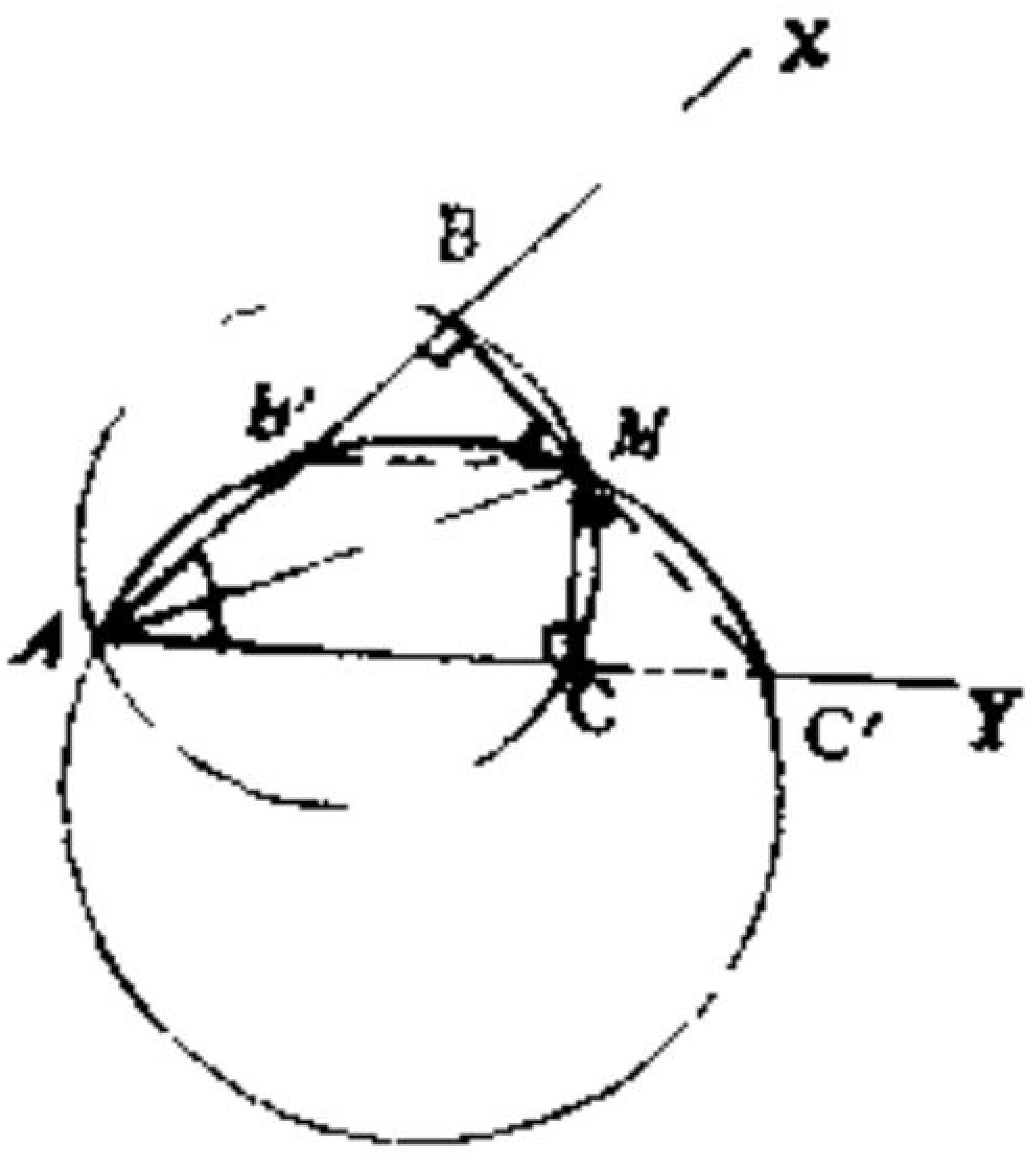
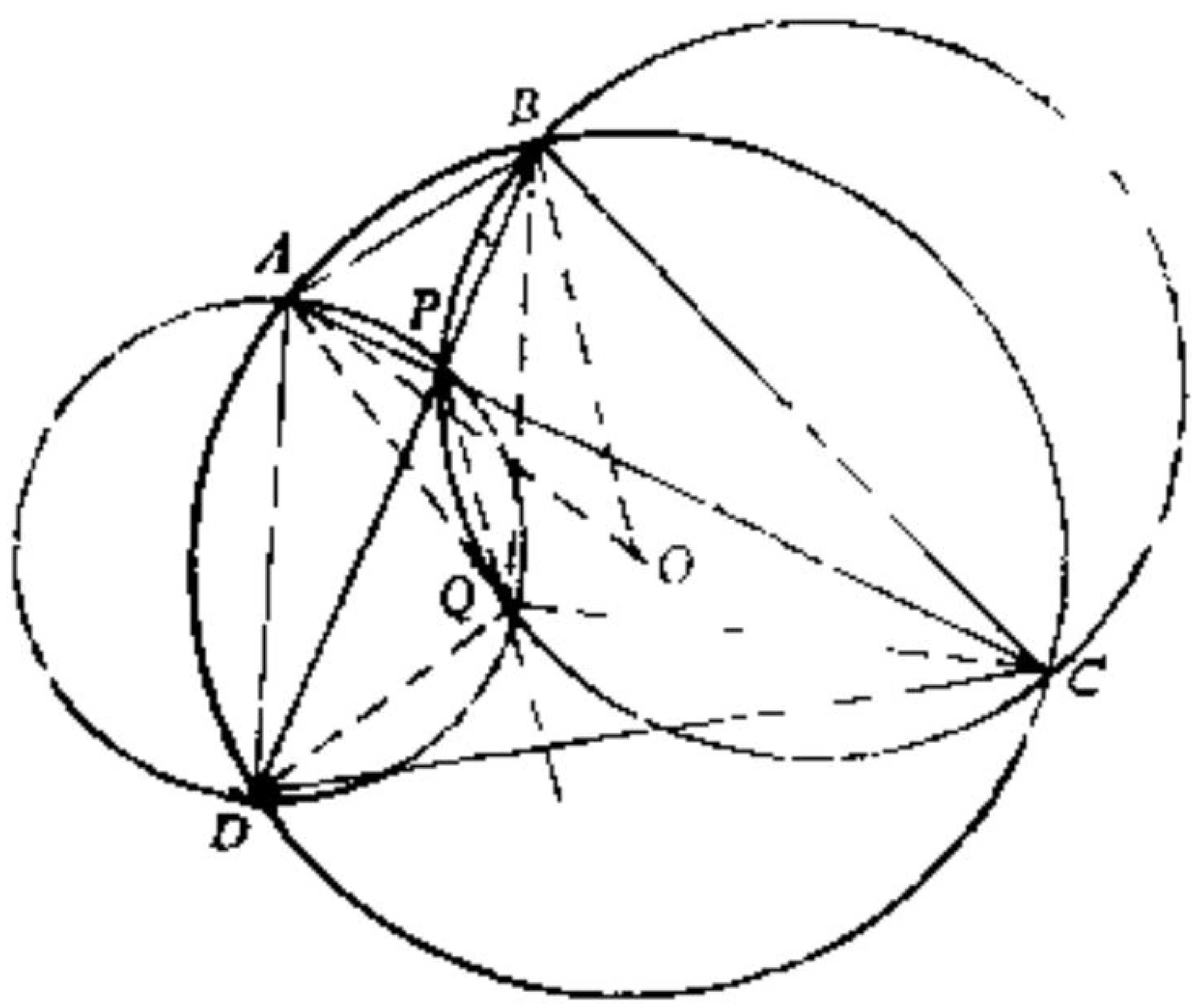


图17—7



17—8(1)

8．设四边形$ABCD$内接于$\odot O$，P是AC与BD的交点．求证：

(1) 四圆$\odot OAB$、$\odot PBC$、$\odot OCD$、$\odot PDA$共点，

(2) 四圆$\odot PAB$、$\odot OBC$、$\odot PCD$、$\odot ODA$共点。

提要：$\odot PAD$、$\odot PBC$的另一交点为Q，

则$\angle DQC=\angle PAD+\angle PBD=2\angle CAD=\angle DOC$，

$\therefore\ Q$在$\odot OCD$上．

9．设 P 与 P' 是四边形 $ABCD$ 的等角共轭点。

求证：(1) 四圆$\odot PAB$、$\odot P'BC$、$\odot PCD$、$\odot P'DA$ 会于一点 Q；

(2) 四圆$\odot P'AB$、$\odot PBC$、$\odot P'CD$、$\odot PDA$ 会于一点 Q'；

(3) Q 与 Q' 也是四边形 $ABCD$ 的等角共轭点。

提要：(1) 1°设 P' 在各边上的射影为 E、F、G、H，由例题46，E、F、G、H 四点共圆。

有$\angle P'BF+\angle P'CH+\angle P'DH+\angle P'AF=\angle P'GF+\angle P'GH+\angle P'EH+\angle P'EF=180°$．

$\therefore\quad \angle AP'B+\angle CP'D=180°$，

$\angle BP'C+\angle DP'A=180°$．

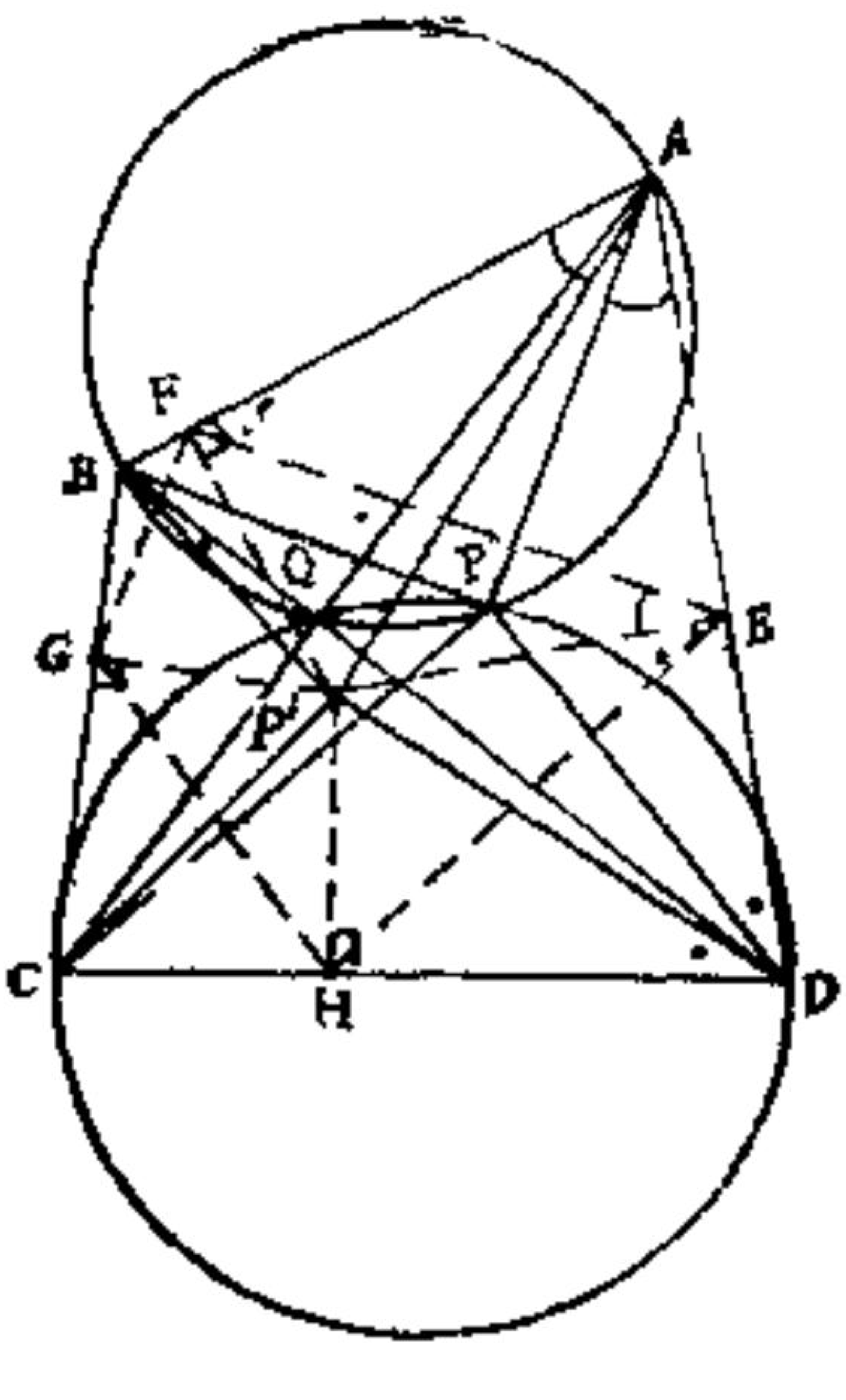


图17—9(1)

2°设$\odot PAB$与$\odot PCD$的另一交点为 Q，

则$\angle AQD=\angle PQA+\angle PQD=\angle PBA+\angle PCD=\angle P'BC+\angle PCB=180°-\angle BP'C=\angle AP'D$，

故$\odot P'DA$过 Q 点。

(2)：仿(1)。

(3)：$\because\quad \angle BQC+\angle DQA=\angle BP'C+\angle DP'A=180°$，不难证明，$Q$点在四边

形 $ABCD$ 上的射影共圆，由例题46推论2°，Q点的等角共轭点存在。同理，Q'点的等角共轭点也存在，令其为Q_0。

则$\angle DQ_0C=180°-\angle AQ_0B=\angle Q_0AB+\angle Q_0BA$

$=\angle Q'AD+\angle Q'BC=\angle DPC$.

$\therefore$ $\odot DPC$过Q_0.

又$\angle BQ_0A=180°-\angle CQ_0D=\angle Q_0CD+\angle Q_0DC$

$=\angle Q'CB+\angle Q'DA=\angle Q'PB+\angle Q'PA=\angle BPA$.

$\therefore$ $\odot BPA$过Q_0，而$\odot PAB$与$\odot PCD$除P点外只能再有一个交点Q，故Q_0与Q重合，$\therefore$ Q与Q'是四边形$ABCD$的等角共轭点。

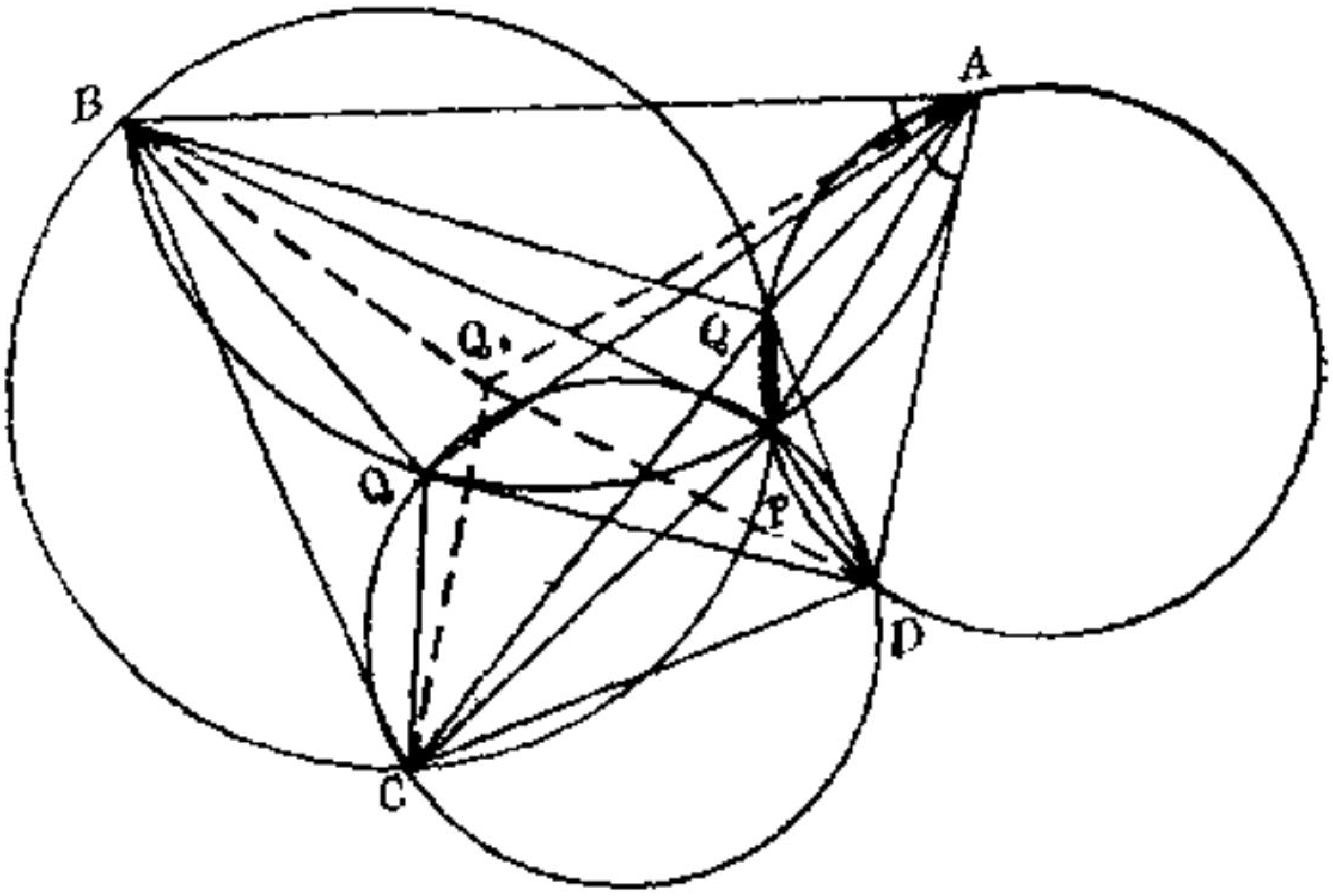


图 17—9(3)

10．有四圆共点，除此点外，每三圆尚有三个第二个交点，这三个交点决定一个圆，这样的圆有四个，它们也共点。

注：后四圆可能都是直线，这时它们并不共点。

证：四圆$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$共点于Q，其第二

之点分别为 P_{12}、P_{13}、P_{14}、P_{23}、P_{24}、P_{34}。

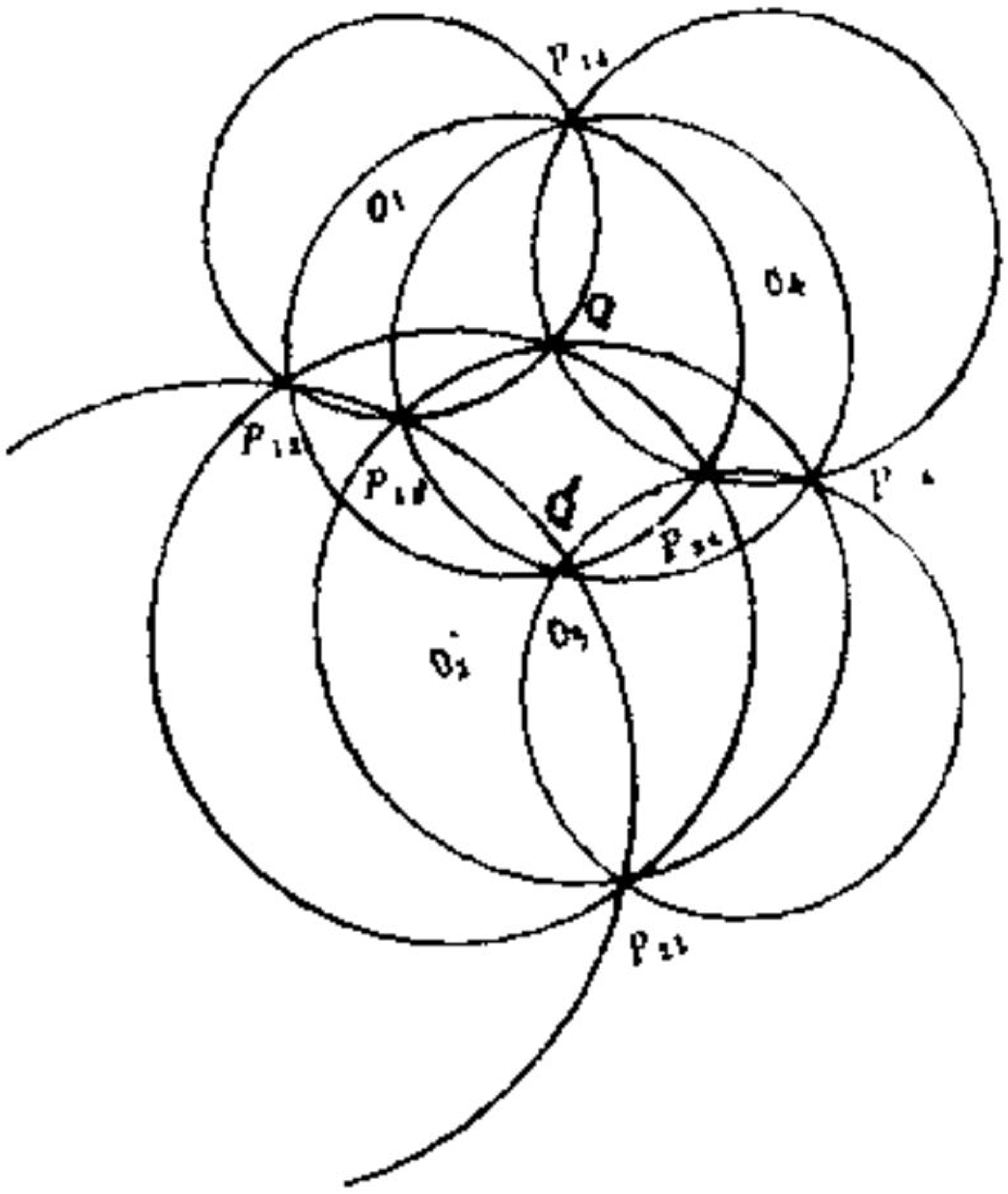


图17—10

由 P194例题50得：

∵ 三圆⊙$P_{14}P_{23}P_{13}$、⊙$P_{24}P_{12}P_{23}$、⊙$P_{34}P_{23}P_{13}$共点于 Q，

∴ 三圆⊙$P_{23}P_{24}P_{34}$、⊙$P_{13}P_{34}P_{14}$、⊙$P_{12}P_{14}P_{24}$共点于 Q'；

∵ 三圆⊙$P_{12}P_{14}P_{23}$、⊙$P_{13}P_{23}P_{34}$、⊙$P_{14}P_{34}P_{24}$共点于 Q，

∴ 三圆⊙$P_{34}P_{13}P_{14}$、⊙$P_{24}P_{14}P_{12}$、⊙$P_{23}P_{12}P_{13}$共点于 Q'.

11．四点两两连成四个三角形，另外一点对于这些三角形的四个垂足圆共点。

由一点向一三角形各边所在直线作垂线，通过三垂足的圆叫做该点对于三角形的垂足圆。

注：当给定的四点共圆而另外一点恰好在圆上时，则所谓四个垂足圆实际是四条直线（西摩松线），此时，它们并不共点。

提要：点 P 对三角形各边的垂足分别是 E、F、G、H、M、N 六点。

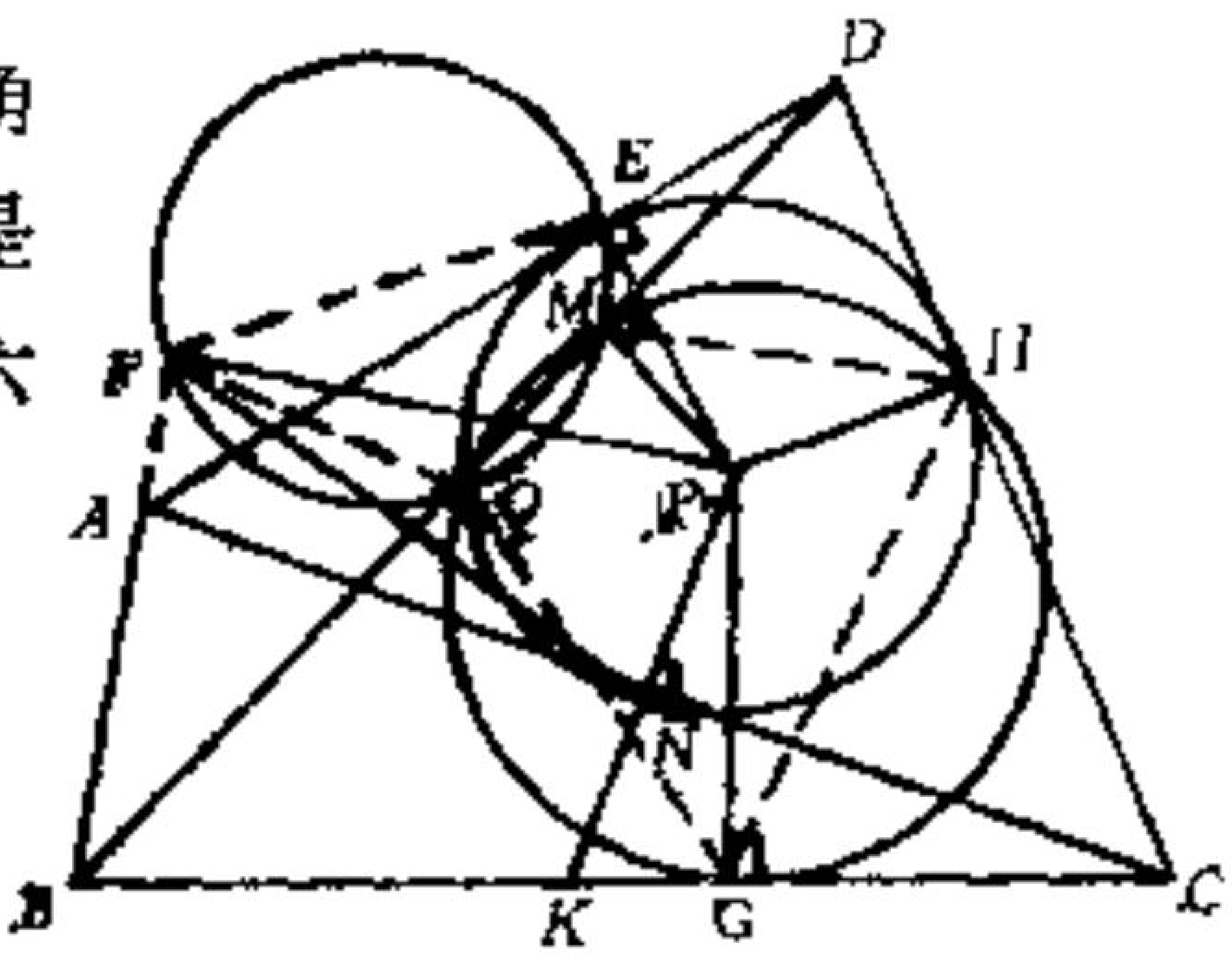


图17—11

设⊙MEF 与⊙MGH 相交于 Q．

∵ P、H、D、E、M，P、E、F、A、N，P、N、G、C、H 各五点共圆，其直径分别为 PD、PA、PC．

$$\begin{aligned}\therefore\quad \angle FQG=\angle FQB+\angle GQB&=\angle MEF+\angle MHG\\&=\angle PEF-\angle PEM+\angle PHM+\angle PHG\\&=\angle KNF+\angle KNG=\angle FNG.\end{aligned}$$

故 Q 点在⊙FNG 上。

12. 设 A'、B'、C' 各是$\triangle ABC$的顶点 A、B、C 在直线 l 上的射影，X、Y、Z 各是 l 上任一点P在 BC、CA、AB 上的射影.求证四圆$\odot XYZ$、$\odot XB'C'$、$\odot YC'A'$、$\odot ZA'B'$ 共点。

证：设$\odot ZA'B'$、$\odot YC'A'$ 相交于 Q.

$\because$ P、X、Z、B、B'，P、X、Y、C、C'，P、Y、Z、A、A' 各五点共圆，其直径分别为 PB、PC、PA.

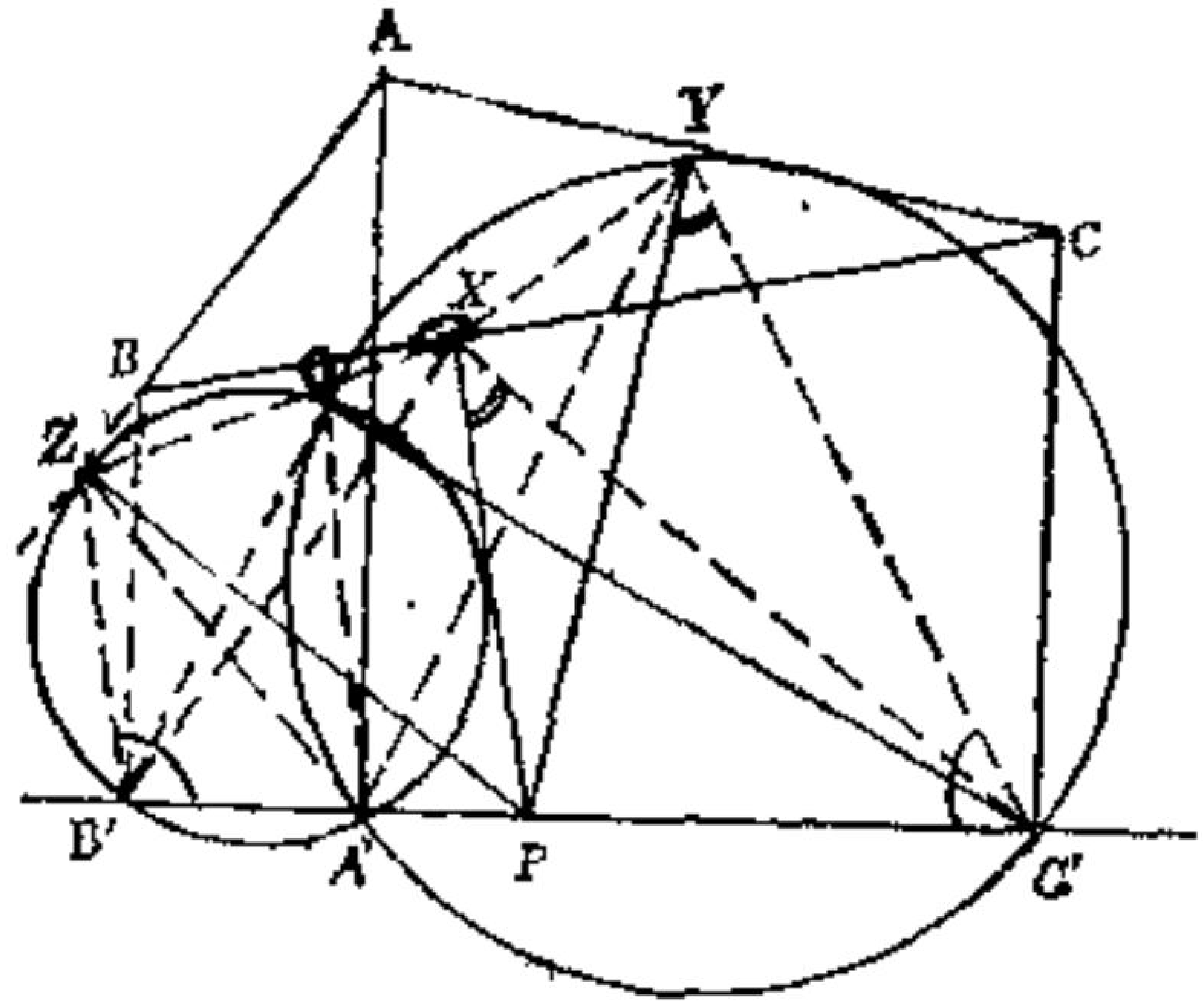


图17—12

$$\begin{aligned}\therefore \angle B'QC' &= \angle B'QA' + \angle A'QC' = \angle A'ZB' + \angle A'YC' \\ &= (\angle PZB' - \angle PZA') + (PYA' + \angle PYC') \\ &= (\angle PXB' - PAA') + (\angle PAA' + \angle PXC') \\ &= \angle PXB' + \angle PXC' = \angle B'XC',\end{aligned}$$

故$\odot XB'C'$过 Q.

13. 已知$\triangle ABC$及一点 P，自P引线垂直于 PA、PB、PC 而各交$\odot PBC$、$\odot PCA$、$\odot PAB$ 于 A'、B'、C'，求证：

(1) P、A'、B'、C' 四点共圆；

(2) 四圆$\odot ABC$、$\odot AB'C'$、$\odot BC'A'$、$\odot CA'B'$ 共点

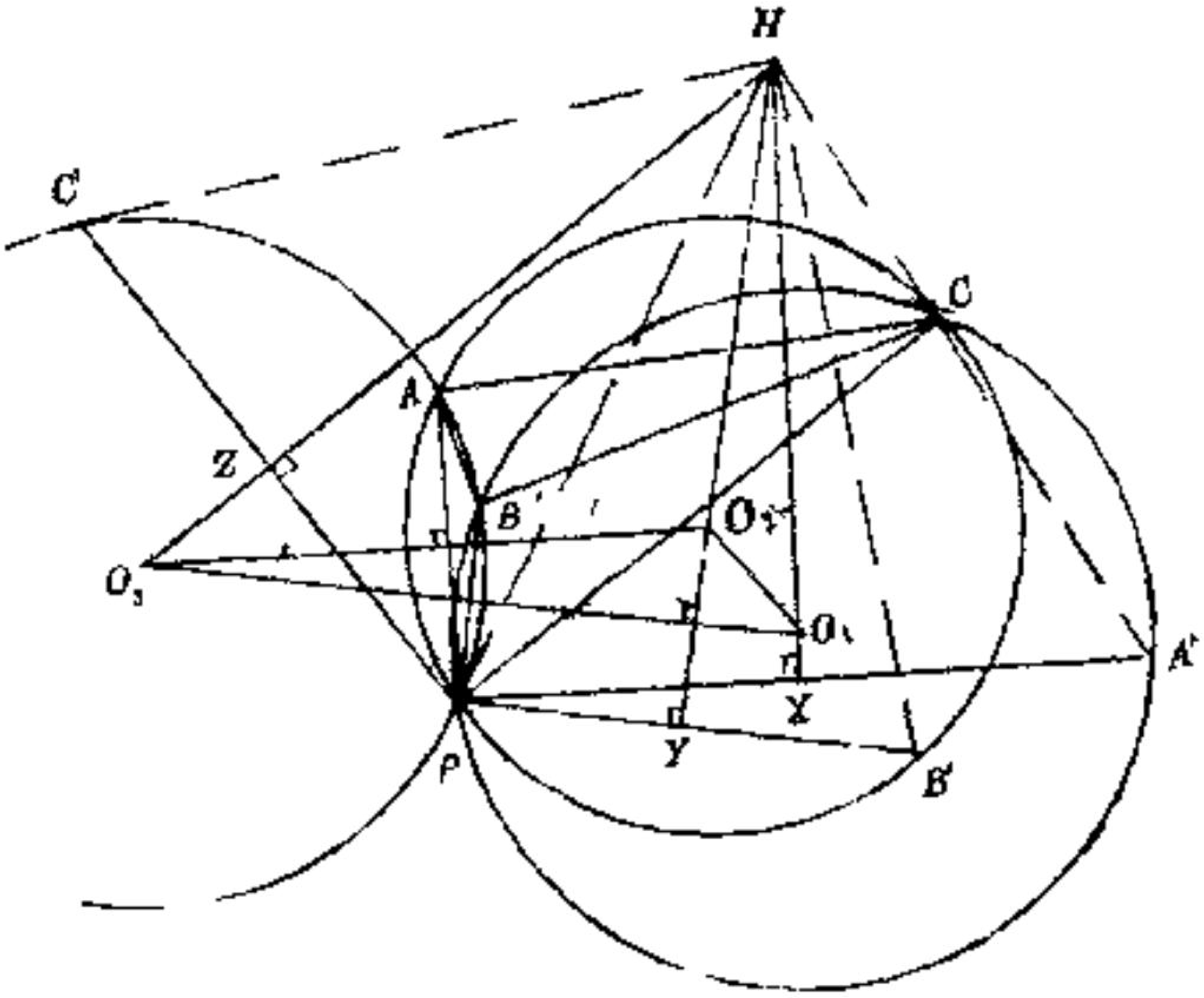


图 17—13

提要(1)：∵ $PA \perp O_2O_3$ 且 $PA \perp PA'$，

∴ PA' 的中垂线 $O_1H \perp O_2O_3$.

同理 PB' 的中垂线 $O_2H \perp O_3O_1$，

PC' 的中垂线 $O_3H \perp O_1O_2$.

故 H 是 $\triangle O_1O_2O_3$ 的垂心。

有 $HP = HA' = HB' = HC'$，∴ P、A'、B'、C' 四点共圆。

(2)：∵ 四圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot A'B'C'$ 共点于 P，其第二交点为 A、B、C、A'、B'、C'. 由题 10 知四圆 $\odot ABC$、$\odot AB'C'$、$\odot BC'A'$、$\odot CA'B'$ 共点。

14. P 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边或延长线上一点，若有 X、Y、Z 三点使得 $\triangle XBP$ 与 $\triangle YAC$、$\triangle XCP$ 与 $\triangle ZAB$ 各真正相似. 求证：

(1) 三圆 $\odot XBC$、$\odot YCA$、$\odot ZAB$ 共点；

(2) 四圆$\odot ABC$、$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$共点。

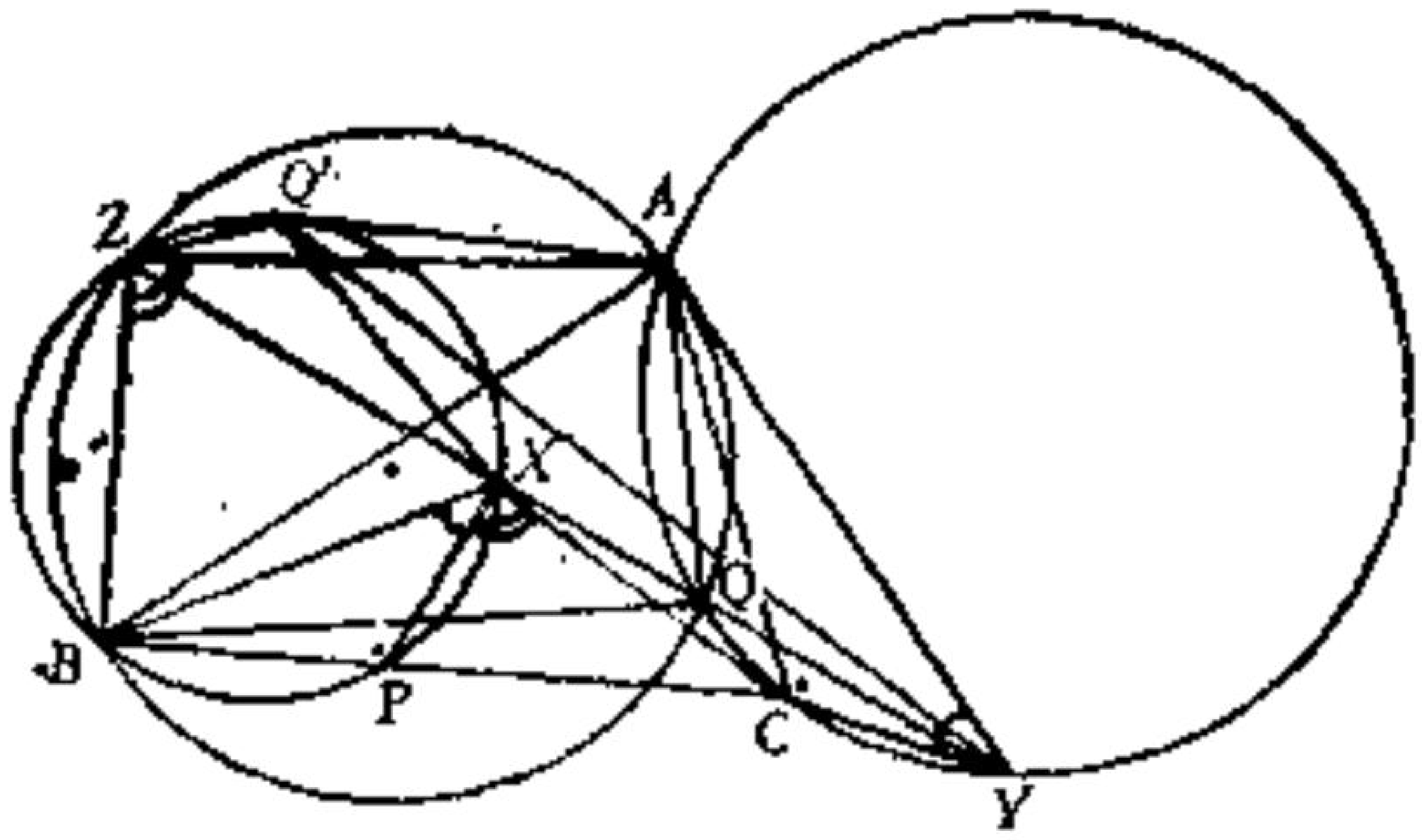


图17—14

提要(1)：设$\odot YCA$与$\odot ZAB$相交于Q；

则$\angle BQC=\angle AZB+\angle AYC=\angle PXC+\angle PXB=\angle BXC$.

(2)：设$\odot BZX$与$\odot CXY$相交于Q'，

则$\angle ZQ'Y=\angle ZQ'X+\angle XQ'Y=(180^\circ-\angle ZBX)+(180^\circ-\angle XCY)=360^\circ-(\angle ZBQ-\angle XBQ)-(\angle XCQ+\angle YCQ)=360^\circ-\angle ZBQ-\angle YCQ=\angle ZAQ+\angle YAQ=\angle ZAY$.

故$\odot AYZ$过Q'.

又由习题14第15题知 Z、X、Q、Y共线。

$\therefore\quad \angle AQ'C=\angle AQ'Y+\angle YQ'C=\angle AZY+\angle YXC$
$=\angle AZQ+\angle YXC=\angle ABQ+\angle QXC=\angle ABQ$
$+\angle QBC=\angle ABC$,

故$\odot ABC$过Q'.

15．P是$\triangle ABC$的BC边延长线上一点，若有X、Y、Z三点使得$\triangle XCP$与$\triangle YCA$、$\triangle XBP$与$\triangle ZBA$各真正相似，则

(1) 四圆$\odot ABC$、$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$共点；

(2) 四圆$\odot XYZ$、$\odot XBC$、$\odot YCA$、$\odot ZAB$共点。

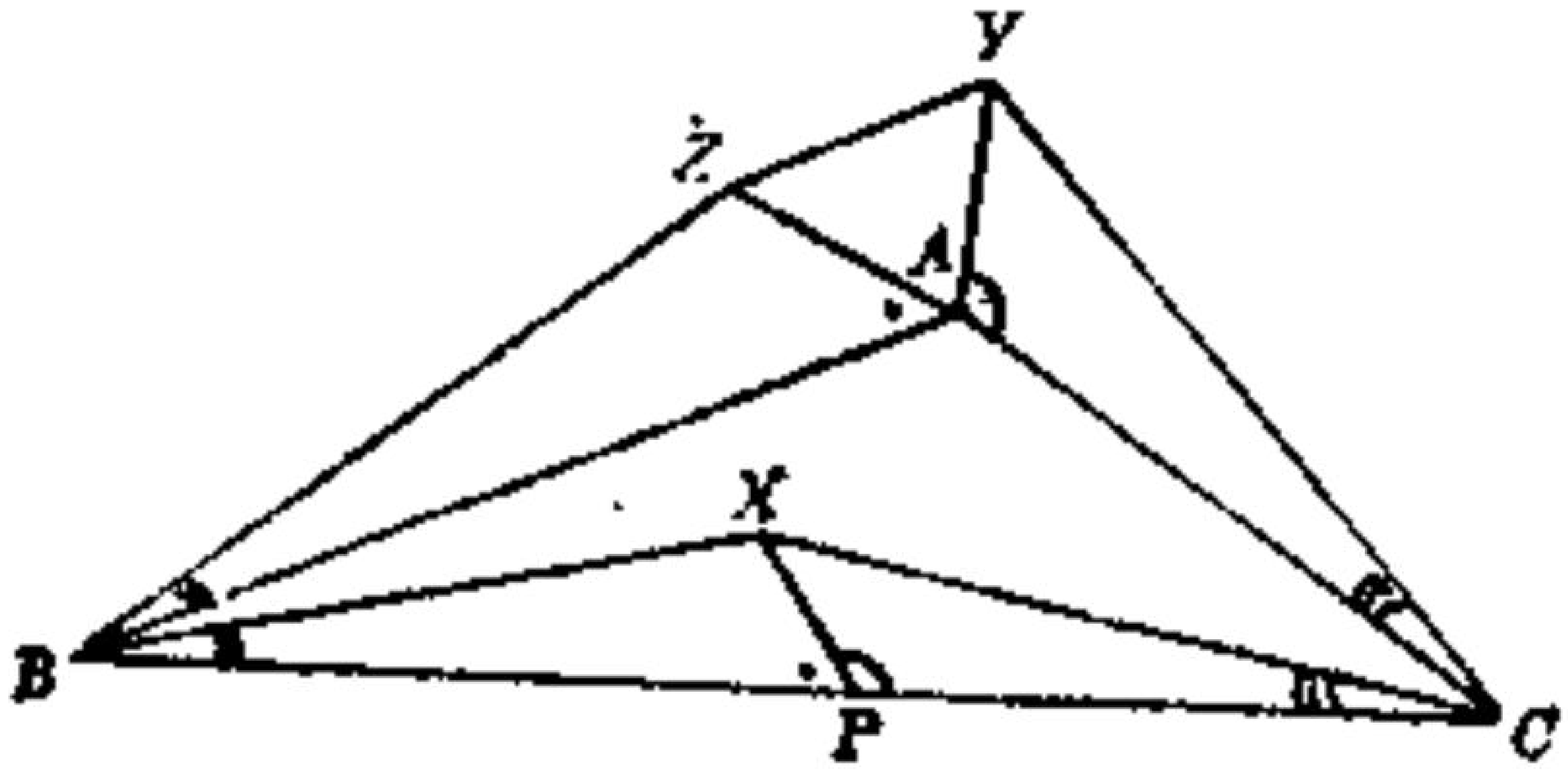


图 17—15(1)

证(1)：当 X 在 $\triangle ABC$ 之内时，在四边形 $BCYZ$ 中，$\angle ZAB+\angle YAC=\angle XPB+\angle XPC=180^\circ$.

由题 9 知，关于点 A 有等角共轭点.

$\because$ $\angle XBP=\angle ZBA$, $\angle XCP=\angle YCA$,

$\therefore$ 点 X 即点 A 的等角共轭点。

由题 9 之(1)，本题(1)成立；由题 9 之(2)，本题(2)成立。

(2)：当 X 在 $\triangle ABC$ 之外时，设 $\odot YCA$、$\odot ZAB$ 的另一交点为 Q，则 $\angle BQC=\angle BQA+\angle AQC=\angle BZA+\angle AYC=\angle BXP+\angle PXC=\angle BXC$

故 $\odot XBC$ 过 Q.

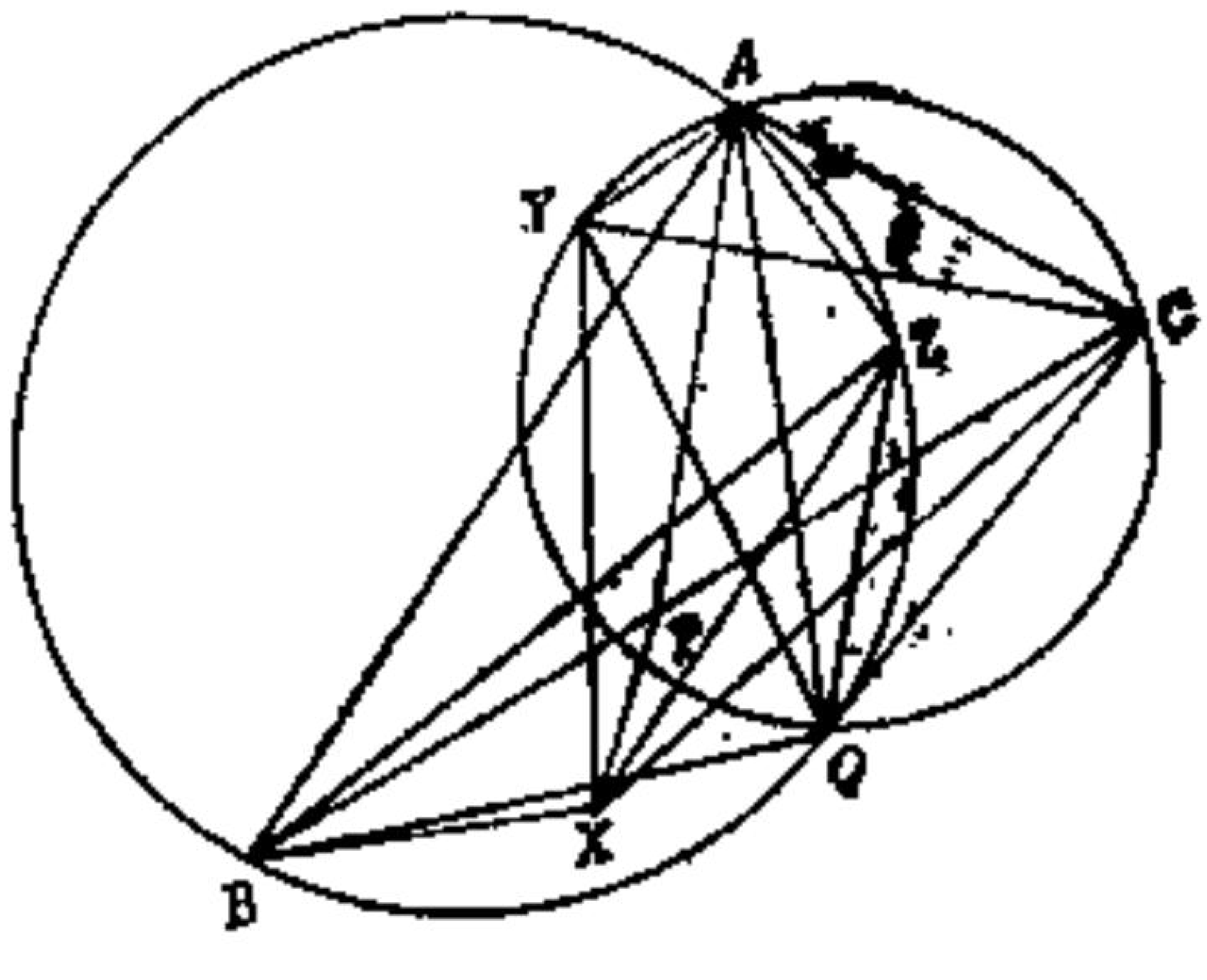


图 17—15(2)

联 YX、AP，易证 $\triangle YXC\backsim\triangle APC$，$\longrightarrow\angle YXC=\angle APC$.

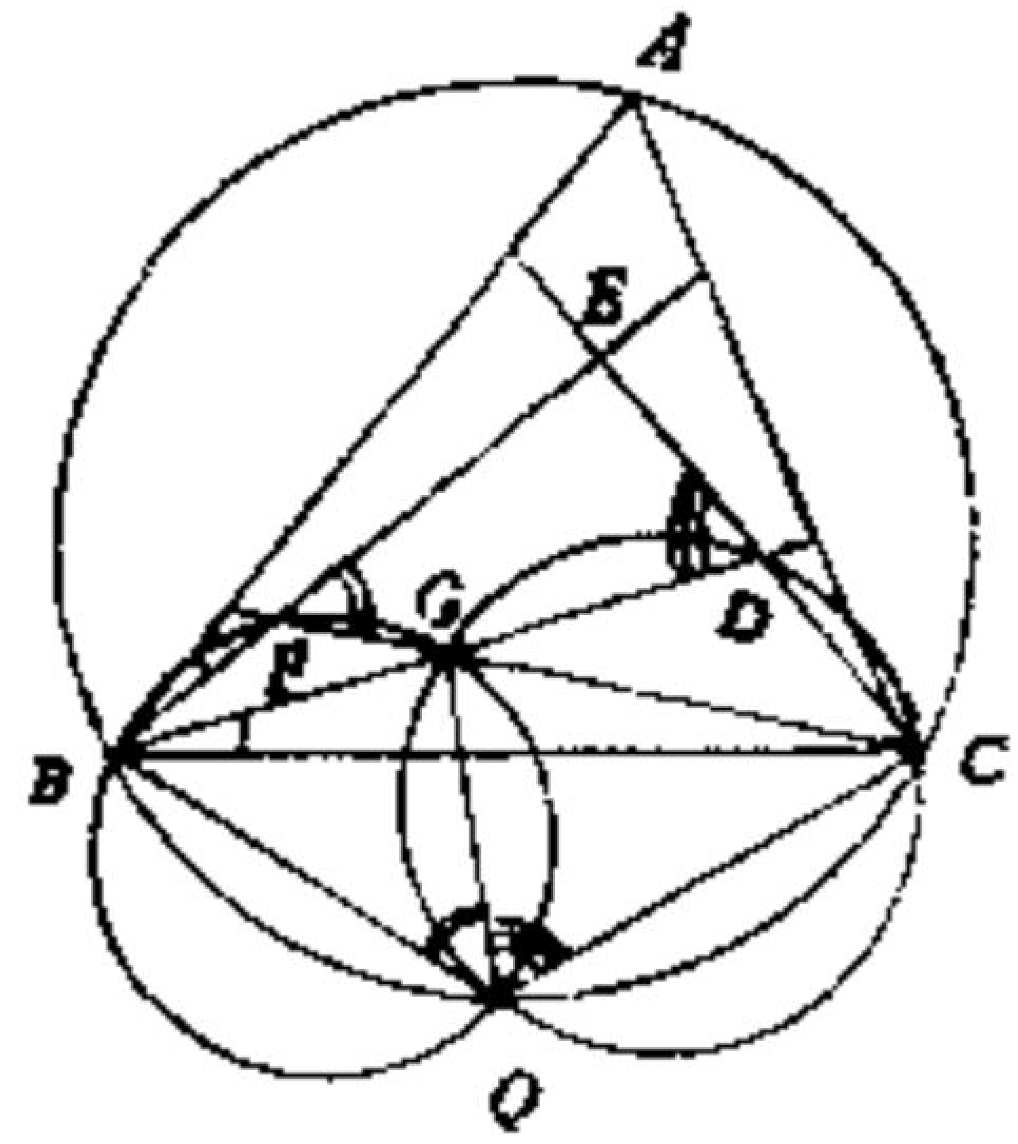
同理 $\angle ZXB=\angle APB$.

于是$\angle ZXY=\angle BXZ+\angle CXY-\angle BXC=\angle APB+\angle APC-\angle BXC=180^\circ-\angle BXC=\angle XBP+\angle XCP=\angle ZBA+\angle YCA=\angle ZQA+\angle YQA=\angle ZQY$.

∴　四圆$\odot XYZ$、$\odot XBC$、$\odot YCA$、$\odot ZAB$共点。由第10题知，$\odot ABC$、$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$也共点。

16. 自一三角形的两顶点各任作一双等角线，求证这四线构成的完全四边形的密克点落在三角形的外接圆上.

提要：设自B、C所作两双等角线的交点为D、E、F、G，令$\odot BFG$、$\odot CDG$的另一交点为Q，则Q为完全四边形的密克点.



∵ $\angle BQC=\angle BQG+\angle CQG$

$=\angle EFG+\angle EDB$

$=(\angle FBC+\angle FCB)+(\angle DCB+\angle DBC)$　图17—16

$=\angle EBC+\angle ECA+\angle ECB+\angle EBA$

$=\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A$

故Q在$\odot ABC$上.

17. 设一点P关于$\triangle ABC$三边BC、CA、AB的对称点为X、Y、Z. 则

(1) 四圆$\odot XYZ$、$\odot XBC$、$\odot YCA$、$\odot ZAB$会于一点Q;

(2) 四圆$\odot ABC$、$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$共点;

(3) PQ的中点在$\triangle ABC$的九点圆上.

提要(1)：P、D、C、E，P、E、A、F，P、F、B、D均四点共圆.

设$\odot YCA$与$\odot ZAB$相交于Q，则

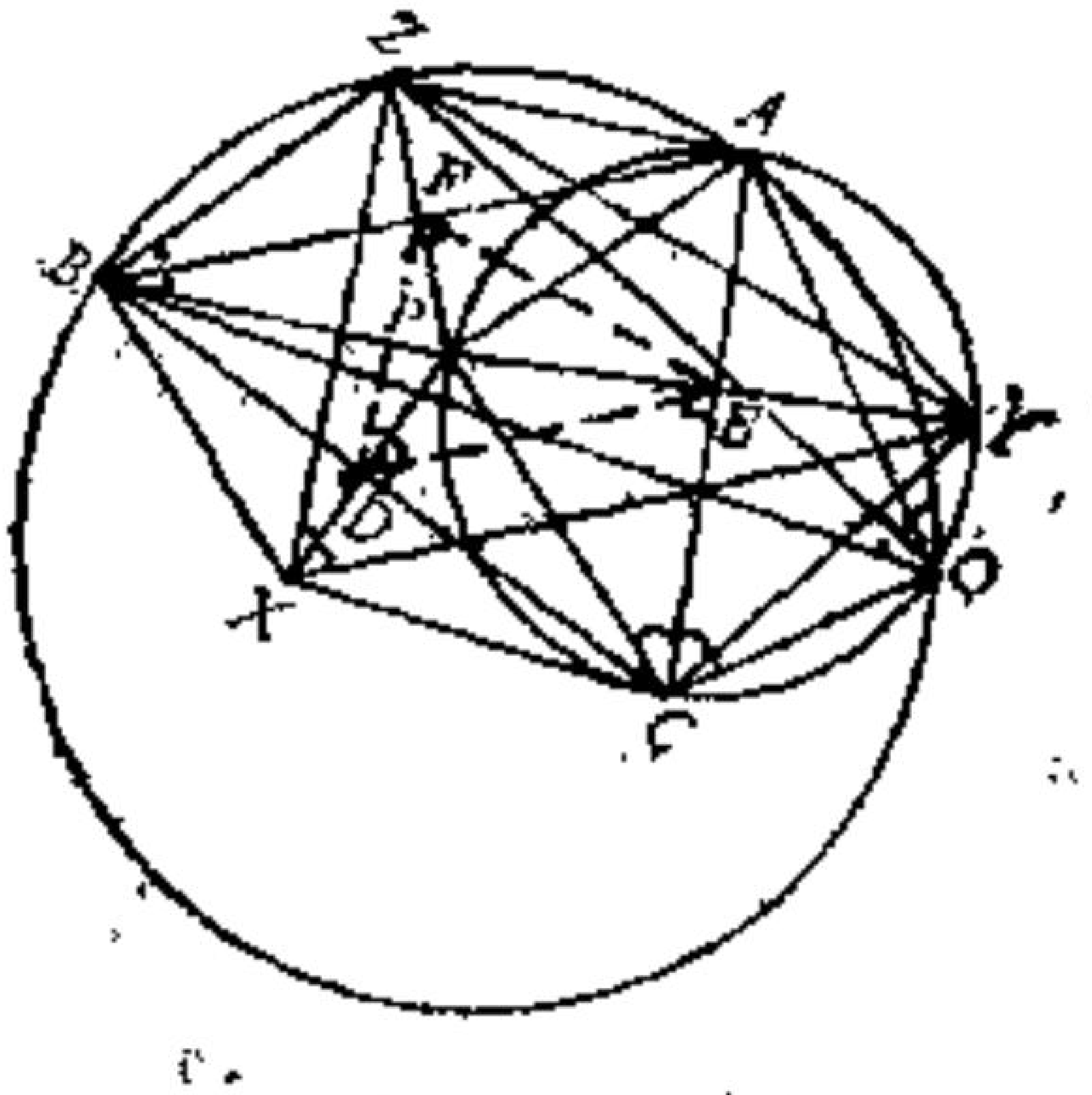


图17—17(1)

$\angle ZQY=\angle ZQA+\angle AQY$

$=\angle ZBA+\angle ACY$

$=\angle PBF+\angle PCE$

$=\angle PDF+\angle PDE$

$=\angle PXZ+\angle PX\ =\angle ZXY$

故$\odot XYZ$过Q点.

$\because\ \angle BQC=\angle CQA-\angle BQA$

$=\angle CPA-(180^\circ-\angle BPA)=360^\circ-\angle BPC-180^\circ$

$=180^\circ-\angle BXC$，故$\odot XBC$过Q点.

(2)由题10知，(1)的四圆共点于Q，且每三圆尚有三个第二交点，而这三个交点所决定的四圆即本题所述的四圆，故它们也共点.

例如由三圆$\odot XBC$、$\odot YCA$、$\odot ZAB$的第二交点得$\odot ABC$;

由三圆$\odot XYZ$、$\odot XBC$、$\odot YCA$，$\odot XYZ$、$\odot YCA$、$\odot ZAB$，$\odot XYZ$、$\odot ZAB$、$\odot XBC$的第二交点分别得出$\odot CXY$、$\odot AYZ$、$\odot BZX$.

(3)：取PA、PB、PC、PQ的中点为A'、B'、C'、Q'，令BC、CA、AB的中点为M、N、L，则P点关于$\triangle A'B'C'$的对称点为D、E、F. 于是由(1)得四圆$\odot DEF$、$\odot DB'C'$、$\odot EC'A'$、$\odot FA'B'$会于一点，由于有关各图均以P为顶点且有

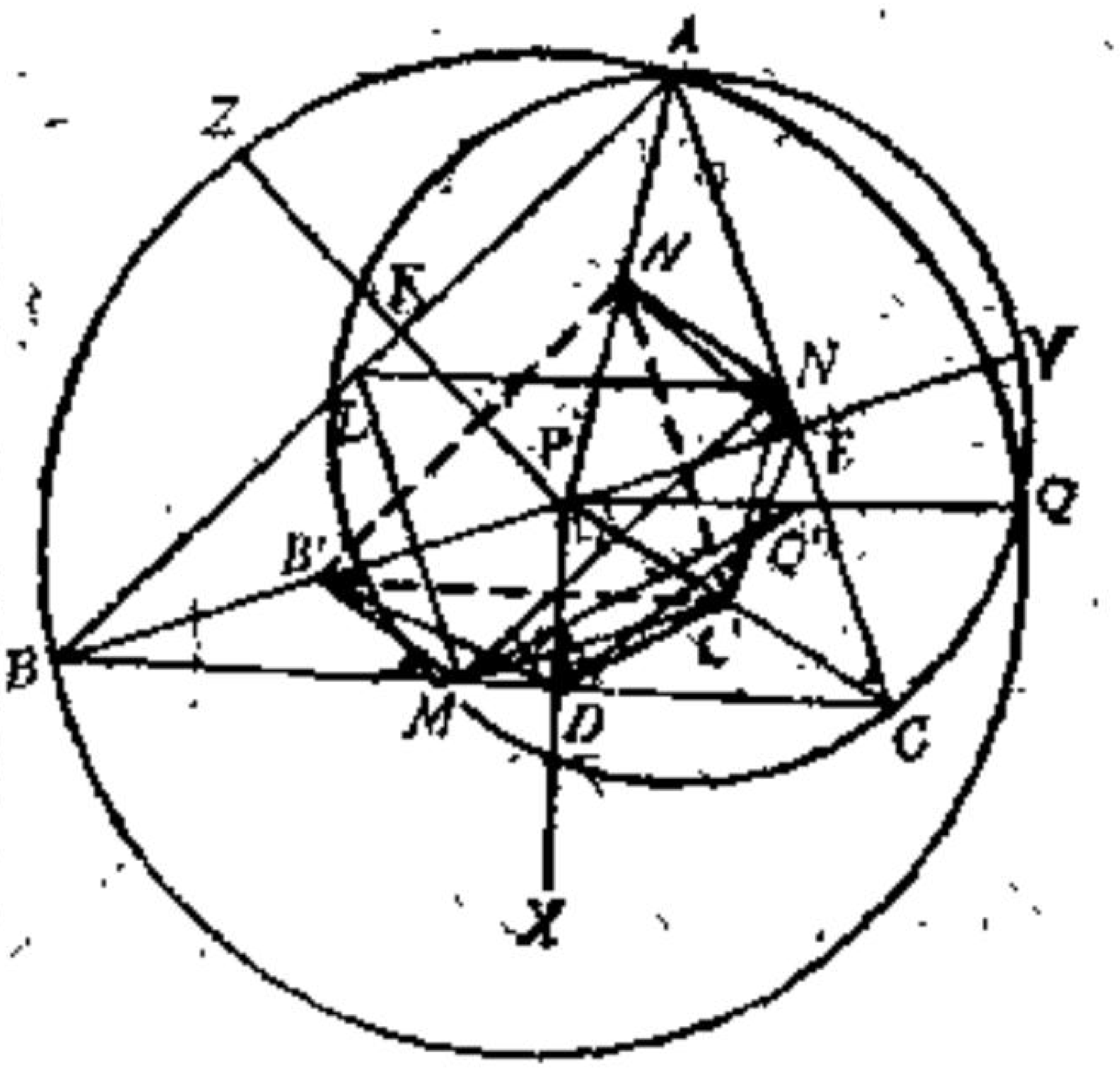


图17—17(3)

相似比 1/2，故所会的一点即 PQ 的中点 Q'．

又 $B'M=PC'=C'D$．故 B'、C'、D、M 共圆．

∴ B'、M、D、C'、Q' 五点共圆．

又 $\angle MQ'C'=180°-\angle MDC'=180°-(180°-\angle C'DC)$
$=\angle C'CD$．

同理，C'、Q'、E、N、A' 五点共圆．且 $LMCN$ 为平行四边形，

于是 $\angle NQ'C'=\angle NEC'=180°-\angle C'EC$
$=180°-\angle C'CE$，

∴ $\angle MQ'N=\angle NQ'C'-\angle MQ'C'$
$=180°-\angle C'CE-\angle C'CD=180°-\angle DCE$
$=180°-\angle MCN=180°-\angle MLN$

故⊙LMN 过 Q'，即 Q' 在 $\triangle ABC$ 的九点圆上．

18．在 $\triangle ABC$ 中，X 与 X'、Y 与 Y'、Z 与 Z' 各是直线 BC、CA、AB 上的点，若 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle X'Y'Z'$ 真正相似，则 X、Y、Z 及 X'、Y'、Z' 对于 $\triangle ABC$ 的密克点合而为一．

提要：设⊙AYZ、⊙$AY'Z'$ 的另一交点为 P，证明 P 同时是 X、Y、Z 及 X'、Y'、Z' 对于 $\triangle ABC$ 的密克点．

联 AP，易知

$\angle PZY=\angle PAY$
$=\angle PZ'Y'$

又 $\angle ZPY$、$\angle Z'PY'$ 都与 $\angle A$ 互补，因而相等．根据定理114得

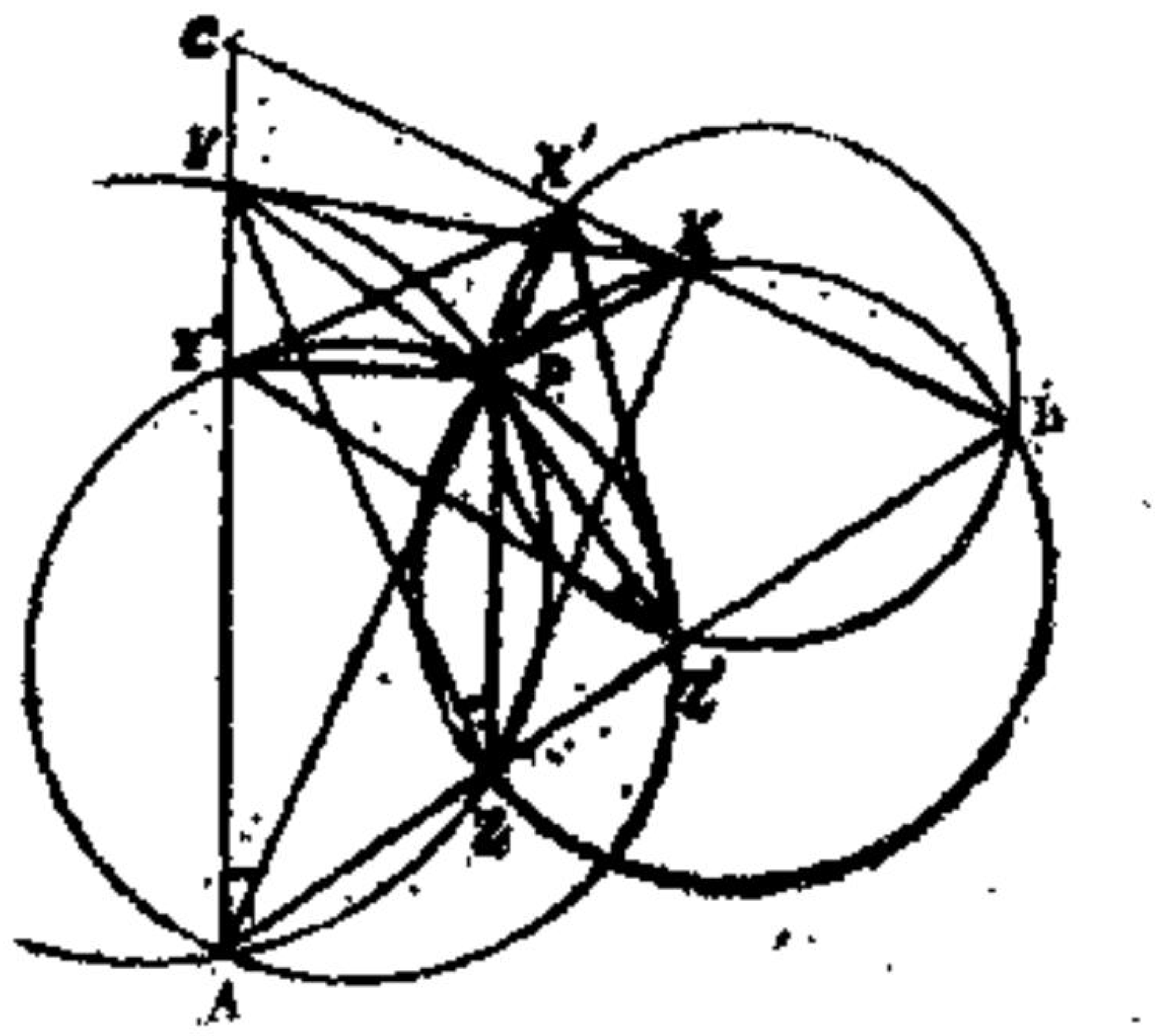


图 17—18

$\triangle PYZ \backsim \triangle PY'Z'$.

由$\triangle XYZ \backsim \triangle X'Y'Z'$，可得

$\triangle PYX \backsim \triangle PY'X'$，$\triangle PZX \backsim \triangle PZ'X'$，

易证$\triangle PZZ' \backsim \triangle PXX' \backsim \triangle PYY'$，

因而$\angle PZB = \angle PXC$.

于是$\odot BZX$过P，同理$\odot BZ'X'$过P.

19．在一完全四角形中，依次除掉一双对边，然后通过余四边所成完全四边形的密克点及所除两边之一的两端点作圆，如此共得六圆，试证它们共点。

四点两两相连共得六条直线，这个图形叫做完全四角形．它有四顶点和六边，不共顶点的两边称为对边，其交点称为对角点，凡三点，连对角点所成的三角形，称为对角三角形。

提要：设AC、BD交于O，P、Q、R分别为完全四边形$ABCDEF$、$ECOBDA$、$FDOCAB$的密克点，就得四圆$\odot BCE$、$\odot ADE$、$\odot CDF$、$\odot ABF$共点于P；四圆$\odot COD$、$\odot EBD$、$\odot BOA$、$\odot ECA$共点

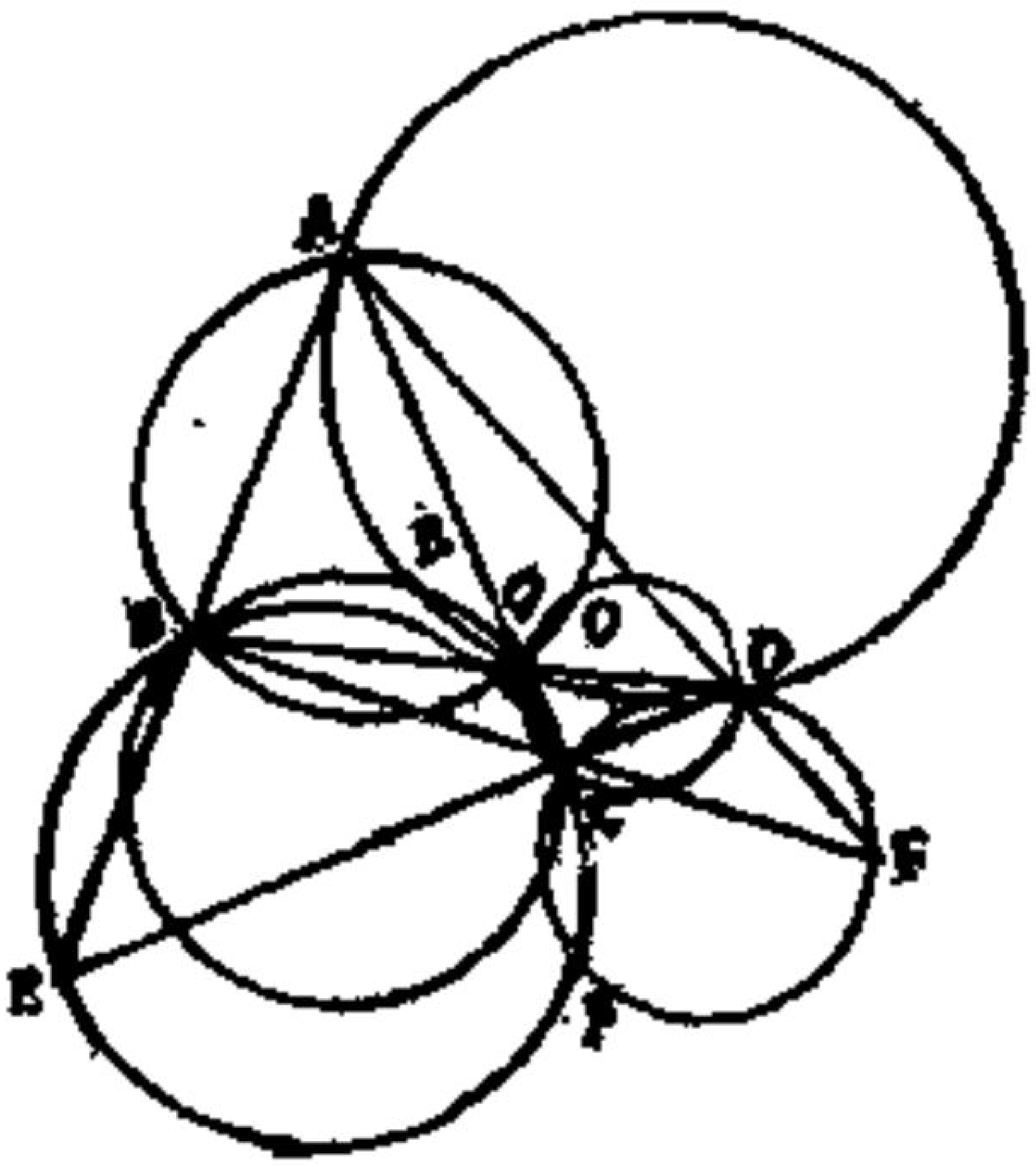


图 17—19

于Q，四圆$\odot ODA$、$\odot CFA$、$\odot OCB$、$\odot DFB$共点于R.
因之，得四圆$\odot QCD$、$\odot QAB$、$\odot RDA$、$\odot RBC$共点于O，四圆$\odot PBC$、$\odot PAD$、$\odot QBD$、$\odot QCA$共点于E．由第10

可知，四圆⊙RAB、⊙RCD、⊙QBC、⊙QAD 共点；四圆⊙QAD、⊙QBC、⊙PAC、⊙PBD共点。

20．在一完全四角形中，求证下列八圆共点：（1）通过共顶点三边的中点所作的圆，凡四圆；（2）通过任双对边的中点及在这两边上的对角点所作的圆，凡三圆；

（3）通过每双对边的中垂线的交点所作的圆．

提要（1）：设⊙SMR、⊙HMG的第二交点为Q，则

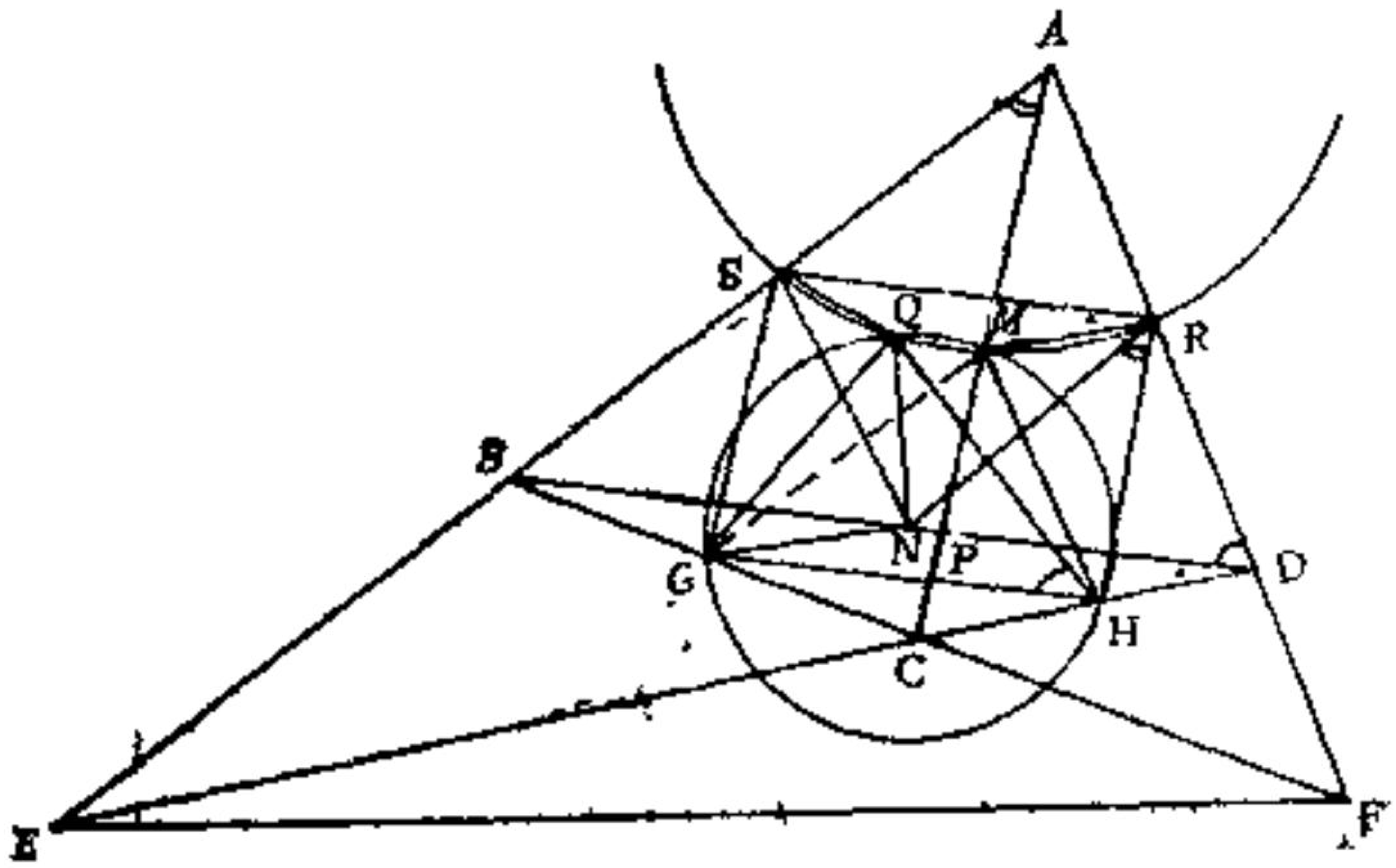


图17—20

$\angle SQG=\angle SRM+\angle GHM=\angle BNG+\angle BNS-\angle SNG$,

$\therefore$ ⊙SNG过Q．同理⊙RNH过Q．

（2）：$\angle SQH=\angle SQG+\angle GQH=\angle SNG+\angle GMH$

$=\angle ADE+\angle EAD=180^\circ-\angle AED$

$=180^\circ-\angle SEH$

$\therefore$ ⊙SEH过Q．

同理，⊙FRG、⊙PMN过Q．

（3）：1°令X、Y、Z为AB与CD、BC与DA、AC与BD的中垂线的交点，则⊙$ESHX$与⊙$FRGY$均过Q点．

$$
\begin{aligned}
\angle XQY &= \angle XQN + \angle YQN \\
&= (\angle HQN - \angle HQX) + (\angle GQN - \angle GQY) \\
&= \angle HRN + \angle GSN - (\angle HSX + \angle GRY) \\
&= \angle CAB + \angle CAD - \angle HSX - \angle GRY \\
&= \angle EAF - \angle HSX - \angle GRY .
\end{aligned}
$$

2°由P151例题30知，在折四边形 $ABCD$ 中，X、Z 是两双对边 AB 与 CD、AC 与 BD 的中垂线的交点，而 G、R 是两对角线 BC、AD 的中点，故有 $XZ \perp GR$.

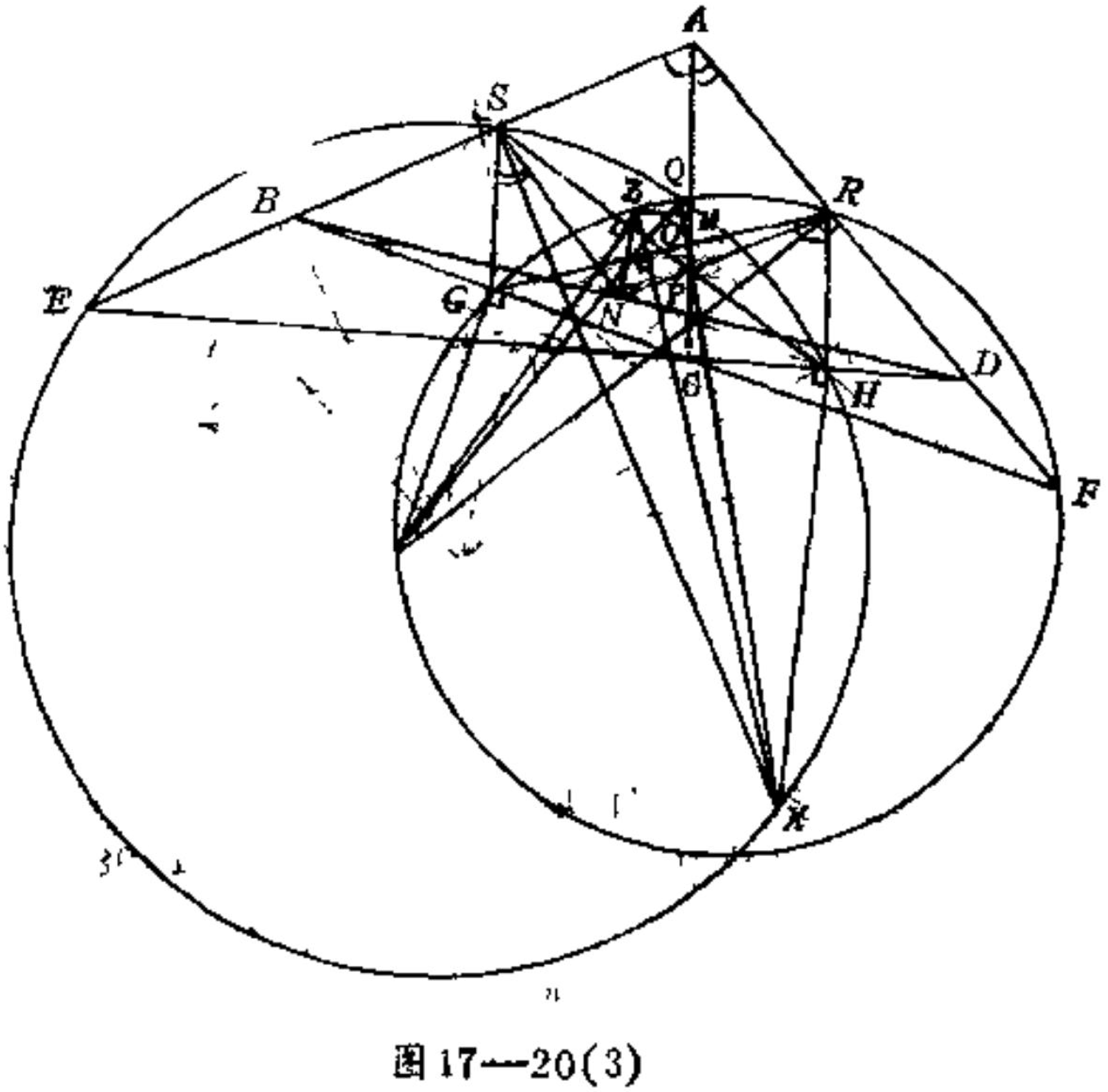


图17—20(3)

同理，在折四边形 $ACBD$ 中有 $YZ \perp SH$，于是 XZ 与 YZ 的交角等于 GR 与 SH 的交角，令 GR 与 SH 的交点为 O，则

有 $\angle XZY=\angle GOS=180^\circ-\angle SOR$

$$=180^\circ-(360^\circ-\angle ORA-\angle RAS-\angle ASO)$$

$$=180^\circ-[360^\circ-(90^\circ-\angle YRO)-\angle EAF-(90^\circ-\angle XSO)]=\angle EAF-\angle HSX-\angle GRY$$

∴ $\angle XQY=\angle XZY$，即$\odot XYZ$过 Q.

21．在习题十四第12题中，求证所得直线与原四边形（所在直线）共五线交成的十个三角形，它们的外接圆共点．

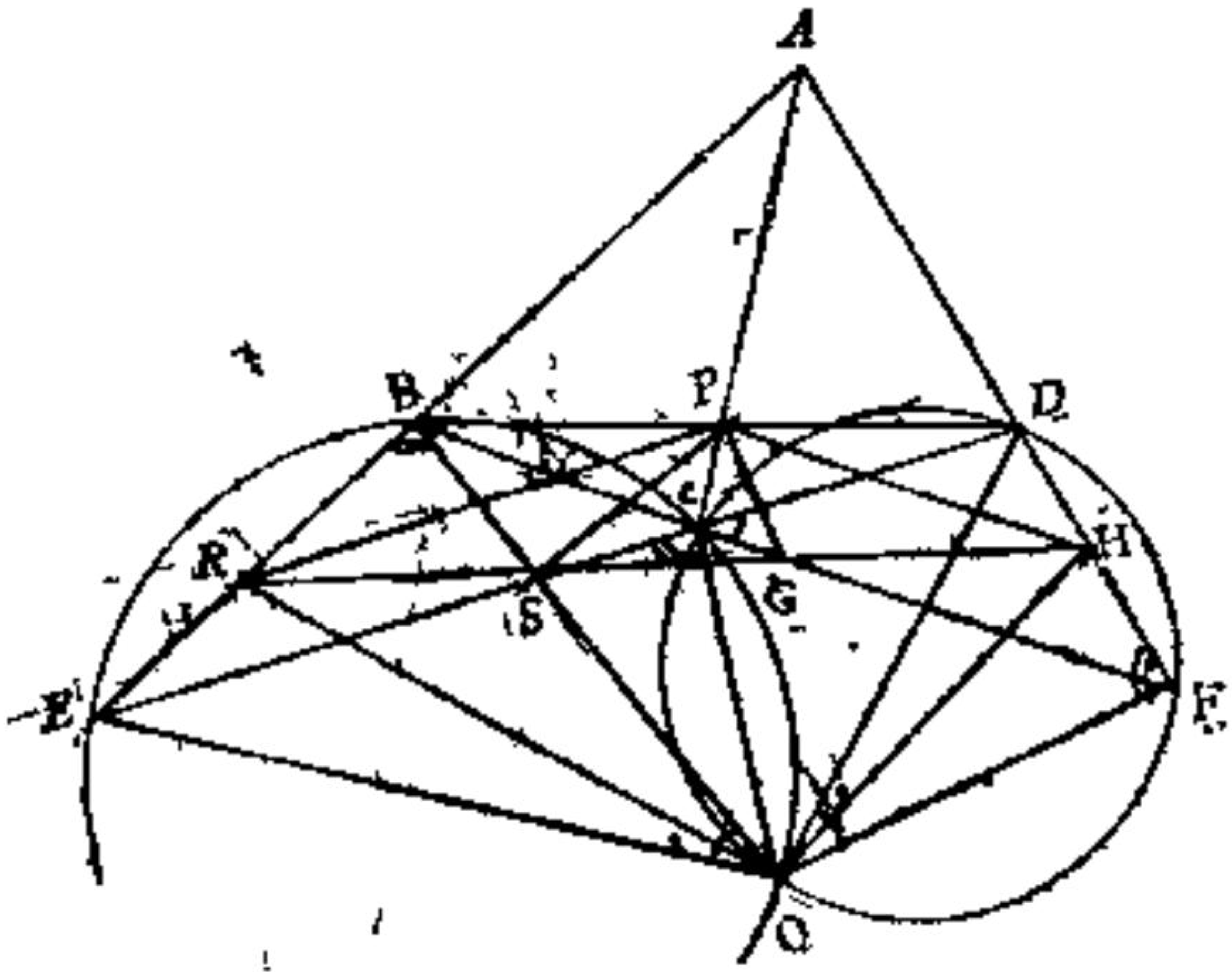


图 17—21

提要：在五条直线中任取其中的四条直线可以构成一个完全四边形，故可共组成五个完全四边形，由 P198 的例题52知，四条直线交成的四个三角形它们的外接圆共点于该完全四边形的密克点．故需证明这五个完全四边形有共同的密克点 Q，由于所交成的十个三角形在完全四边形中的重复出现，以下四个完全四边形即包括了十个有关三角形．

①$ABCDEE$包括$\triangle ABF$、$\triangle ADE$、$\triangle BCE$、$\triangle CDF$；

②$ABGHRF$包括$\triangle ABF$、$\triangle AHR$、$\triangle BGR$、$\triangle HGF$；
③$ADSREH$包括$\triangle ADE$、$\triangle AHR$、$\triangle ESR$、$\triangle HSD$；
④$BRSCEG$包括$\triangle BCE$、$\triangle ESR$、$\triangle BGR$、$\triangle CSG$.

若Q是完全四边形$ABCDEF$的密克点，事实上我们只要证明$\triangle AHR$过Q点即可推得Q是所有这些完全四边形的密克点.

$\because \dfrac{BR}{RE}=\dfrac{BP}{PD}=\dfrac{FH}{HD}$，且$\triangle EBQ \backsim \triangle DFQ$

$\therefore \triangle BQR \backsim \triangle FQH$，$\triangle RQE \backsim \triangle HQD$.

于是$\angle RQH=\angle EQD=180^\circ-\angle EAD=180^\circ-\angle RAH$

$\therefore$ $\odot AHR$过Q

22．设六边形$AB'CA'BC'$内接于$\odot O$，BC'与$B'C$、CA'与$C'A$、AB'与$A'B$各交于X、Y、Z，则

（1）三圆$\odot XBC$、$\odot YCA$、$\odot ZAB$会于一点P，三圆$\odot XB'C'$、$\odot YC'A'$、$\odot ZA'B'$会于一点P'.

（2）P、P'、X、Y、Z五点共线；

（3）$OP=OP'$；

（4）三圆$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$会于$\odot O$上一点Q；三圆$\odot A'YZ$、$\odot B'ZX$、$\odot C'XY$也会于$\odot O$上一点Q'，

（5）Q对于$\triangle AB'C'$、$\triangle BC'A'$、$\triangle CA'B'$的西摩松线共点；Q'对于$\triangle A'BC$、$\triangle B'CA$、$\triangle C'AB$的西摩松线也共点.

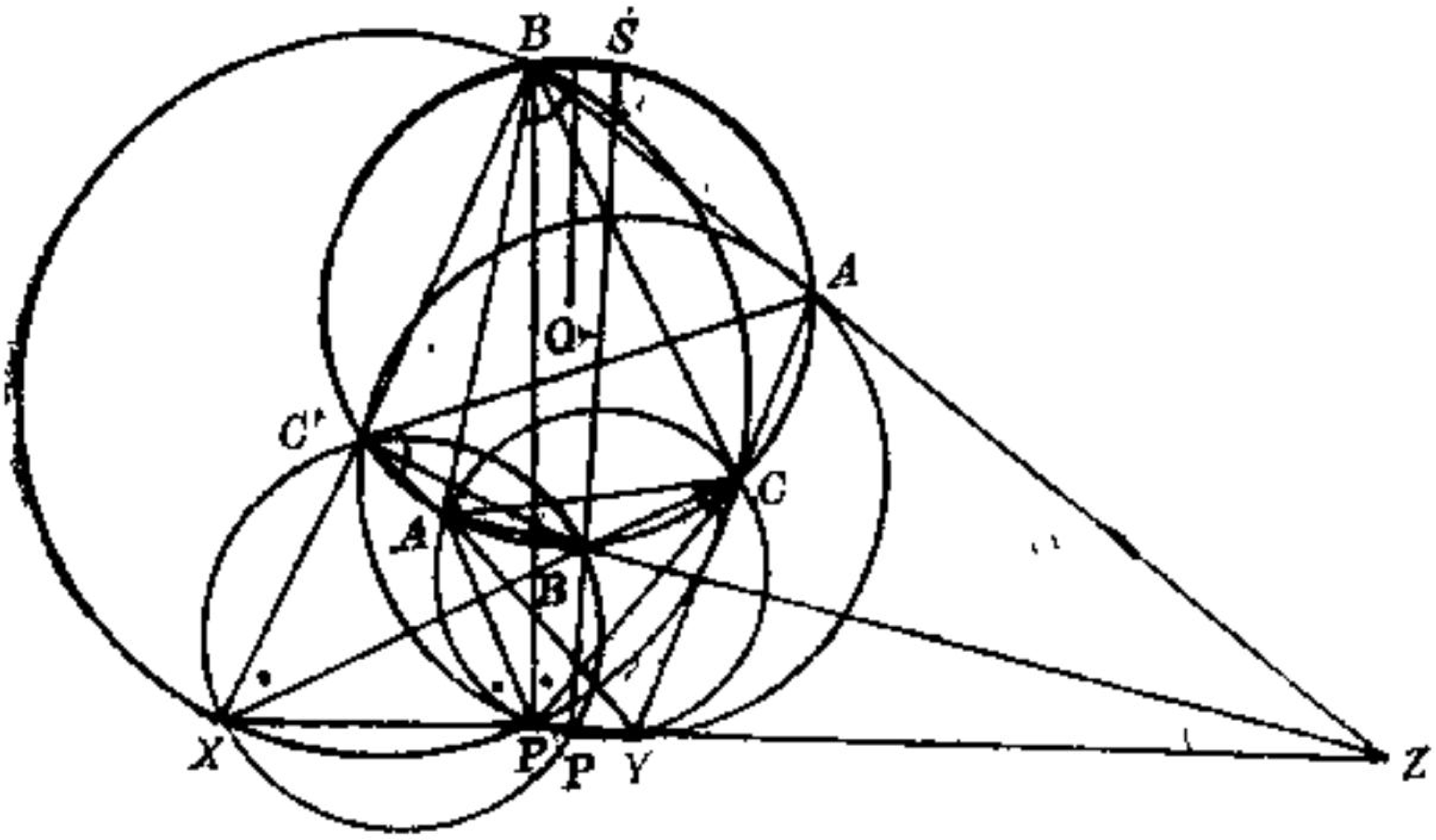


图 17—22(1)—(3)

提要(1)：设⊙XBC与⊙YCA相交于P，则

$\angle APB=\angle APC-\angle BPC=\angle AYC-\angle BXC$

$=(180^\circ-\angle YAC-\angle YCA)-(180^\circ-\angle XBC-\angle XCB)$

$=\angle B'CB-\angle A'BA$

又 $\angle AZB=180^\circ-\angle ZAB-\angle ZBA$

$=180^\circ-\angle B'AB-\angle A'BA=\angle B'CB-\angle A'BA$

∴ $\angle APB=\angle AZB$，故⊙ZAB过P.

(2)：由习题十四第18题，X、Y、Z共线.

∵ $\angle BPX=\angle BCX=\angle BCB'$，

$\angle BPZ=\angle BAZ=\angle BAB'$，

∴ $\angle BPX+\angle BPZ=\angle BCB'+\angle BAB'=180^\circ$.

即P在XYZ上.

(3)：令$P'B'$交⊙O于S，

由$\angle BPX=\angle BCB'=\angle BSB'$，有$P$、$P'$、$S$、$B$四点共圆.

∵ $\angle SP'Z=\angle XC'B'=\angle BSB'=\angle BPX$，

∴ $\angle BTP' = \angle SP'T$，故 $BS \parallel TP'$.

于是 BS 的中垂线与 TP' 的中垂线重合。而 BS 在⊙O 上，故其中垂线过 O 点，∴ $OP = OP'$.

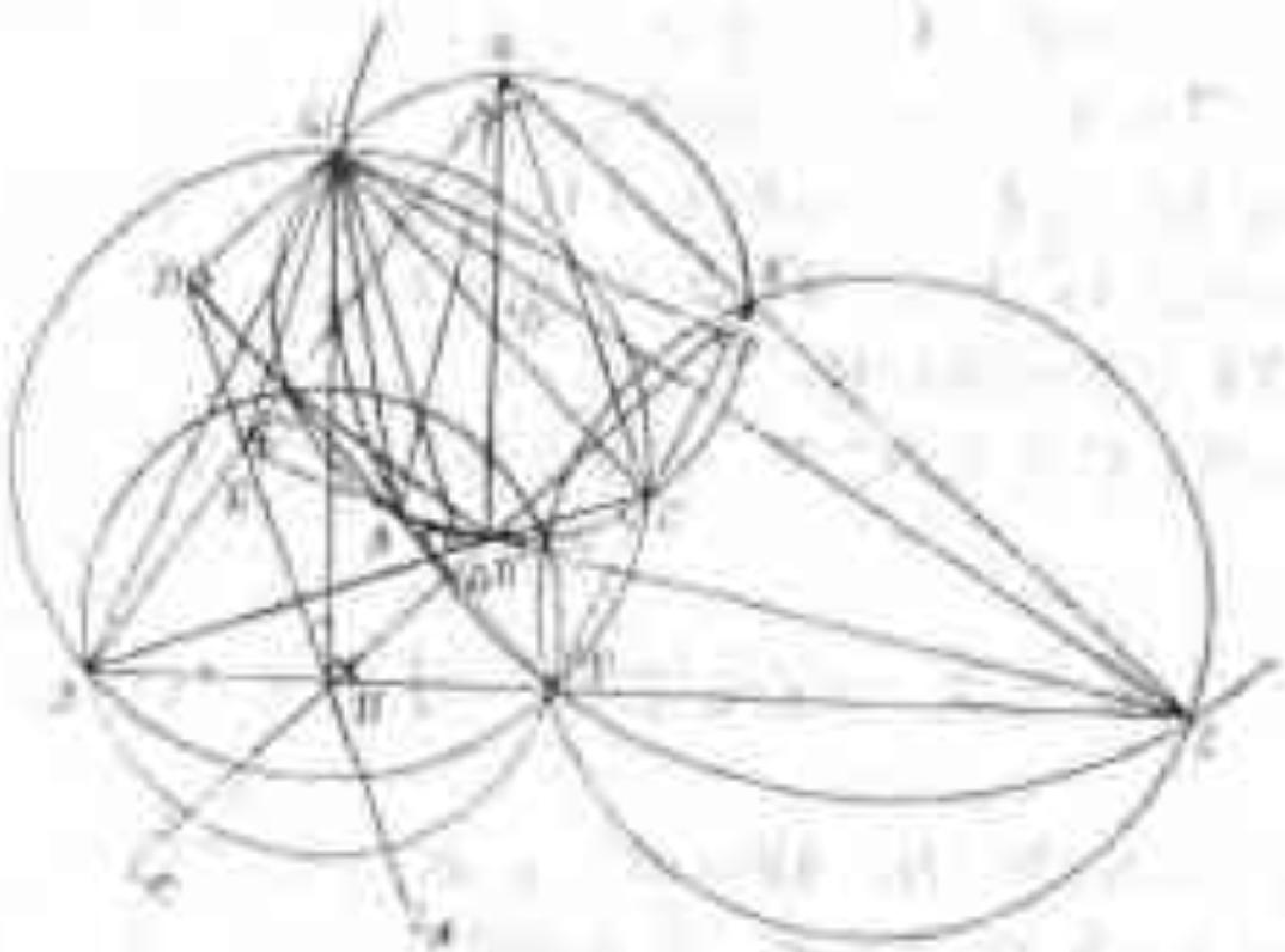


图7—2(4)—(5)

(4) 1° 设⊙AYZ 交⊙CXY 于 Q.

则 $\angle XQZ = \angle XQY + \angle ZQY = \angle XCY + \angle ZAY$

$= \angle A'BD' + \angle C'BD' = \angle A'BC' = \angle XBZ$,

∴ ⊙BZX 过 Q.

同理，设⊙$A'YZ$ 交⊙$C'XY$ 于 Q'，则⊙$B'ZX$ 也过 Q'.

2° ∵ $\angle AQC = \angle XQC + \angle ZQA - \angle XQZ$

$= \angle CYZ + \angle AYX - \angle XBZ = 180° - \angle AYC - \angle XBZ$

$= 180° - \angle XBZ - \angle AYC = 180° - \angle C'BA' - \angle AYD' - \angle CYD' = \angle C'D'A' - \angle CYD' - \angle AYD'$

$= \angle B'C'Y + \angle B'A'Y$

$= \angle B'C'A + \angle B'A'C = \angle B'BA + \angle B'BC = \angle ABC$.

（5）：∵ Q在⊙O上，Q对于$\triangle AB'C'$的西摩松线为D、E两点的连线。由于Q在AY、AZ上的射影亦为D、E且Q、A、Y、Z共圆，故Q在$\triangle AYZ$上的西摩松线L_A亦为D、E的连线且应通过Q在YZ上的射影点H；

又Q对于$\triangle CA'B'$的西摩松线为F、G两点的连线，由于Q在CY、CX上的射影亦为F、G且Q、X、Y、C共圆，故Q在$\triangle CXY$上的西摩松线L_C亦为F、G的连线且应通过Q在XY上的射影点H；

同理，Q对$\triangle BC'A'$的西摩松线L_B亦过H。

第九节 线段计算 习题十八

1．在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，P、Q是外接圆上的两点，但P与A分在BC的两侧，Q与A同在BC的一侧，求证：

$$\frac{PA}{PB+PC}=\frac{QA}{|QB-QC|}$$

提要：当Q在$\overset{\frown}{AC}$上时，由托列迷定理，得

$$PQ\cdot AC=PA\cdot QC+QA\cdot PC,$$

$$PA\cdot QB=PQ\cdot AB+QA\cdot PB.$$

两式相加并整理即可．

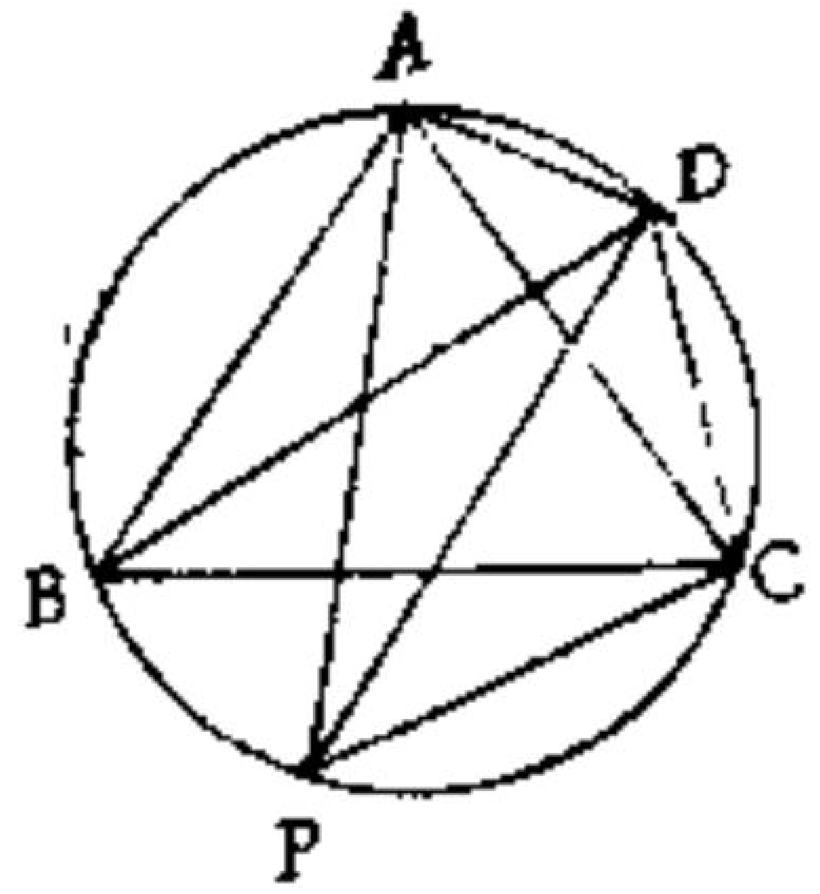


图18—1

2．设P是正方形$ABCD$外接圆的$\overset{\frown}{AB}$上一点，则

$$(PD-PB):(PC-PA):(PB+PD):(PA+PC)$$
$$=PA:PB:PC:PD.$$

提要：令正方形边长为a，由托列迷定理可得：

$PD\cdot a-PB\cdot a=PA\cdot\sqrt{2}a$, $PC\cdot a-PA\cdot a=PB\cdot\sqrt{2}a$.

$\therefore\quad (PD-PB):(PC-PA)=PA:PB$.

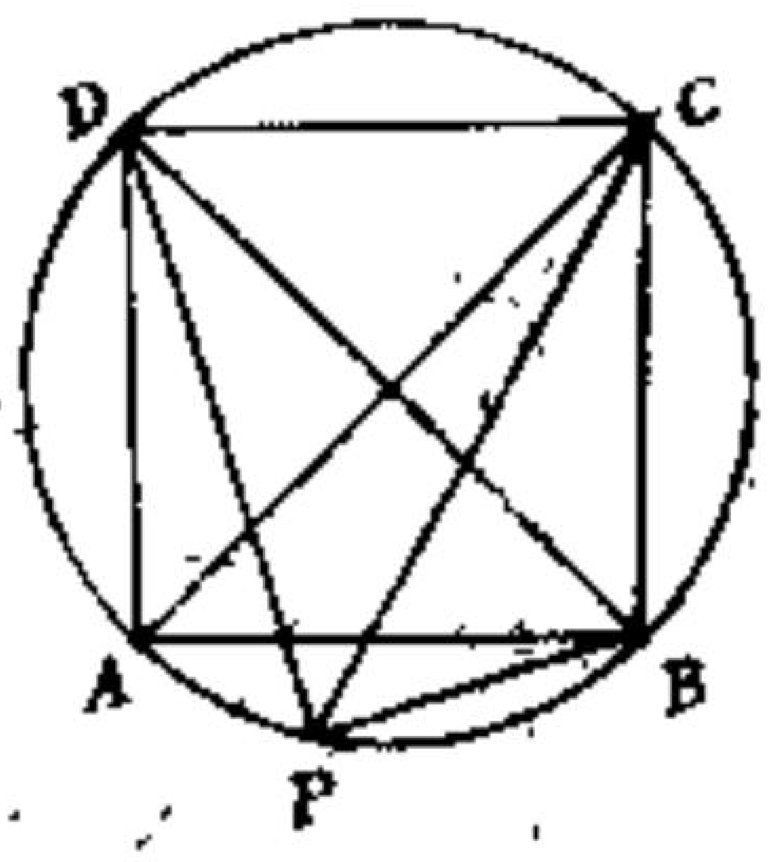


图18—2

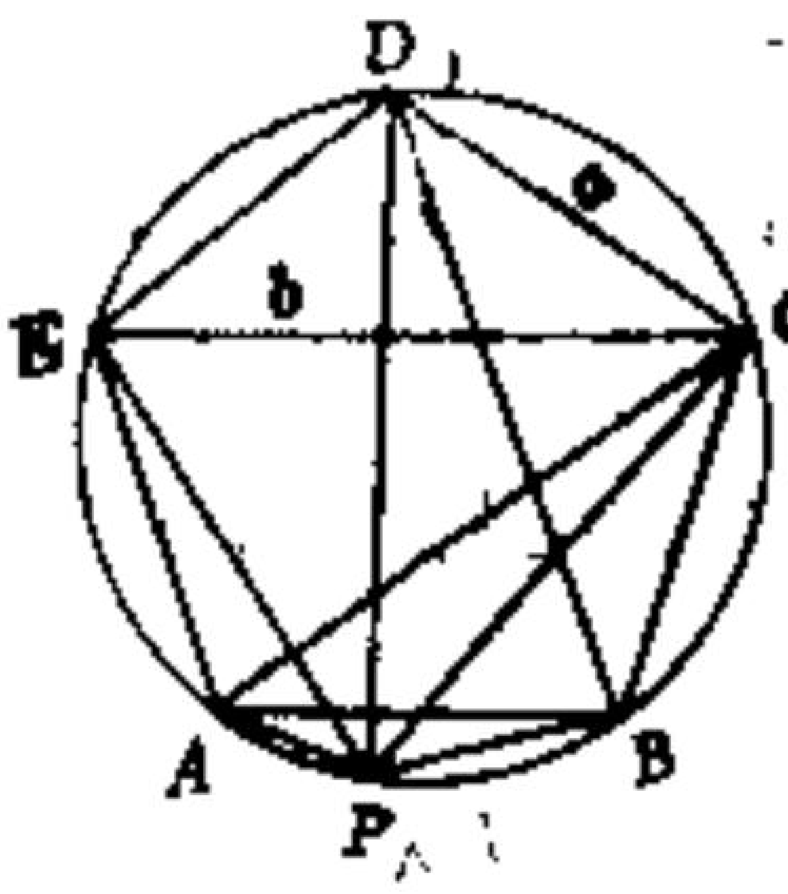


图18—3

3．设 P 是正五边形 $ABCDE$ 外接圆的 $\overset{\frown}{AB}$ 上一点，则

$$PC+PE=PA+PB+PD.$$

提要：令正五形的边长为 a，对角线长为 b，由托列密定理，有

$$PC\cdot DE+PE\cdot CD=PD\cdot CE,$$

$$PA\cdot CD+PC\cdot AD=PD\cdot AC,$$

$$PB\cdot CD+PD\cdot BC=PC\cdot BD.$$

4．三角形外接圆上任一点至三边的距离与至对顶点的距离成反比例．

提要：由$\triangle PDB\backsim\triangle PEA$，$\triangle PEC\backsim\triangle PFB$，可得

$$PD:PE:PF=\frac{1}{PA}:\frac{1}{PB}:\frac{1}{PC}$$

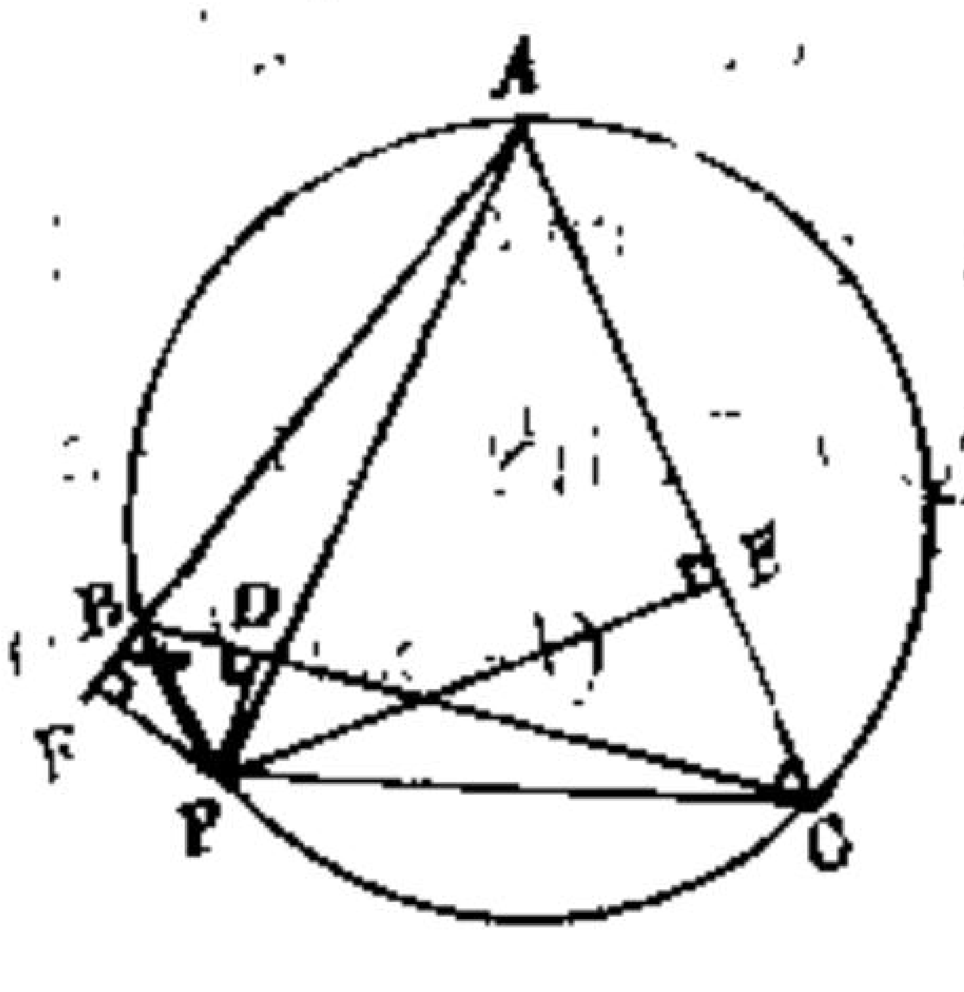


图18—4

5．设 P 是$\triangle ABC$外接圆上一点，X、Y、Z 各是 P 在

BC、CA、AB 上的射影．若 P 与 A 分在 BC 的两侧，则

$$\frac{BC}{PX}=\frac{CA}{PY}+\frac{AB}{PZ}.$$

证明：∵ $\angle BPC>\angle BPA$，故可在 BC 上取一点 D，使 $\angle CPD=\angle APB$，于是有

$\triangle PDC\backsim\triangle PBA$，$\triangle PDX\backsim\triangle PBZ$．

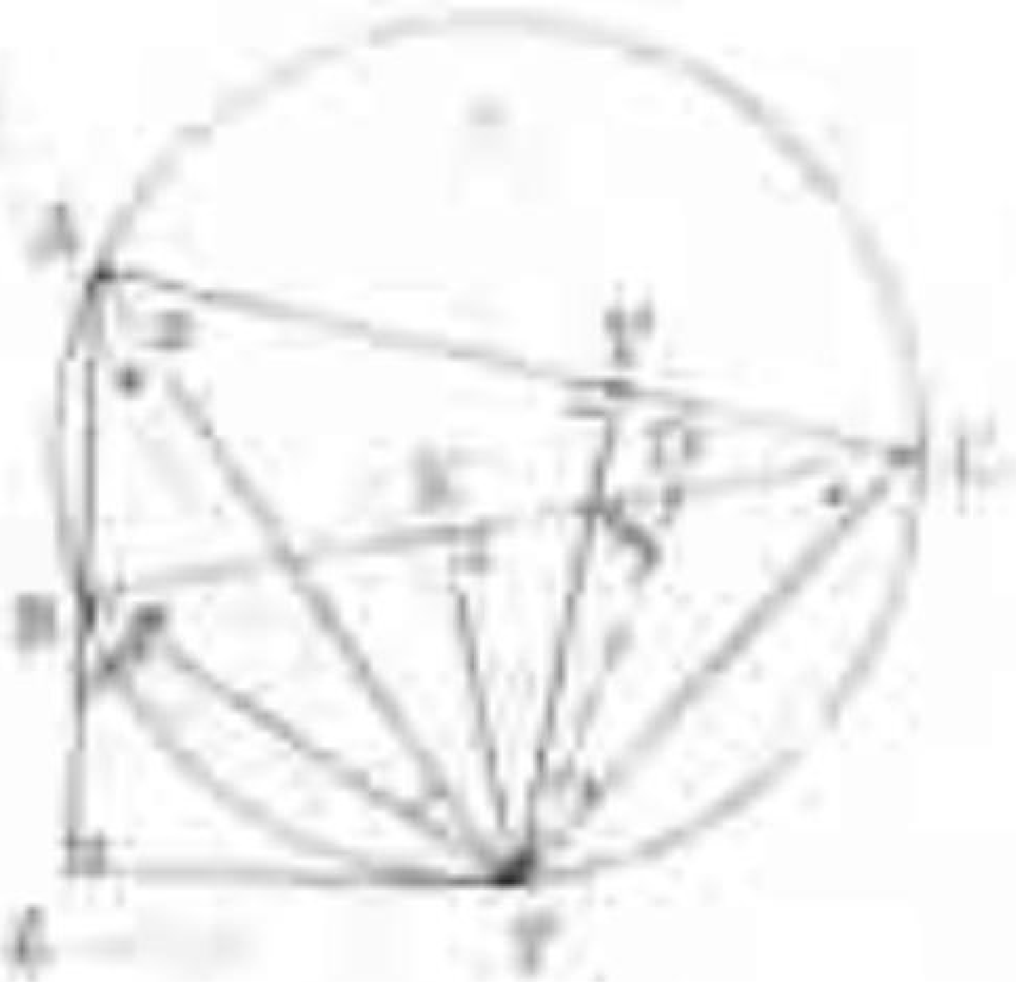


图 8—7

∴ $\frac{CD}{AB}=\frac{PD}{PB}=\frac{PX}{PZ}$，即

$$\frac{CD}{PX}=\frac{AB}{PZ} \qquad ①$$

又 $\triangle PDB\backsim\triangle PCA$，$\triangle PXB\backsim\triangle PYA$，

$$\therefore\ \frac{DB}{CA}=\frac{PB}{PA}=\frac{PX}{PY}\quad 即\quad \frac{DB}{PX}=\frac{CA}{PY} \qquad ②$$

①＋②得所证 $\frac{BC}{PX}=\frac{CA}{PY}+\frac{AB}{PZ}$．

6．在圆内接凸四边形 $ABCD$ 中，设各组对边的积为 m 及 n，两对角线的积为 l，$\triangle BCD$、$\triangle DCA$、$\triangle DAB$、$\triangle ABC$ 的内切圆直径各为 d_1、d_2、d_3、d_4，求证：

$$(l-m)(l-n)=d_1d_3+d_2d_4.$$

提要：由 A、B、C、D，A、H、O_3、G，C、E、O_1、F 均四点共圆，故有 $\angle HAG=\angle EO_1F$.

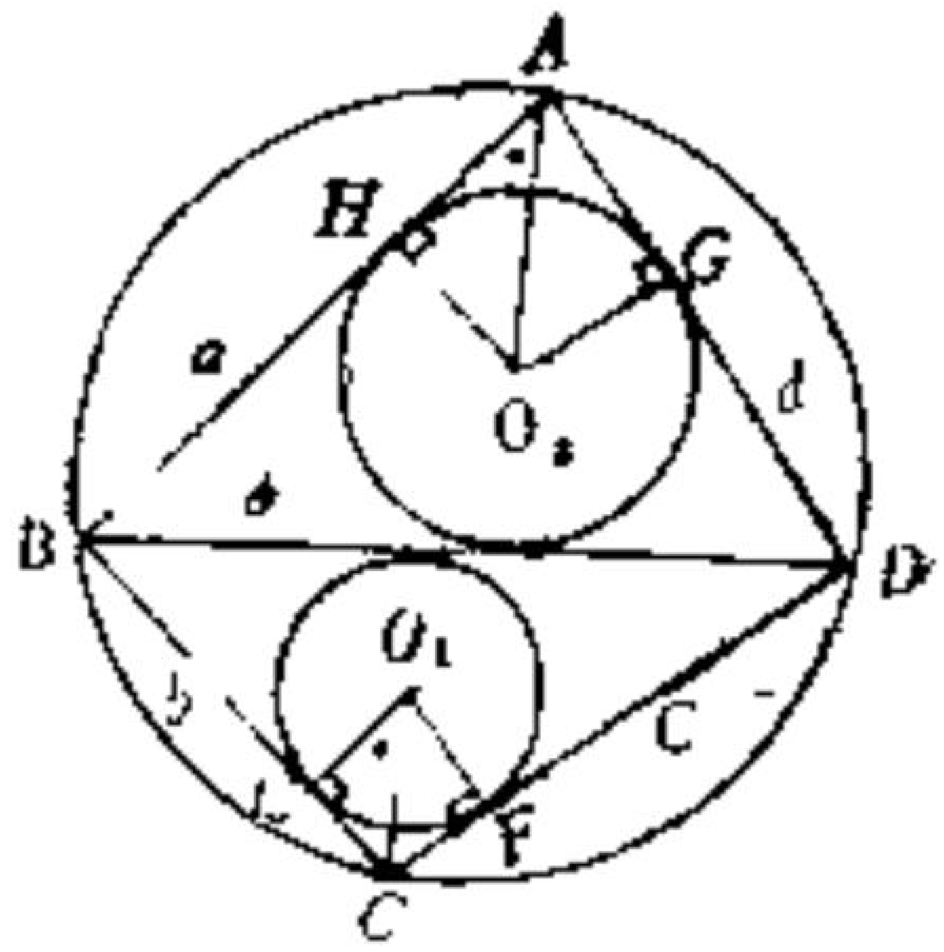


图18—6

$\therefore\quad \triangle AHO_3 \backsim \triangle O_1EC$，有

$$\frac{AH}{O_1E}=\frac{HO_3}{EC},$$

$$\therefore\quad AH\cdot EC=O_1E\cdot HO_3=r_1\cdot r_3.$$

又 $2AH=a+d-e$，$2EC=b+c-e$，

故 $d_1\cdot d_3=4r_1\cdot r_3=(b+c-e)(a+d-e)$.

同理 $d_2\cdot d_4=(a+b-f)(c+d-f)$

令 $a+c=m$、$b+d=n$、$e+f=l$，

则 $d_1d_3+d_2d_4=e^2-(a+b+c+d)e+(b+c)(a+d)$

$+f^2-(a+b+c+d)f+(a+b)(c+d)$

$=e^2+f^2-(a+b+c+d)(e+f)+(ab+bc+cd+da)$

$+2(ac+ba)=(e+f)^2-(m+n)(e+f)+mn$

$=(l-m)(l-n)$.

7. 在圆内接六边形 $AB'CA'BC'$ 中，令 $BC'=a$，$B'C=a'$，$CA'=b$，$C'A=b'$，$AB'=c$，$A'B=c'$，$AA'=a_1$，$BB'=b_1$，$CC'=c_1$，求证：

$$a_1b_1c_1=abc+a'b'c'+aa'a_1+bb'b_1+cc'c_1.$$

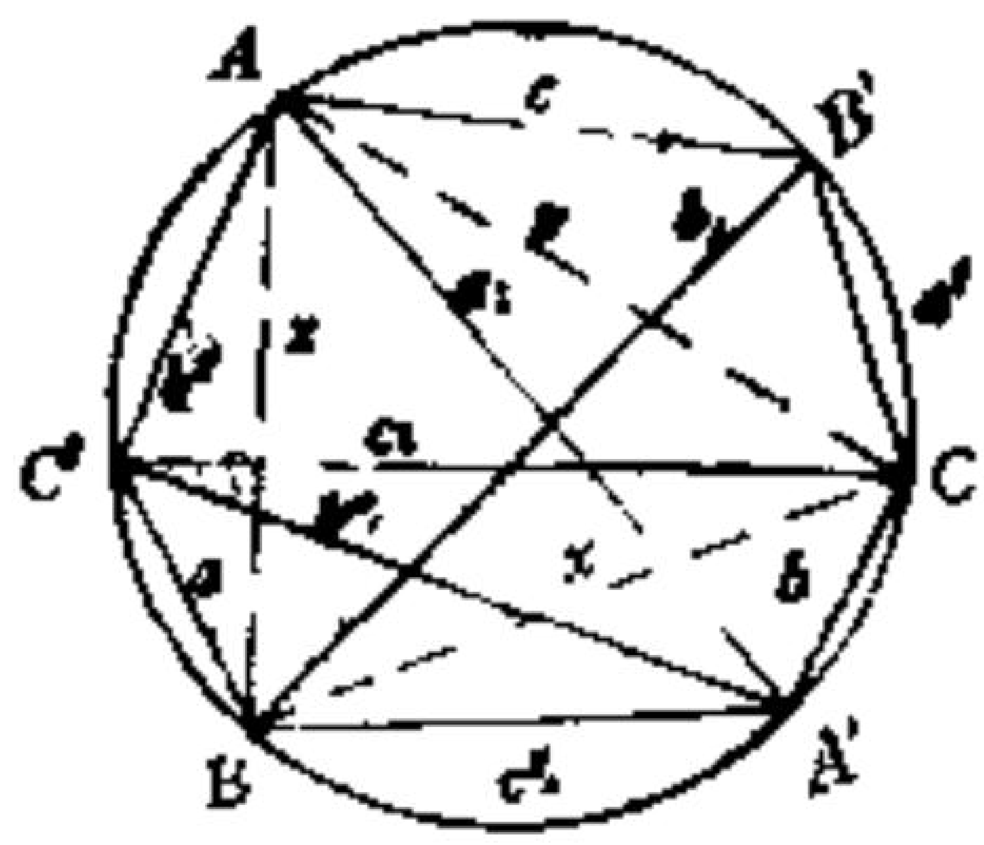


图18—7

提要：令 $BC=x$、$CA=y$、$C'A'=y'$、$AB=z$.

由托列迷定理，得

$c(c_1c'+ab)=cxy'$，

$a'(aa_1+b'c')=a'y'z$.

$b_1(bb'+yy')=b_1a_1c_1$.

三式加时并代入 $cx+a'z=b_1y$ 即可.

8. 设 $ABCD$ 是圆内接凸四边形，则

$$\frac{AC}{BD}=\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}$$

提要：由面 ABD + 面 CBD = 面 BAC + 面 DAC，与习题四第28题有：

$$\frac{adf}{4R}+\frac{bcf}{4R}=\frac{abe}{4R}+\frac{cde}{4R}$$

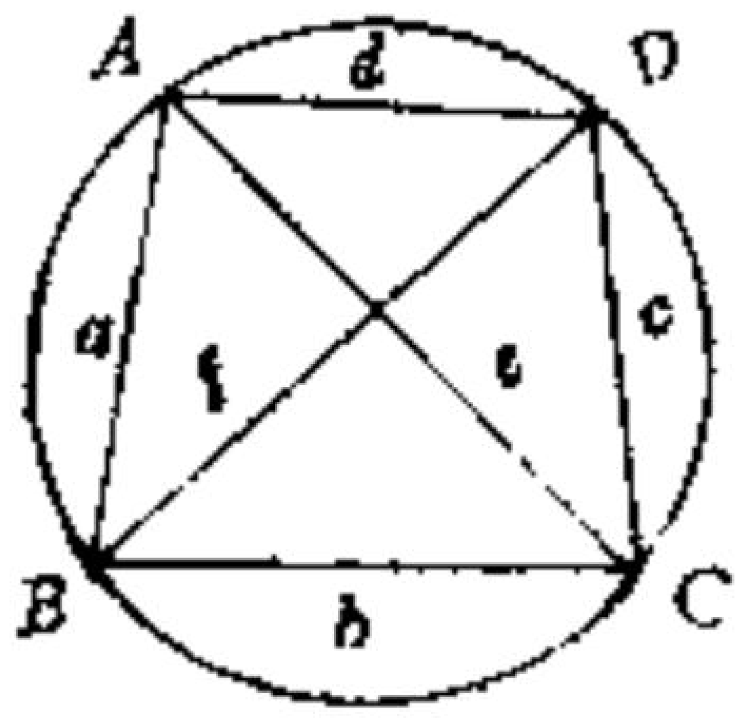


图 18—8

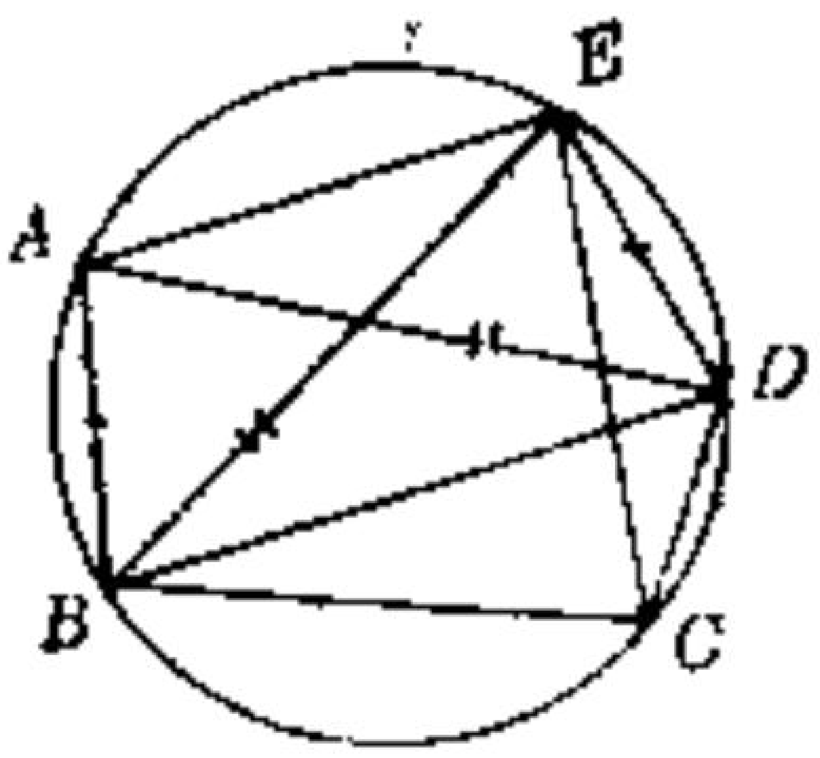


图 18—10

9. 设已知圆内接凸四边形的四边为 a、b、c、d，试求两对角线的长.

提要：由上题，$\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$. 又 $ef=ac+bd$，

$$\therefore\quad e=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}},$$

$$f=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

10. 设凸四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O(R)$，而 AE 是 $\odot O$ 中平行于 BD 的弦，则该四边形面积为：

$$S=\frac{AC\cdot BD\cdot CE}{4R}.$$

提要：由习题四第28题，

$$S_{\triangle ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot BC}{4R},\quad S_{\triangle ADC}=\frac{AD\cdot AC\cdot DC}{4R}.$$

相加时代入 $DE\cdot BC+BE\cdot DC=BD\cdot CE$.

11．设 a、b、c、d 表圆内接凸四边形的四边，s 表半周，S 表面积，则

$$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

(Brahmagupta 定理)

提要：由 $P206$ 例题56贝利契纳德公式，

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{[2ef+(a^2-b^2+c^2-d^2)][2ef-(a^2-b^2+c^2-d^2)]}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+2bd+a^2+c^2-b^2-d^2)(2ac+2bd-a^2-c^2+b^2+d^2)}$$

$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

12．承上题，设 R 表外接圆的半径，则

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

提要：由第10题得 $R=\frac{1}{4}\cdot\frac{AC\cdot BD\cdot CE}{S}$.

由第9题得四边形 $BCDE$ 的 CE 长度为

$$CE=\sqrt{\frac{(bc+ad)(ab+cd)}{ac+bd}}.$$

有 $AC\cdot BD\cdot CE=ef\cdot CE=\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$

13. 同时有外接圆和内切圆的四边形，它的面积等于四边连乘积的平方根。

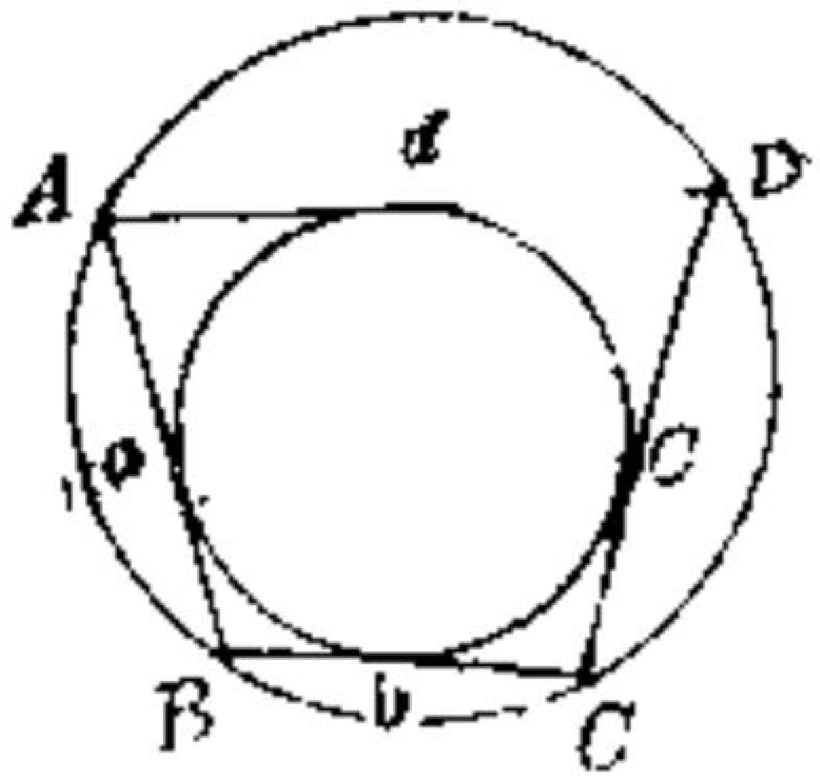


图 18—13

提要：∵ $a+c=b+d=s$，

∴ $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

$=\sqrt{abcd}$

14. 设 s 表圆外切凸四边形的半周，a、b、c、d 表从顶点至内切圆的切线长，r 表内切圆的半径，则

$$r=\sqrt{\frac{abc+bcd+cda+dab}{s}}.$$

提要：(1) $\angle AOD+\angle BOC=180°$.

自 A、B 分别作 DO、CO 的垂线，垂足为 F、E，有 $\angle AOF=\angle BOE$，故

$\triangle AOF\backsim\triangle BOE$

∴ $\frac{OF}{OE}=\frac{OA}{OB}$

$=\frac{\sqrt{r^2+a^2}}{\sqrt{r^2+b^2}}$ ……①

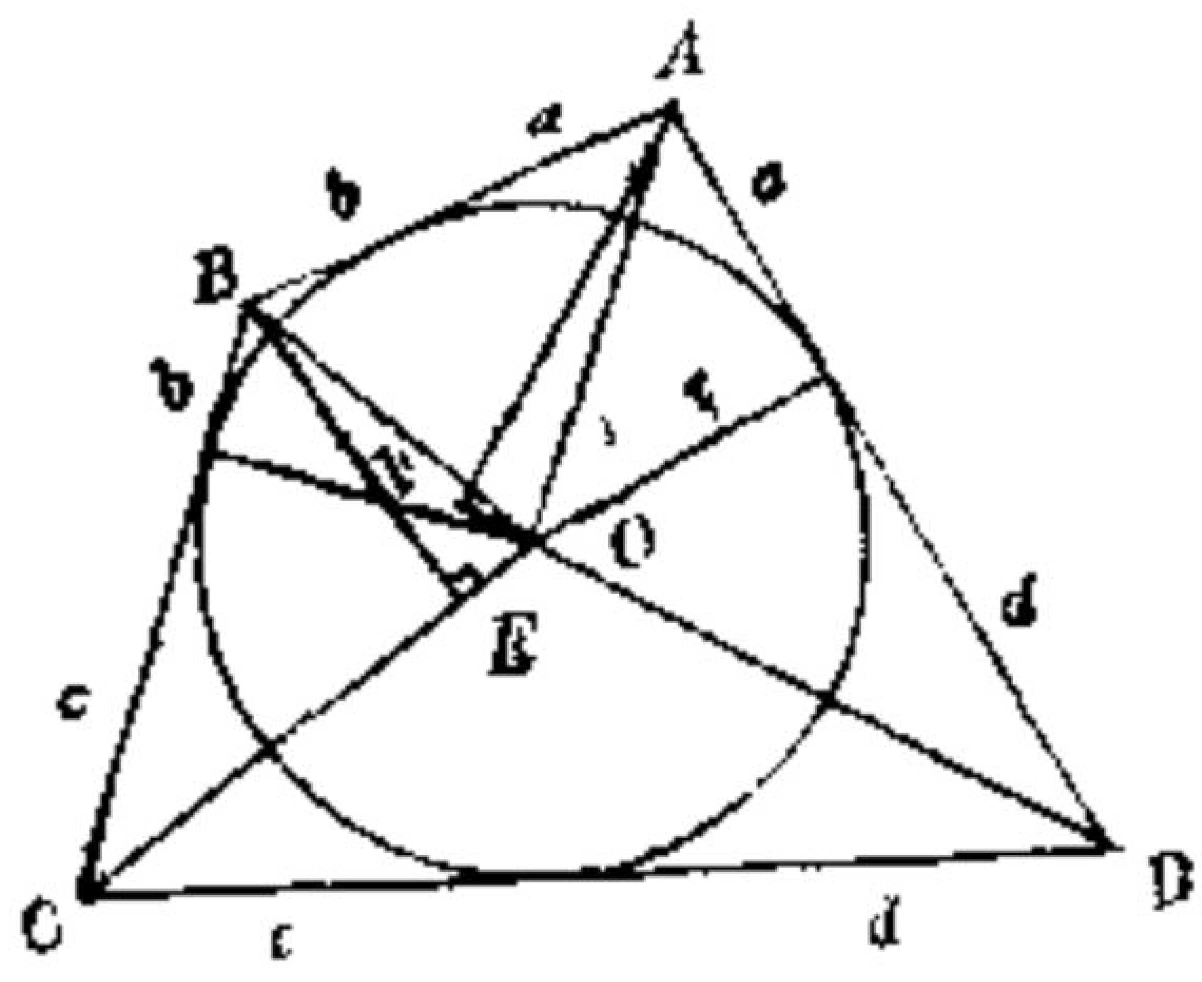


图 18—14

(2) 用广勾股定理于 $\triangle AOD$，$\triangle BOD$ 得：

$$OF=\frac{ad-r^2}{\sqrt{r^2+d^2}},\quad OE=\frac{r^2-bc}{\sqrt{r^2+c^2}}$$

代此结果于①即可。

15. 承上题，设 S 表四边形的面积，则

$$S=\sqrt{s(abc+bcd+cda+dab)}.$$

提要：$S=sr$，r 如上题。

16．在第11题的关系式中，令 $d=0$ 即变成什么公式？

斯伦公式。

17．设 A、B、C 是共线的三点，P 是任一点，则 $PA^2\cdot\overline{BC}+PB^2\cdot\overline{CA}+PC^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$；

提示：对于直线上四点，由直线习题一之10题得：

$$AH^2\cdot\overline{BC}+BH^2\cdot\overline{CA}+CH^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

由定理104可得：

$$PH^2(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})=0$$

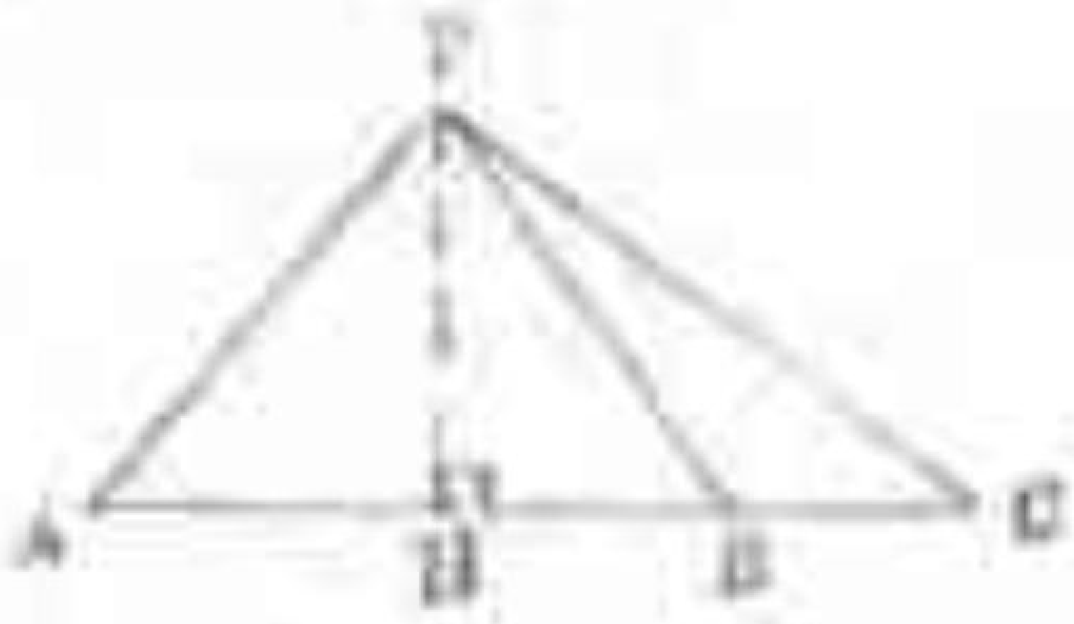


图18—17

两式相加即可。

18．设 a、b、c 各是共线三点 A、B、C 对于一圆的幂，求证：$a\cdot\overline{BC}+b\cdot\overline{CA}+c\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$。

提示：由上题有：

$PA^2\cdot\overline{BC}+PB^2\cdot\overline{CA}+PC^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AC}=0$。

又 $r^2(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})=0$，

两式相减即可。

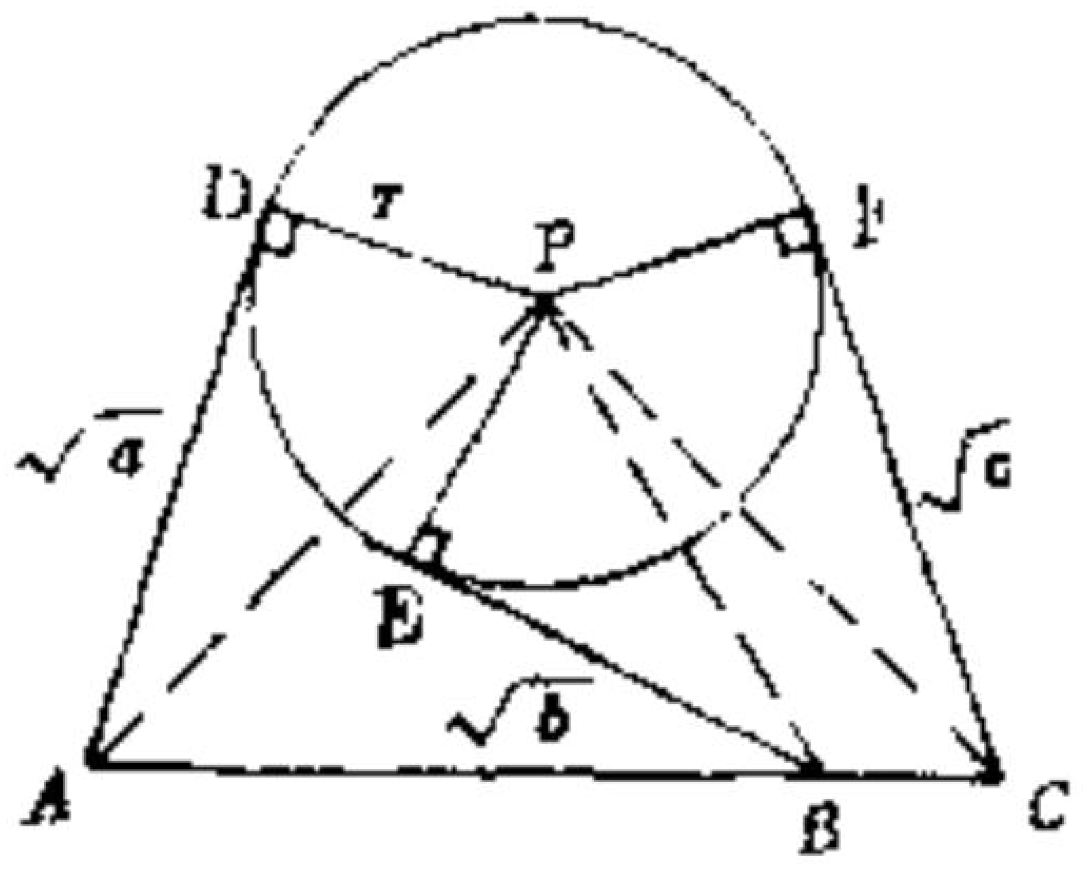


图18—18

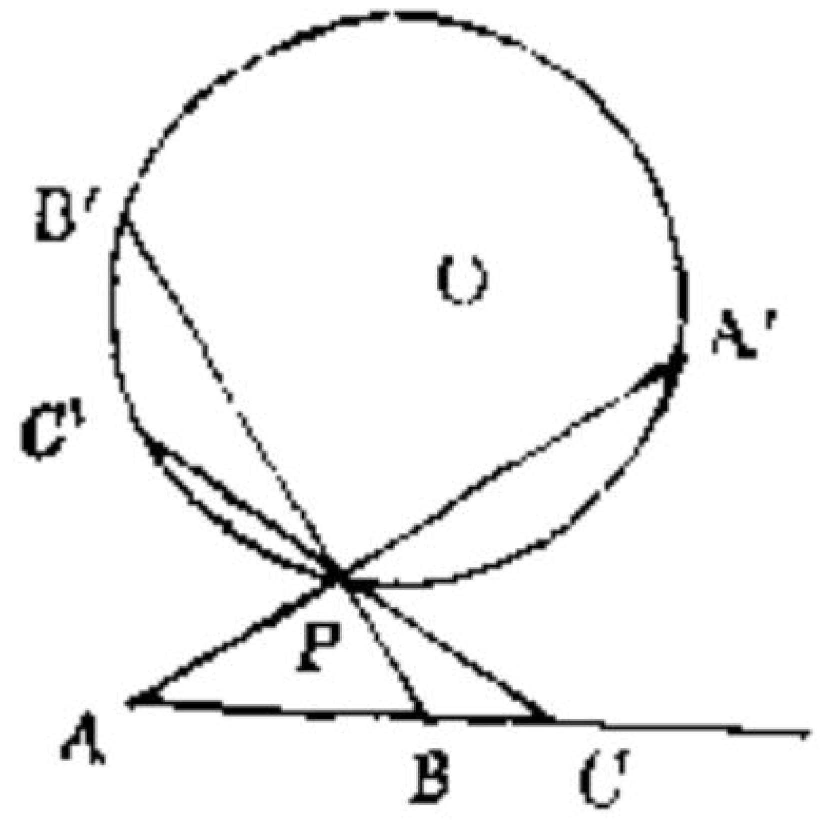


图18—19

19．共线三点 A、B、C 与圆上一点 P 的连线交圆于 A'、B'、C'，求证：

$$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{PC'}\cdot\overline{AB}=0.$$

提要：令 a、b、c 是共线三点 A、B、C 对于⊙O 的幂，则

$$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=-\overline{AP}\,(\overline{AA'}-\overline{AP})=PA^2-a,$$

同理，$\overline{PB}\cdot\overline{PB'}=PB^2-b$，$\overline{PC}\cdot\overline{PC'}=PC^2-c$.

故原式 $=(PA^2-a)\overline{BC}+(PB^2-b)\overline{CA}+(PC^2-c)\overline{AB}$

$$=PA^2\cdot\overline{BC}+PB^2\cdot\overline{CA}+PC^2\cdot\overline{AB}-(a\cdot\overline{BC}+b\cdot\overline{CA}+c\cdot\overline{AB}).$$

由上两题结果原式为0．

20．设 P 是△ABC 的 BC 边或延长线上一点，而 $\frac{PB}{PC}=-\frac{m}{n}$，求证：

(1) $m\cdot AC^2+n\cdot AB^2=(m+n)AP^2+m\cdot PC^2+n\cdot PB^2$；

(2) $AP^2=\frac{m}{m+n}AC^2+\frac{n}{m+n}AB^2-\frac{mn}{(m+n)^2}\cdot BC^2$.

提要：(1) 由题17，B、P、C 是共线三点，关于 A 有：

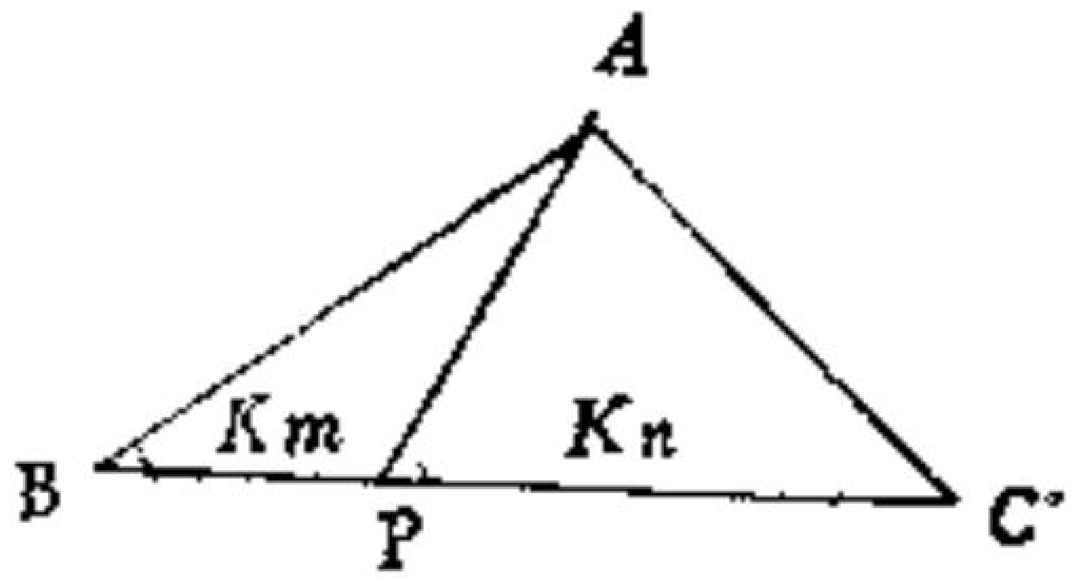


图18—20

$AB^2\cdot\overline{PC}+AP^2\cdot\overline{CB}+AC^2\cdot\overline{BP}+\overline{PC}\cdot\overline{CB}\cdot\overline{BP}=0$，

即 $km\cdot AC^2+kn\cdot AB^2$

$=k(m+n)AP^2+k^2\cdot mn\cdot BC$．

∵ $m\cdot PC^2+n\cdot PB^2=mk^2n^2+nk^2m^2=k^2mn(m+n)$

$$=kmn\cdot BC$$

故（1）成立．

(2) 由（1）得

$$AP^2=\frac{n}{m+n}AC^2+\frac{n}{m+n}AB^2-\frac{m\cdot PC^2+n\cdot PB^2}{m+n}$$

而 $$\frac{m\cdot PC^2+n\cdot PB^2}{m+n}=\frac{kmn\cdot BC}{m+n}=\frac{k(m+n)mn\cdot BC}{(m+n)^2}$$

$$=\frac{mn}{(m+n)^2}BC^2,$$

故（2）成立．

21．设 G 是△ABC 的重心，P 是任一点．求证：

(1) $BC^2+3\cdot GA^2=CA^2+3\cdot GB^2=AB^2+3\cdot GC^2$；

(2) $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}(BC^2+CA^2+AB^2)$；

(3) $PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP^2$．

提要：(1) 由上题(2)，D 是 BC 的中点，有 $DB:DC=1:1$．

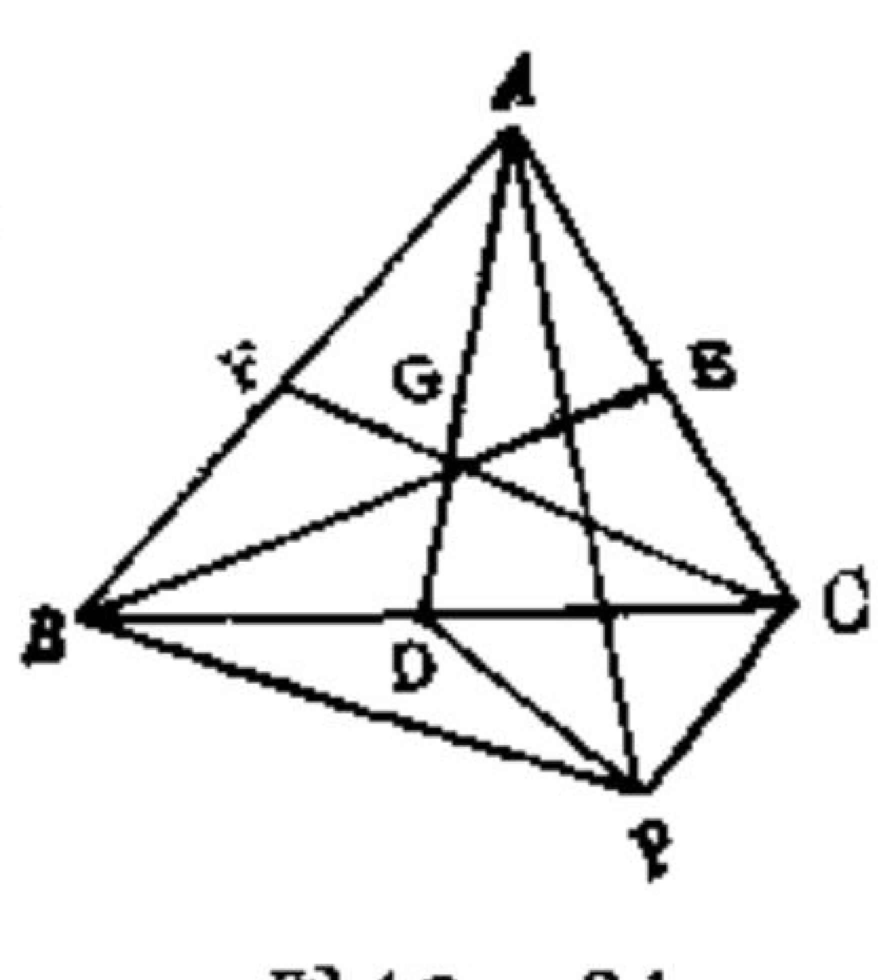


图18—21

∴ $AD^2=\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AB^2-$

$-\frac{1}{4}BC^2$ ①

又 $9AG^2=4AD^2$，

∴ $9AG^2+3BC^2$

$=2(AB^2+BC^2+CA^2)$,

即　$BC^2+3\cdot GA^2=2(AB^2+BC^2+CA^2)/3$.

同理，$CA^2+3\cdot GB^2$、$AB^2+3\cdot GC^2$ 均等于 $2(AB^2+BC^2+CA^2)/3$，故（1）成立.

(2) 将①的三式相加即可.

(3) ∵　G 是$\triangle PAD$ 的 AD 边上一点，且

$$GA:GD=-2/1,$$

∴　$PG^2=\frac{2}{3}PD^2+\frac{1}{3}PA^2-\frac{2}{9}AD^2$,

即　$3PG^2=2PD^2+PA^2-2AD^2/3$　②

又　$PD^2=\frac{1}{2}PB^2+\frac{1}{2}PC^2-\frac{1}{4}BC^2$,

即　$2PD^2=PB^2+PC^2-BC^2/2$　③

①与③代入②并整理得

$$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3GP^2$$

22．设 AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的高，H 是垂心．求证：(1) $\overline{AD}\cdot\overline{AH}+\overline{BE}\cdot\overline{BH}+\overline{CF}\cdot\overline{CH}$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2);$$

(2) $\overline{HA}\cdot\overline{HD}=\overline{HB}\cdot\overline{HE}=\overline{HC}\cdot\overline{HF}$

$$=4R^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

式中的 a、b、c 表$\triangle ABC$ 的三边，R 表外接圆半径．

提要：(1) 由$\triangle AHE\backsim\triangle ACD$、$\triangle AHF\backsim\triangle ABD$，有

$$\overline{AD}\cdot\overline{AH}=\overline{AC}\cdot\overline{AE}, \qquad ①$$

$$\overline{AD}\cdot\overline{AH}=\overline{AB}\cdot\overline{AF}. \qquad ②$$

同理

$$\overline{BE}\cdot\overline{BH}=\overline{BA}\cdot\overline{BF}, \qquad ③$$

$$\overline{BE}\cdot\overline{BH}=\overline{BC}\cdot\overline{BD}, \qquad ④$$

$$\overline{CF}\cdot\overline{CH}=\overline{CA}\cdot\overline{CE}, \qquad ⑤$$

$$\overline{CF}\cdot\overline{CH}=\overline{CB}\cdot\overline{CD}. \qquad ⑥$$

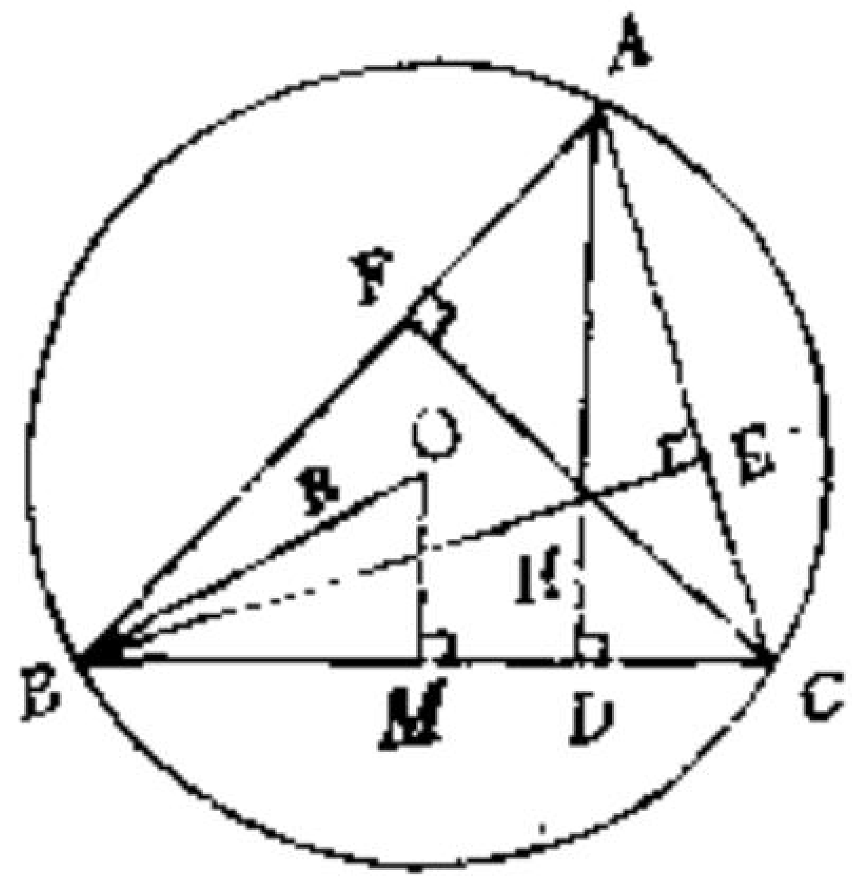


图18—22

①+⑤ $\overline{AD}\cdot\overline{AH}+\overline{CF}\cdot\overline{CH}=\overline{AC}\cdot\overline{AE}+$
$+\overline{AC}\cdot\overline{EC}=b^2.$ ⑦

②+③ $\overline{AD}\cdot\overline{AH}+\overline{BE}\cdot\overline{BH}=c^2$ ⑧

④+⑥ $\overline{BE}\cdot\overline{BH}+\overline{CF}\cdot\overline{CH}=a^2$ ⑨

⑦、⑧、⑨相加即可.

(2) $\overline{HA}\cdot\overline{HD}=\overline{HA}(\overline{AD}-\overline{AH})=\overline{HA}\cdot\overline{AD}+AH^2$
$=\overline{CA}\cdot\overline{AE}+AH^2$ ①

在$\triangle HCA$中，由$CH^2=AH^2+AC^2-2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AE}$，

有 $\overline{AC}\cdot\overline{AE}=\dfrac{AH^2+AC^2-CH^2}{2}$ ②

∵ $OM^2+BM^2=R^2$，有$(2\cdot OM)^2+(2\cdot BM)^2=4R^2$.

又 $2\cdot OM=AH$，∴ $AH^2=4R^2-a^2$，

同理，$CH^2=4R^2-c^2$ ③

②、③代入①得 $\overline{HA}\cdot\overline{HD}=4R^2-\dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

23. 设a、b、c表三角形的三边，s表半周，$\triangle$表面积，r及r_1、r_2、r_3表内切圆及三个旁切圆的半径，求证：

(1) $r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2=\dfrac{r_1r_2r_3}{r}=s^2$；

(2) $r(r_1+r_2+r_3)=s^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

$$=bc+ca+ab-s^2;$$

(3) $\Delta=\sqrt{rr_1r_2r_3}$.

提要：(1) 由复习题一第46题，

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},\quad r_1=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

$$r_2=\sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}},\quad r_3=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}.$$

(2) $r(r_1+r_2+r_3)=(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)$

$+(s-a)(s-b)=bc+ca+ab+s^2$

$=bc+ca+ab-2s^2+s^2$

$=bc+ca+ab-\frac{(a+b+c)^2}{2}+s^2$

$=s^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

(3) $\Delta=rs=r\cdot\sqrt{\frac{r_1r_2r_3}{r}}=\sqrt{rr_1r_2r_3}$.

24. 设 a、b、c 表三角形的三边，R 表外接圆半径，r 表内切圆或旁切圆半径，O 表外心，H 表垂心，G 表重心，I 表内心或旁心，求证：

(1) $OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$，

(2) $IH^2=4R^2+2r^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$；

(3) $IG^2=\frac{2}{3}r(r\mp 2R)+\frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2)$.

末式中的 $\mp$ 号，在 I 为内心时取负号，I 为旁心时取正号.

提要：(1) 由定理127，点 H 关于⊙O 的幂有等式：

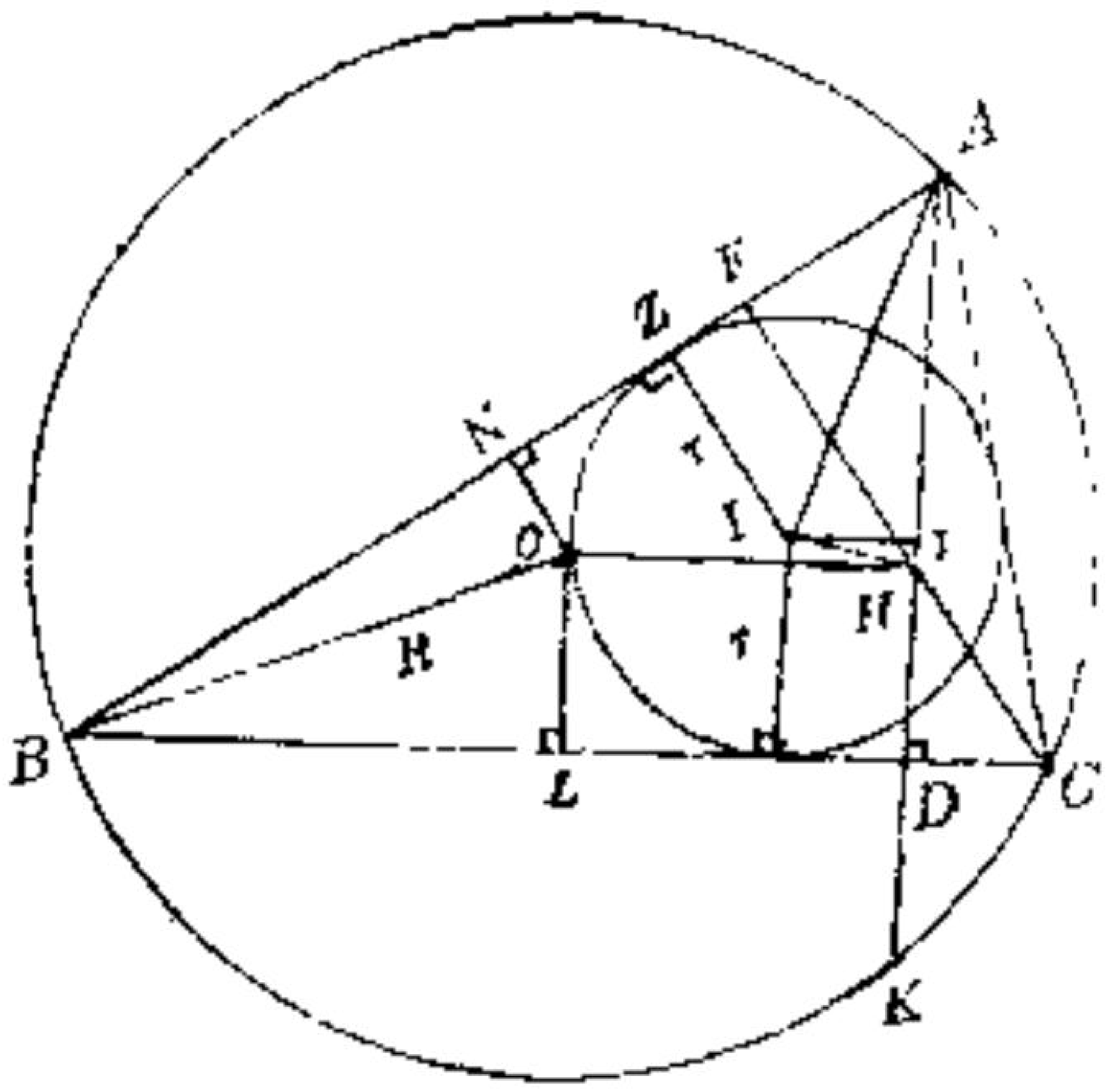


图18—24

$$HO^2-R^2=HA\cdot HK.$$

由复习题一第21题，$DH=DK$.

$\therefore\quad HO^2=R^2+2\cdot HA\cdot HD=R^2+8R^2-(a^2+b^2+c^2).$

(2) $IH^2=IJ^2+JH^2=IA^2-AJ^2+JH^2$

$=IA^2-(AD-r)^2+(r-HD)^2$

$=IA^2+2r(AD-HD)-AD^2+HD^2$

$=IA^2+2r\cdot AH-(AC^2-CD^2)+HD^2$

$=AZ^2+r^2+2r\cdot AH-b^2+CH^2$

（由复习题一第13题）

$=(s-a)^2+r^2+2r\cdot 2\cdot OL-b^2+(2\cdot ON)$

（例题19）

$=\ (s-a)^2+r^2+2r\sqrt{4R^2-a^2}-b^2+4R^2-c^2$

由习题四第28题，$4\Delta R=abc$，

有 $4R^2=\dfrac{a^2b^2c^2}{4\Delta^2}$.　　　Δ表三角形面积.

由 $P.69$ 秦九韶公式，$4\Delta^2=b^2c^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\right)^2$，

$\therefore\quad 2r\sqrt{4R^2-a^2}=2r\sqrt{\frac{a^2b^2c^2}{4\Delta^2}-a^2}=\frac{ra}{\Delta}\sqrt{b^2c^2-4\Delta^2}$

$$=\frac{ra}{\Delta}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=\frac{a}{s}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

代入①得

$$IH^2=4R^2+r^2+\frac{a}{s}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+(s-a)^2-b^2-c^2. \qquad ②$$

$\therefore\ s\left[\frac{a}{s}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}-b^2-c^2+\frac{1}{2}(b^2+c^2+a^2)+(s-a)^2\right]$

$=s\left[\frac{a}{s}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}-\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)+(s-a)^2\right]$

$=s(s-a^2)^2-\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)(s-a)$

$=(s-a)(s-b)(s-c)=r^2s,$

$\therefore\quad \frac{a}{s}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}-b^2-c^2+(s-a)^2$

$=r^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2).$

代入②得(2).

(3) $\because$ O、G、H 为欧拉线，且 $\frac{GO}{GH}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore\quad IG^2=\frac{2}{3}IO^2+\frac{1}{3}IH^2-\frac{2}{9}\cdot OH^2.$

由 P204 例题55，$IO^2=R^2\mp 2Rr$.

$\therefore\quad IG^2=\frac{2}{3}(R^2\mp 2Rr)+\frac{1}{3}\left[4R^2+2r^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\right]$

$$-\frac{2}{9}[9R^2-(a^2+b^2+c^2)]$$

$$= \frac{2}{3} r(r \mp 2R) + \frac{1}{18}(a^2+b^2+c^2).$$

25．矩形 $ABCD$ 的边 $AD = \frac{AB}{\sqrt{2}}$，以 AB 为直径在矩形之外作半圆，在半圆上任取一点 P，连 PC、PD 交 AB 于 E、F，求证：$AE^2 + BF^2 = AB^2$．（Fermat定理）

提要：$AB^2 = 2AD^2 = 2BC^2$，

$PQ^2 = QA \cdot QB$.

由 $\frac{QE}{EB} = \frac{QP}{BC}$，$\frac{QF}{FA} = \frac{QP}{AD} = \frac{QP}{BC}$，

可得 $QE = \frac{QB \cdot QP}{QP + BC}$

$QF = \frac{QA \cdot QP}{QP + BC}$.

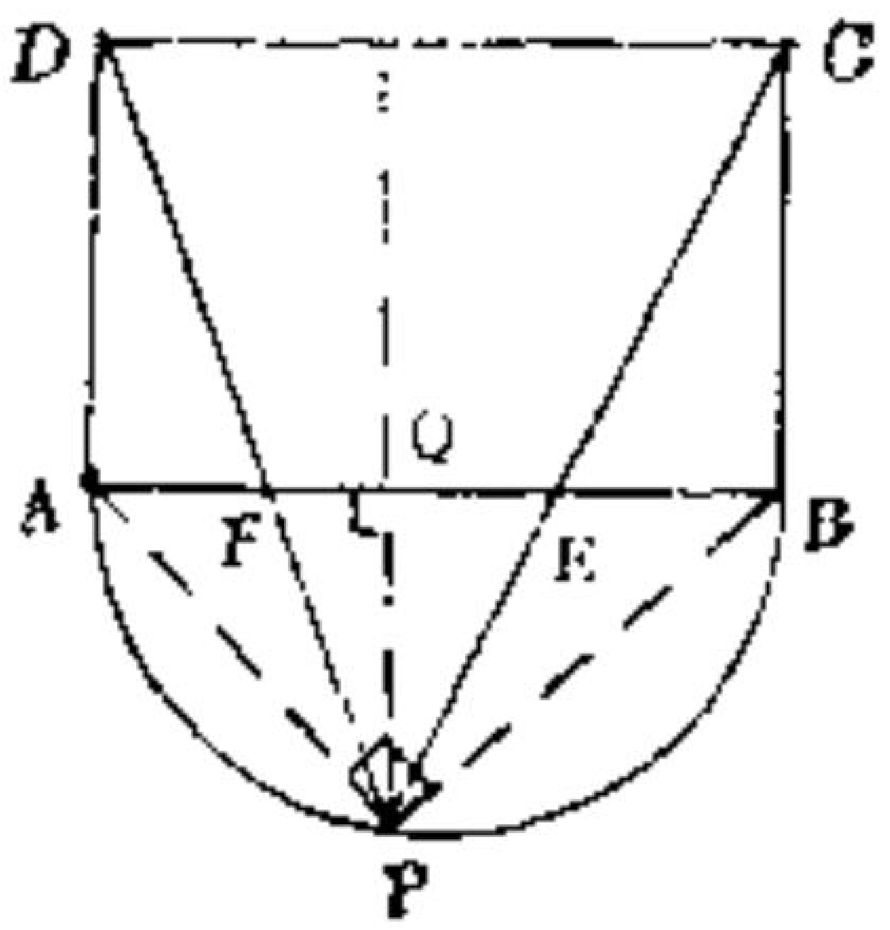


图18—25

$$\therefore \quad AE^2 + BF^2 = (AQ + QE)^2 + (FQ + QB)^2$$
$$= QA^2 + QB^2 + QE^2 + QF^2 + 2(QA \cdot QE + QB \cdot QF)$$
$$= QA^2 + QB^2 + \frac{QB^2 \cdot QP^2 + QA^2 \cdot QP^2}{(QP + BC)^2}$$
$$+ 2\left(QA \cdot \frac{QB \cdot QP}{QP + BC} + QB \cdot \frac{QA \cdot QP}{QP + BC}\right)$$
$$= QA^2 + QB^2 + \frac{QA \cdot QB(QB^2 + QA^2)}{(QP + BC)^2} + \frac{4QA \cdot QB \cdot QP}{QP + BC}$$
$$= QA^2 + QB^2 + \frac{QA \cdot QB}{QP + BC} \cdot \frac{QA^2 + QB^2 + 4QP^2 + 4QP \cdot BC}{QP + BC}$$
$$= QA^2 + QB^2 + \frac{QA \cdot QB}{QP + BC} \cdot$$
$$\cdot \frac{(QA + QB)^2 + 2(QP^2 + 2QP \cdot BC)}{QP + BC}$$

$$=QA^2+QB^2+\frac{QA\cdot QB}{QP+BC}\cdot\frac{2(BC^2+2BC\cdot QP+QP^2)}{QP+BC}$$

$$=QA^2+QB^2+2QA\cdot QB=(QA+QB)^2=AB^2.$$

复 习 题 三

1.若在$\triangle ABC$的外边作正三角形$\triangle BCA'$、$\triangle CAB'$、$\triangle ABC'$，则

（1）$AA'=BB'=CC'$；

（2）所作三个正三角形的中心是一个正三角形的顶点.

证明（1）：

$\triangle C'BC\cong\triangle ABA'$，

$\therefore\quad CC'=AA'$.

同理　$CC'=BB'$.

（2）：令G_1、G_2、G_3是所作三个正三角形的重心，

$\because\quad\triangle ABC'\backsim\triangle ACB'$，

$\therefore\quad\dfrac{AG_1}{AG_2}=\dfrac{AB}{AB'}$.

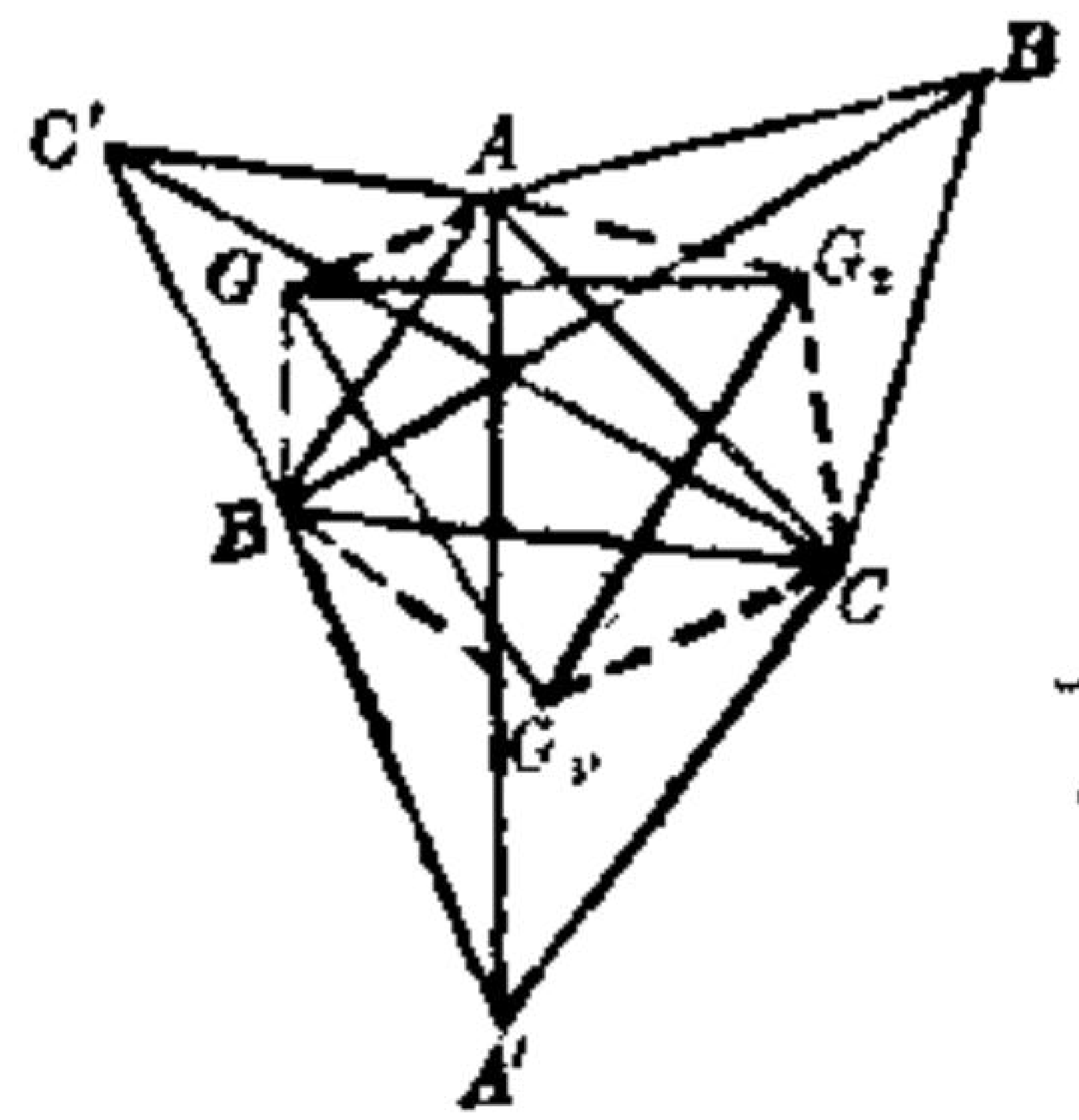
又　$\angle G_1AG_2=\angle BAB'$，

$\therefore\quad\triangle G_1AG_2\backsim\triangle BAB'$.

于是　$\dfrac{G_1G_2}{BB'}=\dfrac{AG_1}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，　$\therefore\quad G_1G_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}BB'$.

同理　$G_2G_3=\dfrac{1}{\sqrt{3}}AA'$，　$G_3G_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}CC'$.

$\therefore\quad\triangle G_1G_2G_3$为正三角形.



图复三—1

2.在上题中，若所作正三角形是向 $\triangle ABC$ 的内侧所作，则上题所述结论仍然成立.

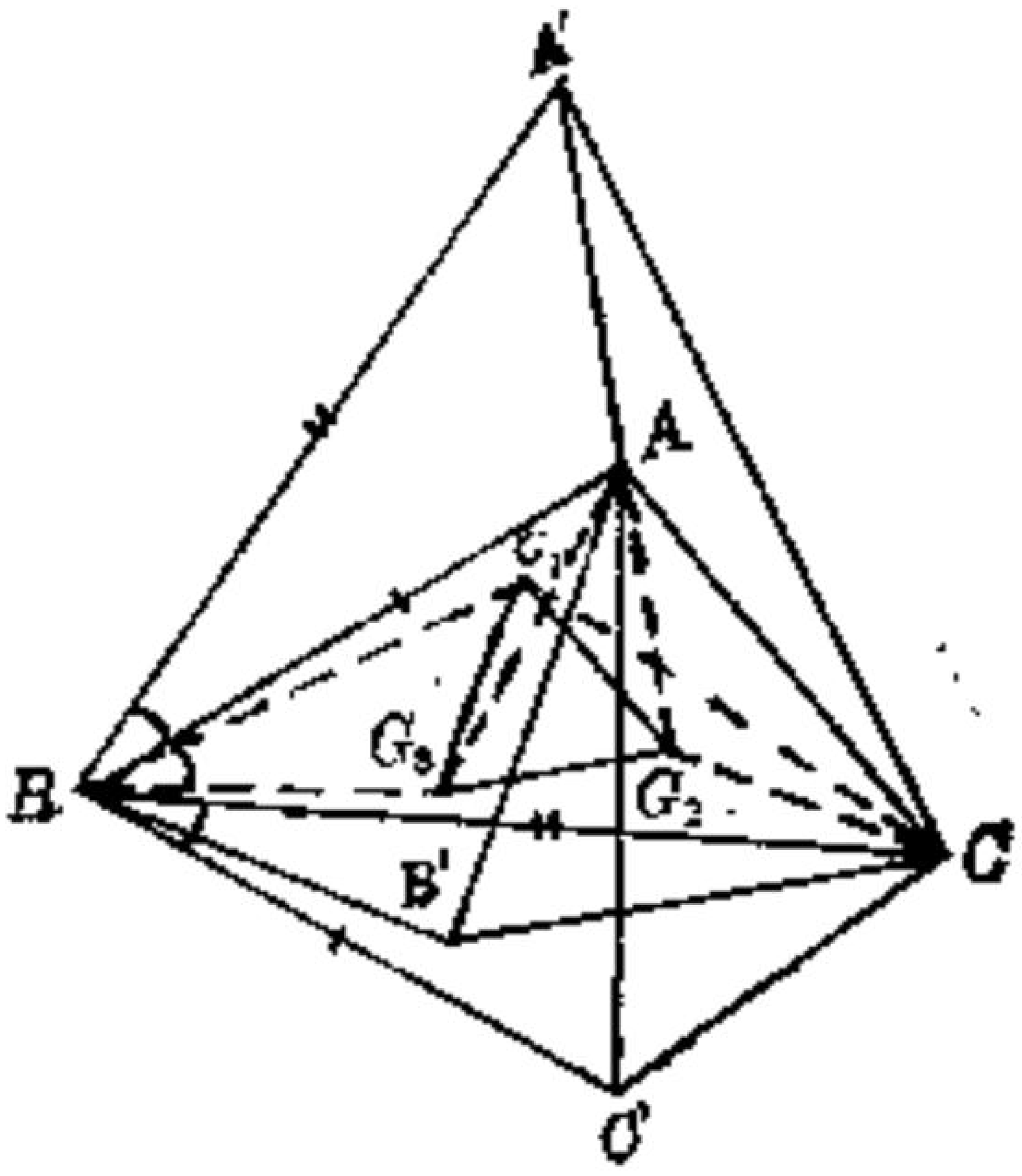
证明（1）：

$\triangle C'BC \cong \triangle ABA'$，

$\therefore \quad CC' = AA'$.

同理 $\quad CC' = BB'$.

（2）令 G_1、G_2、G_3 是所作三个正三角形的重心，



图复三—2

$\because \quad \dfrac{BG_1}{BA'} = \dfrac{BG_3}{BA} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

且 $\angle G_1BG_3 = 30° - \angle ABG_1$

$= \angle A'BA$，

$\therefore \quad \triangle G_1BG_3 \backsim \triangle A'BA$.

有 $\quad \dfrac{G_1G_3}{A'A} = \dfrac{BG_1}{BA'} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，

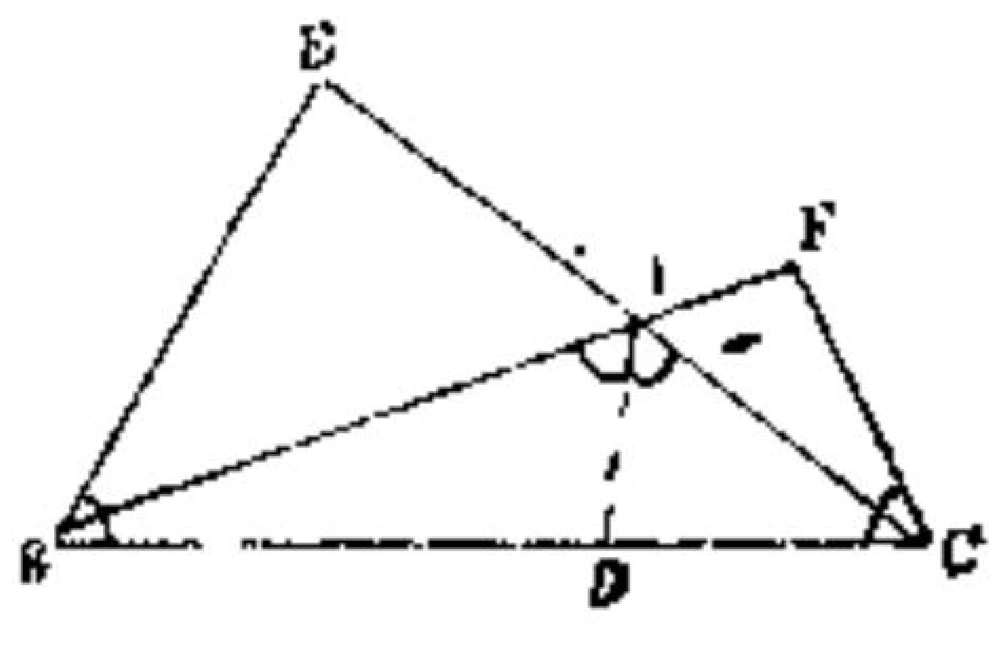
故 $G_1G_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}AA'$. 同理 $\quad G_1G_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}CC'$.

$G_2G_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}BB'$. $\quad \therefore \triangle G_1G_2G_3$ 为正三角形.

3.在 $\triangle ABC$ 中，E、F 各是半线 CA、BA 上的点，若 $\angle CBE = \angle BCF = \dfrac{1}{2}\angle BAC$，则 $CE = BF$.

证明：作 AD 平分 $\angle BAC$，

有 $\quad \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{DB}$，



图复三—3

且 A、D、B、E，A、D、C、F 均四点共圆.

$\therefore \quad CA \cdot CE = CD \cdot CB$，

$BA \cdot BF = BD \cdot BC$. 两式相除得

$$\frac{CA \cdot CE}{BA \cdot BF} = \frac{CD \cdot CB}{BD \cdot BC}, \quad \therefore \quad CE = BF.$$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，P 是 $\angle BAC$ 的平分线上任一点，设 BL 平行于 PC 而交 AC 于 L，CF 平行于 PB 而交 AB 于 F，求证：$CL = BF$.

证明：∵ $BL /\!/ PC$，

有 $\dfrac{CE}{HC} = \dfrac{PB}{HP}$. ①

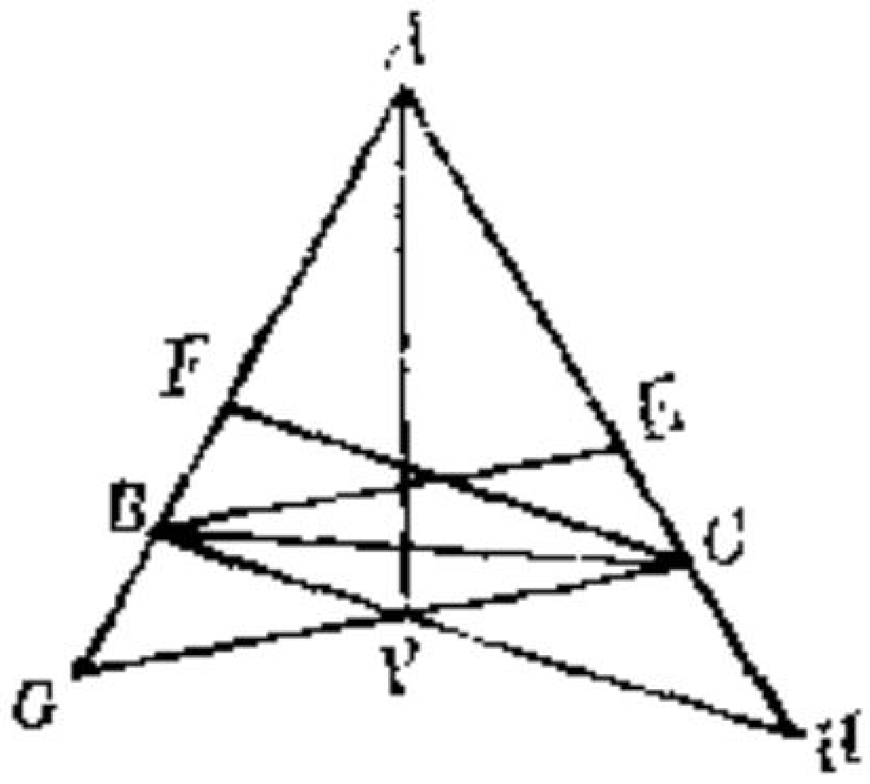
∵ $CF /\!/ HB$，

有 $\dfrac{BF}{HC} = \dfrac{BA}{HA}$. ②

在 $\triangle ABH$ 中，

有 $\dfrac{BA}{HA} = \dfrac{PB}{HP}$. ③

由①、②、③得 $CE = BF$.



图复三—4

5. 甲乙两圆交于 A、B 二点，且乙圆的中心在甲圆上，自甲圆上一点向乙圆引切线，切点是 C、D。求证：AB 平分 CD。

证明：设 PC' 交 CD 于 E，

则 $CE = ED$.

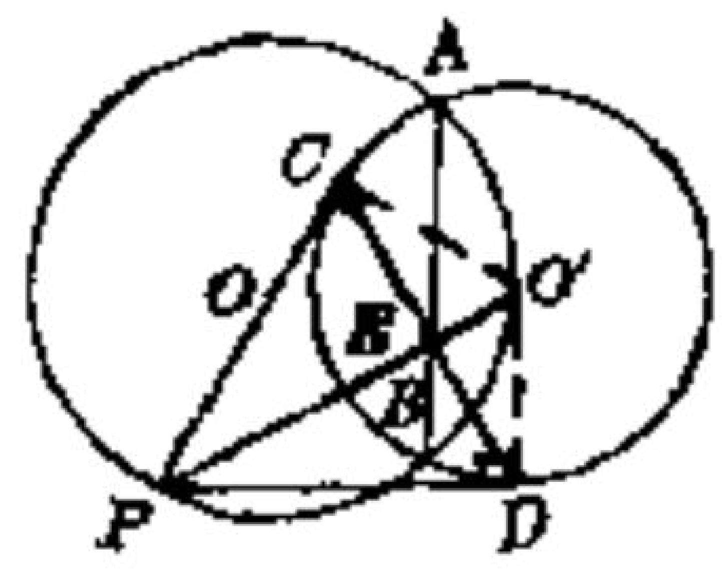
由 P、D、C'、C 四点共圆

得 $CE^2 = PE \cdot EO'$.

连 AE 并延长使交 $\odot O$ 于 B'，

则 $AE \cdot EB' = PE \cdot EC'$，故 $AE \cdot EB' = CE^2$，

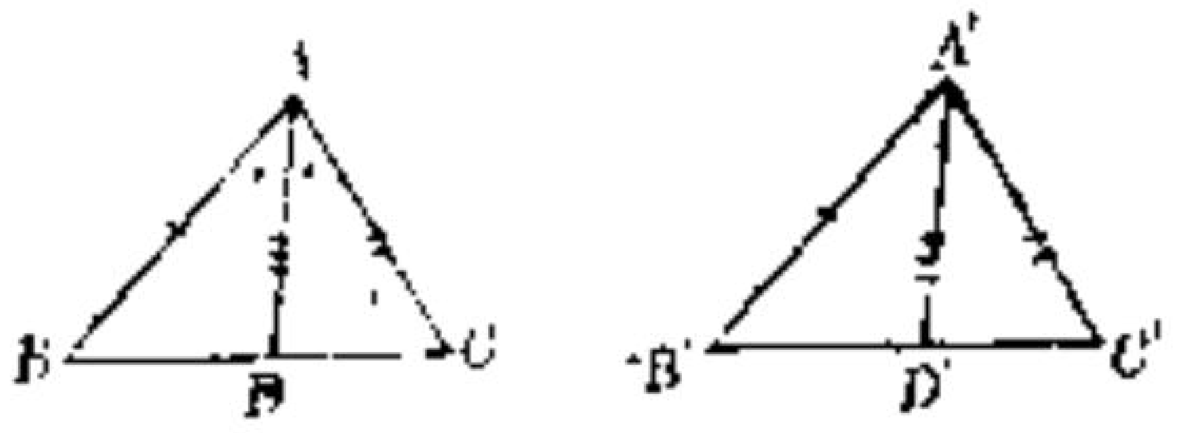
∴ B' 点又在 $\odot C'$ 上，故 B' 点是 $\odot O$ 与 $\odot C'$ 的交点，即 AB' 与 AB 重合. ∴ AB 平分 CD.



图复三—5

6.若两三角形有两双对应边各相等，而夹角的平分线亦相等，则两三角形合同.

证明：由习题四第24题得：



图复三—6

$AD^2=AB\cdot AC-DB\cdot DC$，

$A'D'^2=A'B'\cdot A'C'-D'B'\cdot D'C'$.

两式相减得：$D'B'\cdot D'C'-DB\cdot DC=0$ ①

又 $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$，由合比得 $\frac{AB+AC}{AC}=\frac{DB+DC}{DC}$

及 $\frac{AB}{AB+AC}=\frac{DB}{DB+DC}$.

即 $DC=\frac{AC}{AB+AC}\cdot BC$， $DB=\frac{AB}{AB+AC}\cdot BC$.

两式相乘得 $DB\cdot DC=\frac{AB\cdot AC}{(AB+AC)^2}\cdot BC^2$ ②

同理 $D'B'\cdot D'C'=\frac{A'B'\cdot A'C'}{(A'B'+A'C')^2}\cdot B'C'^2$. ③

在③-②时，注意到 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$ 与①得

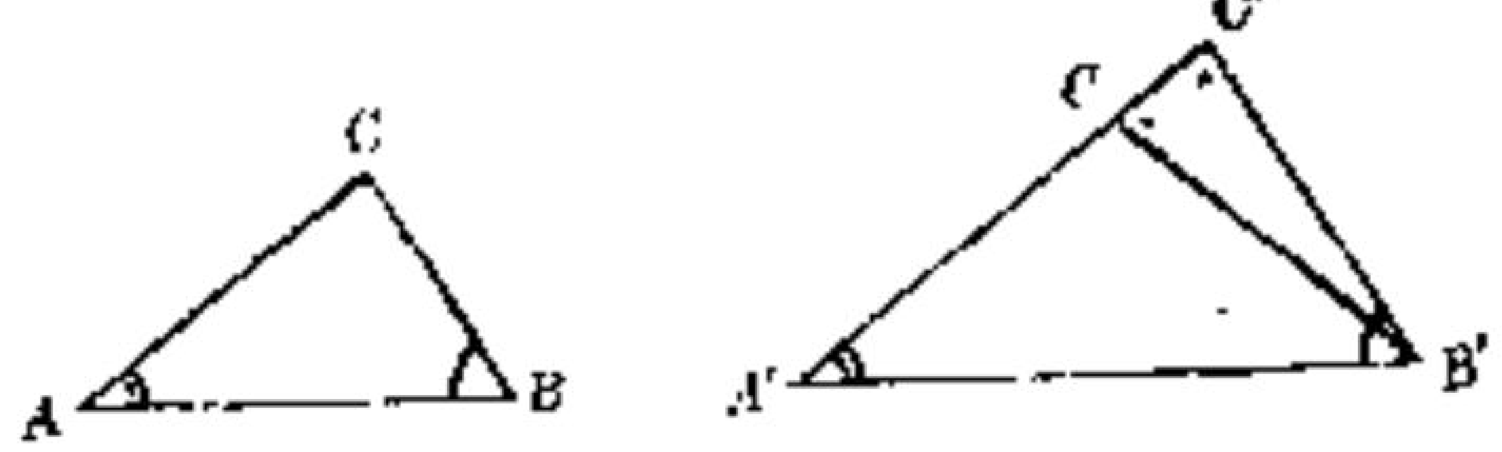
$D'B'\cdot D'C'-DB\cdot DC=\frac{AB\cdot AC}{(AB+AC)^2}(B'C'^2-BC^2)$

$=0$.

∴ $B'C'=BC$ 故两三角形合同.

7.若两三角形的第一双对应角相等，第二双对应角的夹边成比例，则第三双对应角或相等或互补.

证明：对于第二双夹边成比例的对应角有两种可能，或者相等，或者不等，在相等时则



图复三—7

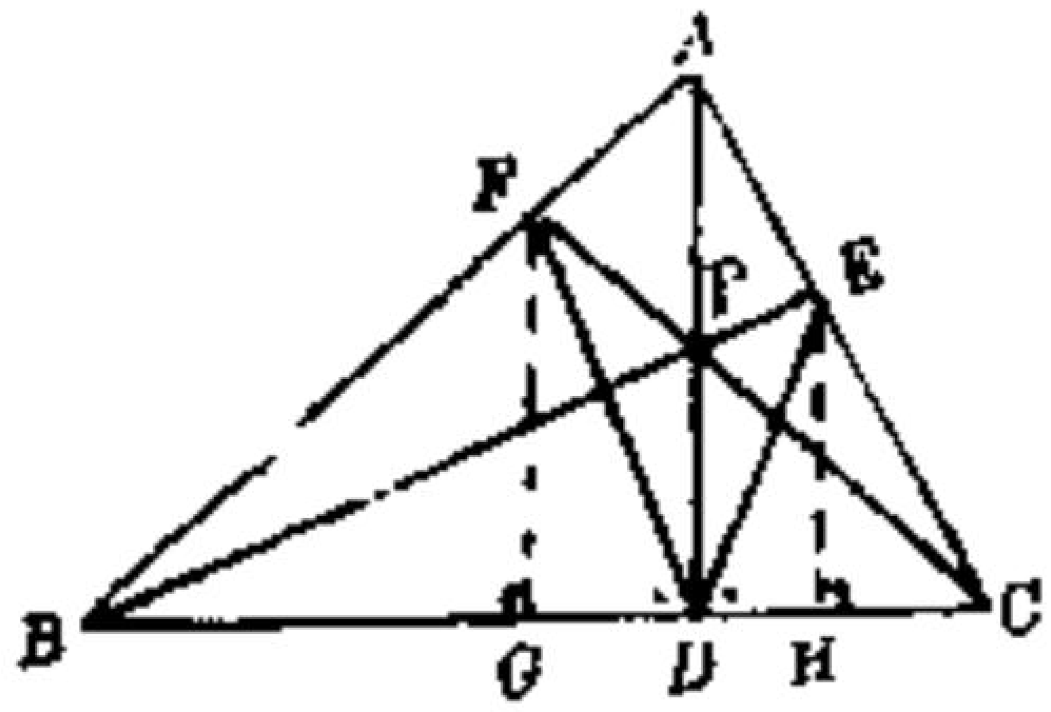
第三双对应角亦相等，如由 $\angle B=\angle A'B'C'$，有 $\angle C=\angle A'C'B'$．在不等时．则必有 $B'C''=B'C'$．即 $\triangle B'C'C''$ 为等腰三角形．在此场合下有 $\angle A'C''B'+A'C'B'=180°$．

8．若两三角形第一双对应角相等，第二双对应角互补，则第三双对应角的夹边成比例．

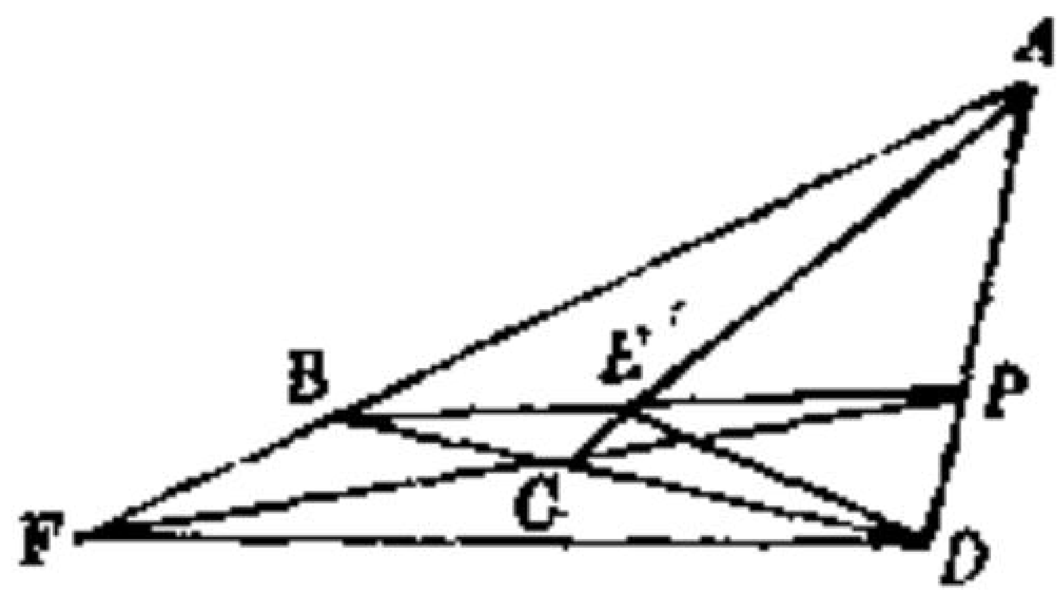
证明：在上题图中，有 $\angle C$ 与 $\angle A'C''B'$ 互补，故在 $A'C''$ 或其延长线上总可找到一点 C'，使 $\angle C=\angle A'C'B'$，故 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$．$\therefore$ $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$．

由于 $\triangle B'C'C''$ 是等腰三角形，故有 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C''}$．

9．设 AD 是 $\triangle ABC$ 的高线，P 是 AD 上任一点．连 BP、CP 各交 AC、AB 于 E、F．求证：$\angle ADE$ 与 $\angle ADF$ 或相等或互补．



图复三—9（1）



图复三—9（2）

证明：当 E、F 在 AD 异侧时，由塞瓦定理有：

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}=-1.$$

因 $FG\parallel AD\parallel EH$，上式左端可变为：

$$\frac{\overline{GD}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{HC}}{\overline{HD}}=\frac{\overline{GD}}{\overline{HD}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{HC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{GD}}{\overline{HD}}\cdot\frac{AD}{FG}\cdot\frac{\overline{EH}}{AD}$$

$$=\frac{\overline{GD}}{\overline{HD}}\cdot\frac{\overline{EH}}{\overline{FG}}=-1,\quad 即\quad \frac{GD}{FG}=\frac{DH}{EH}.$$

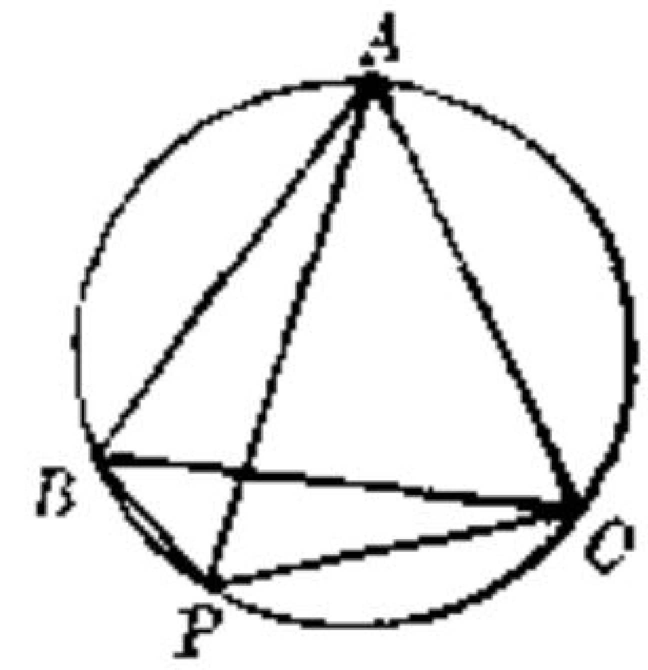
∴ 直角三角形 $GDF \backsim$ 直角三角形 HDE.

故有 $\angle GDF = \angle HDE$,

∴ $\angle ADE = \angle ADF$.

当 E、F 两点在 AD 的同侧时，有 $\angle ADE$ 与 $\angle ADF$ 互补.

10. 试用托列迷定理证明：正三角形外接圆上任一点至三顶点的连结线，其长者等于其余二者的和.



图复三—10

证明：

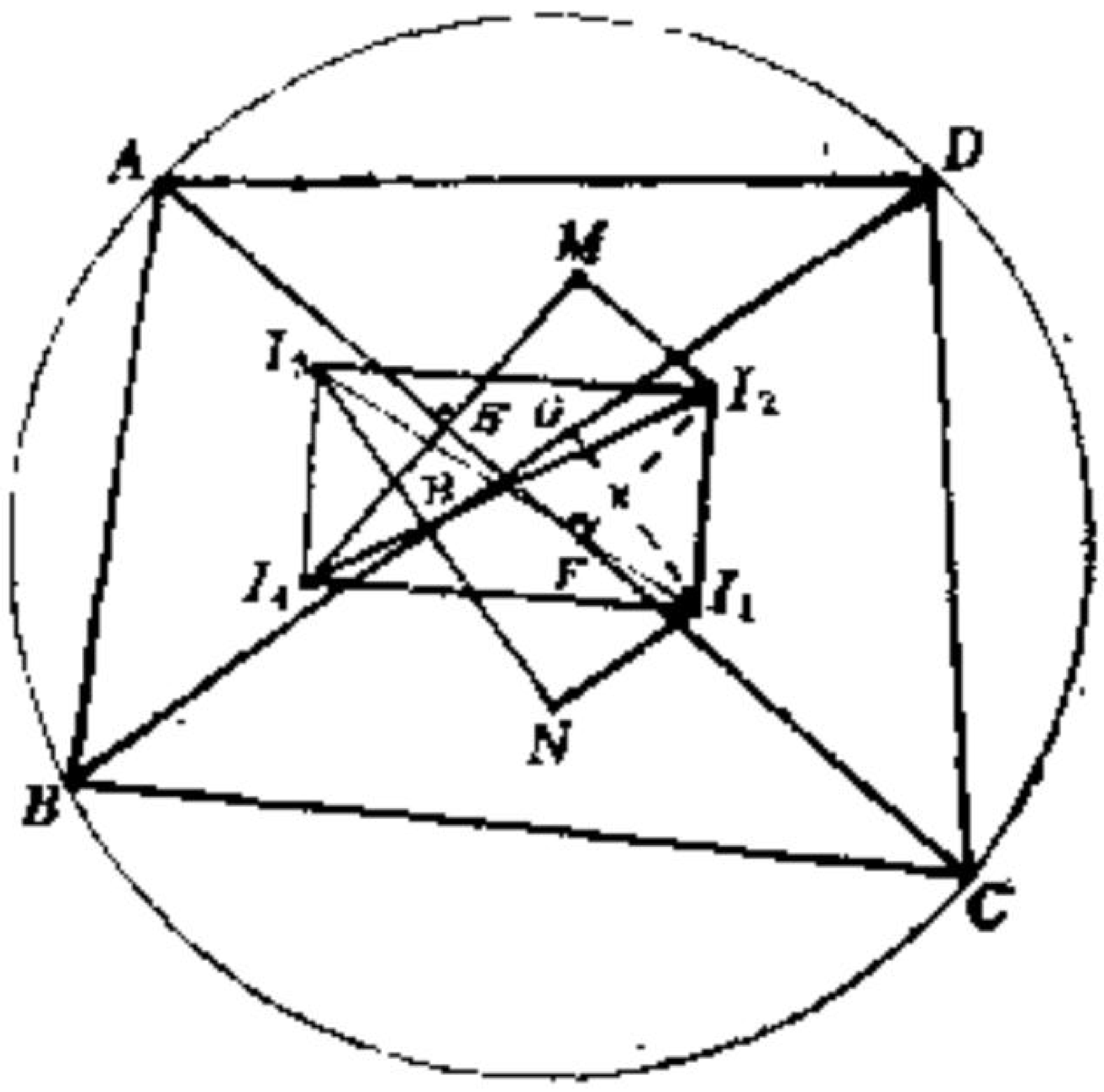
∵ $PA \cdot BC = PB \cdot CA + PC \cdot AB$,

且 $AB = BC = CA$,

∴ $PA = PB + PC$.

11. 圆内接凸四边形被一条对角线所分两三角形的内切圆半径之和，等于它被另一条对角线所分两三角形的内切圆半径之和.

证明：令 I_1、I_2、I_3、I_4 各是 $\triangle BCD$、$\triangle CDA$、$\triangle DAB$、$\triangle ABC$ 的内切圆圆心，由习题十三第14题得 $I_1I_2I_3I_4$ 为矩形.



图复三—11

又 $\odot I_1$、$\odot I_3$ 切 BD 于 G、H；$\odot I_2$、$\odot I_4$ 切 AC 于 F、E。由复习题一第 13 题有：

$$AE = \frac{1}{2}(AB + AC - BC),$$

$$CF = \frac{1}{2}(CD + AC - AD),$$

∴ $EF=AC-(AE+CF)=\frac{1}{2}\left|AD+BC-AB-CD\right|$

同理 $GH=BD-(BH+DG)$

$$=\frac{1}{2}\left|AD+BC-AB-CD\right|.$$

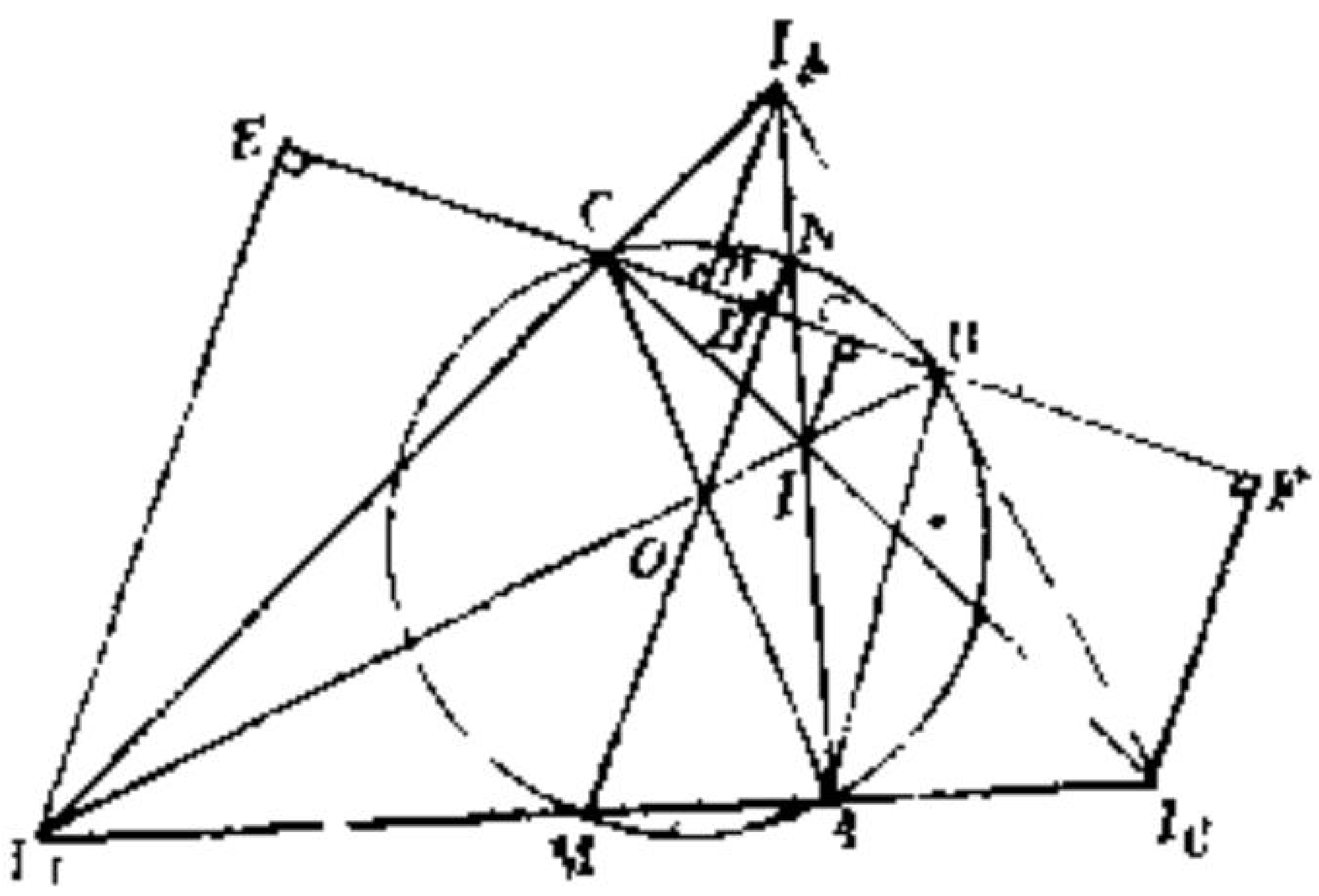
于是 $EF=GH$，　　即 $MI_2=NI_1$．

∴ $\triangle I_1I_3N\cong\triangle I_2I_4M$．有 $I_3N=I_4M$．

故　$r_1+r_3=r_2+r_4$．

12．三角形三个旁切圆的半径和等于内切圆半径与四倍外接圆半径的和．

证明：设I_A、I_B、I_C、I 为 $\triangle ABC$ 的三个旁心及内心，其有关半径为 r_A、r_B、r_C、r；O 为 $\triangle ABC$ 的外心，其半径为 R，M、N 为 I_BI_C，II_A 的中点．D、E、F、G 为 I_A、I_B、I_C、I 在 BC 上的射影．故 I_A、I_B、I_C、I 构成一个垂心组 $\triangle ABC$ 是垂心组的垂足三角形．由§41例题44，知 A、B、C、M、N 共圆．



图复三—12

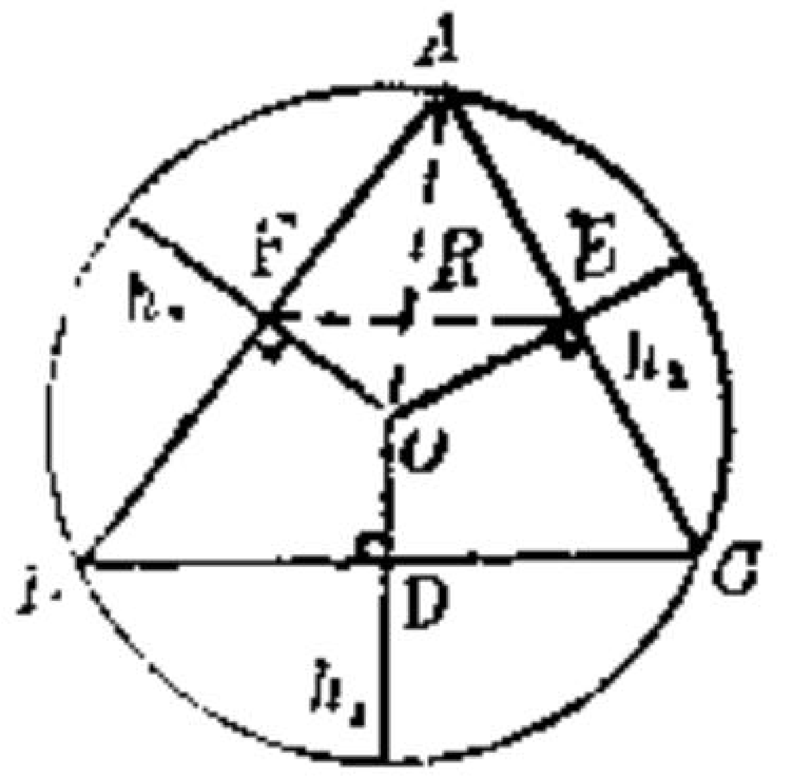
∴　MN 是 $\bigcirc ABC$ 的直径．由复习题一第18题，知 $NC=NB=NI=NI_1$，　∴　$MN\perp BC$．　令 MN 交 BC 于 H，有 $EI_B+FI_C=2MH$，$DI_A-GI=2NH$．

两式相加得：$r_A+r_B+r_C-r=2(MH+HN)=2MN=4R$．

∴　$r_A+r_B+r_C=r+4R$．

13.从圆的内部挖去一个内接三角形,造成三个弓形，这三个弓形的高之和等于圆的直径与三角形内切圆半径之差.

弓形的弧的中点至弦的垂线，叫做弓形的高.



图复三—13

证明：令 h_1、h_2、h_3 为三个弓形的高，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，三边为 a、b、c．且 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$．

∵ A、F、O、E四点共圆．由托列迷定理，有 $R\cdot\frac{a}{2}=\frac{b}{2}\cdot OF+\frac{c}{2}\cdot OE$．

同理 $R\cdot\frac{b}{2}=\frac{c}{2}\cdot OD+\frac{a}{2}\cdot OF$,

$$R\cdot\frac{c}{2}=\frac{a}{2}\cdot OE+\frac{b}{2}\cdot OD.$$

三式相加得

$$RS=\frac{a}{2}(OE+OF)+\frac{b}{2}(OD+OF)+\frac{c}{2}(OD+OE).$$

又 $rs=\frac{a}{2}\cdot OD+\frac{b}{2}\cdot OE+\frac{c}{2}\cdot OF$,

故 $(R+r)s=\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)(OD+OE+OF)$

$$=s(3R-h_1-h_2-h_3).$$

∴ $h_1+h_2+h_3=2R-r$.

14.非钝角三角形的外心至三边的距离和等于外接圆与内切圆的半径和.

证明，由上题知，$OD+OE+OF=R+r$.

15.非钝角三角形的垂心至三顶点的距离和，等于外接圆与内切圆的直径和.

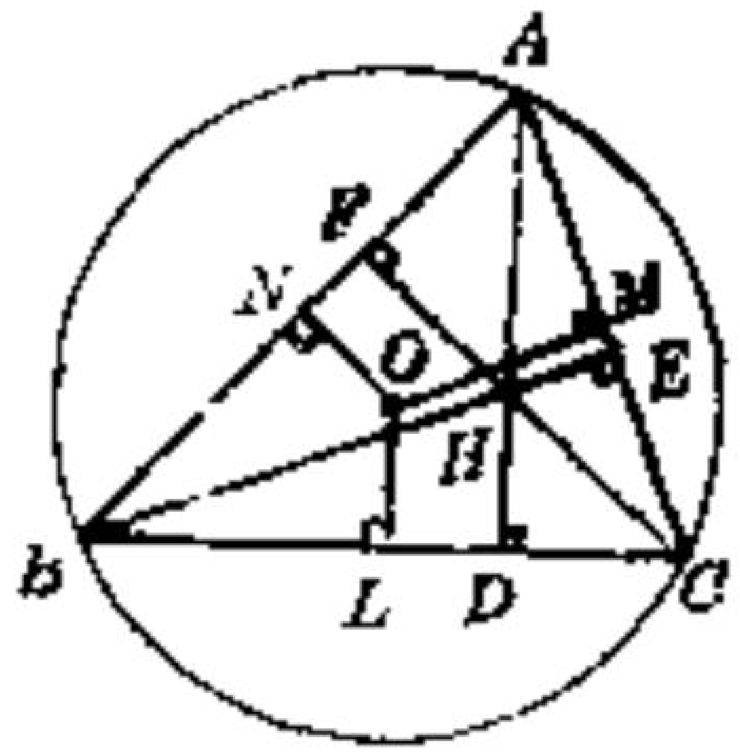
证明：$AH=2\cdot OL$，

$BH=2\cdot OM$，$CH=2\cdot ON$.

$\therefore\quad AH+BH+CH$

$=2(OL+OM+ON)$

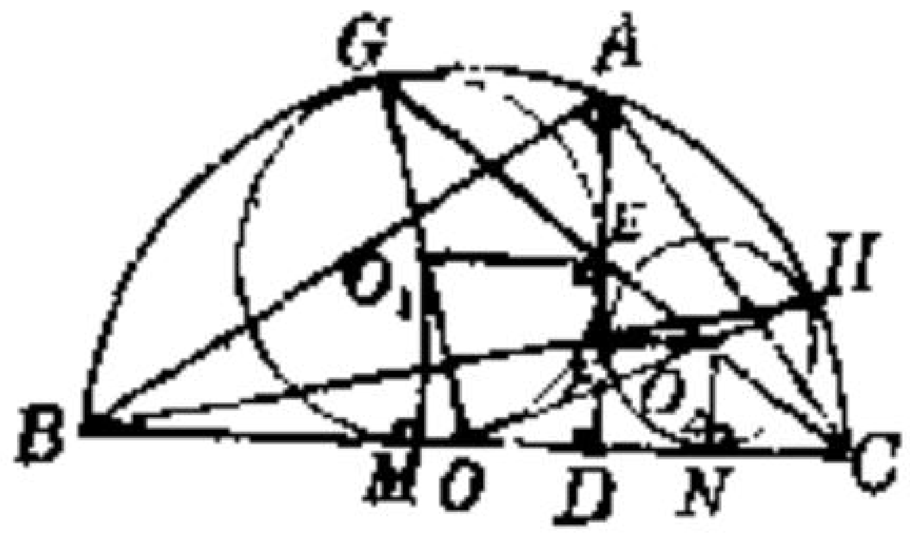
$=2(R+r)$.



图复三—15

16．在半圆形 BAC 的弧上取一点 A，自 A 向直径 BC 引垂线把半圆分为两个图形．试证：这两个图形的内切圆之半径和等于 $\triangle ABC$ 的内切圆直径．

证明：令 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 分别切 AD、BC、$\overparen{BAC}$ 于 E、M、G 和 F、N、H，



图复三—16

有 $\triangle GO_1E\backsim\triangle GOC$，

$\triangle HO_2F\backsim\triangle HOB$.

$\therefore\quad G$、E、C 与 H、F、B 均三点共线．

由 C、H、F、D 四点共圆，

有 $BN^2=BF\cdot BH=BD\cdot BC=BA^2$

同理 $CM^2=AC^2$.

故有 $BN+CM=AB+AC$.

即 $(BD+DN)+(CD+DM)=r_1+r_2+BC$

$=AB+AC$，

$\therefore\quad r_1+r_2=AB+AC-BC$.

令 r 为直角三角形 ABC 内切圆的半径，由习题三第8题得 $r_1+r_2=2r$.

17．设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，I 是内心，而内切圆的直径 PQ 垂直于 OI，求证：$\triangle OPQ$ 的周长等于 $\triangle ABC$ 的外接圆直径．

证明：令 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径，r 为内切圆半径．由§49例题55知，

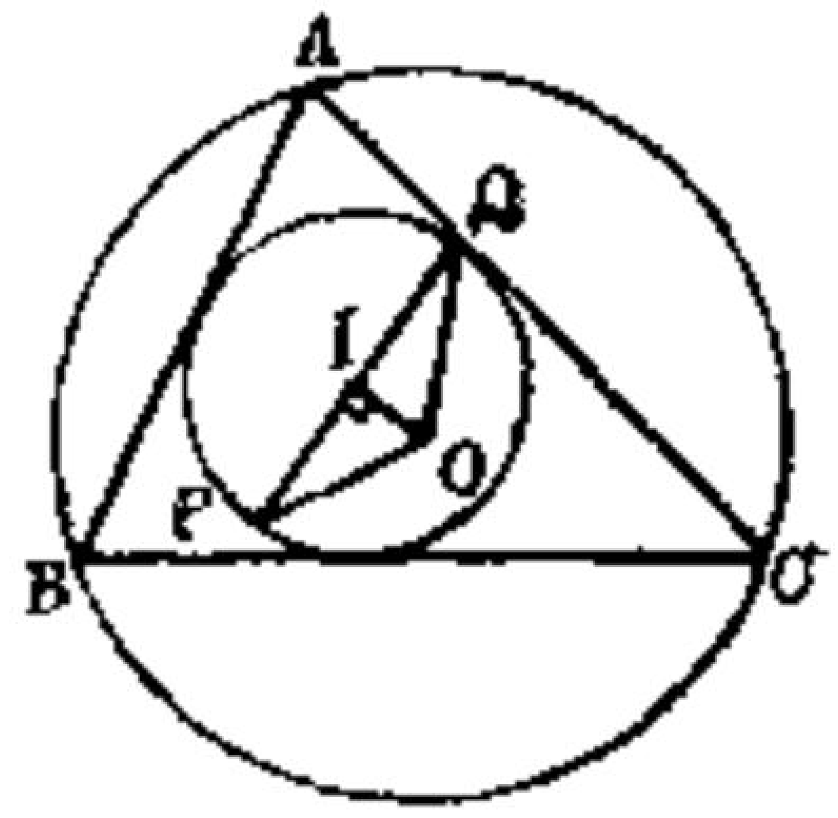
$OI^2=R^2-2Rr$，

$OP^2=r^2+(R^2-2Rr)=(R-r)^2$．

于是 $OP=OQ=R-r$，

$\therefore\quad OP+OQ+PQ=2(R-r)+2r$

$=2R$．



图复三—17

18．设分正方形的每边为四等分，而以两头两段为直径各作圆，求证所作八圆均外切于正方形的内切圆．

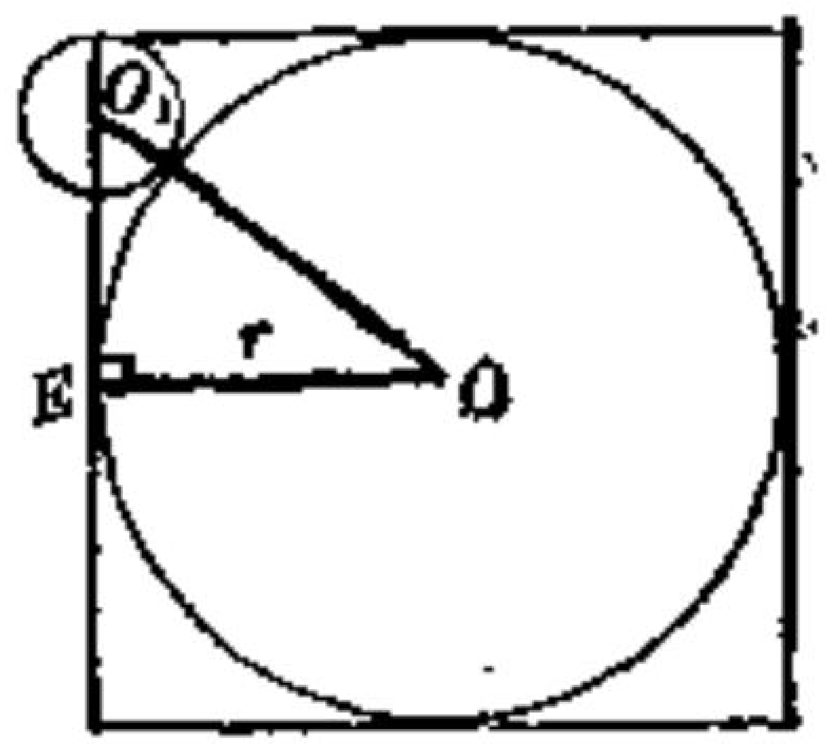
证明：设正方形边长为 a，

$\because\quad OO_1{}^2=OE^2+O_1E^2$

$=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{3}{8}a\right)^2=\frac{25}{64}a^2$，

$\therefore\quad OO_1=\frac{5}{8}a$

又 $r+r_1=\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}a=\frac{5}{8}a$



图复三—18

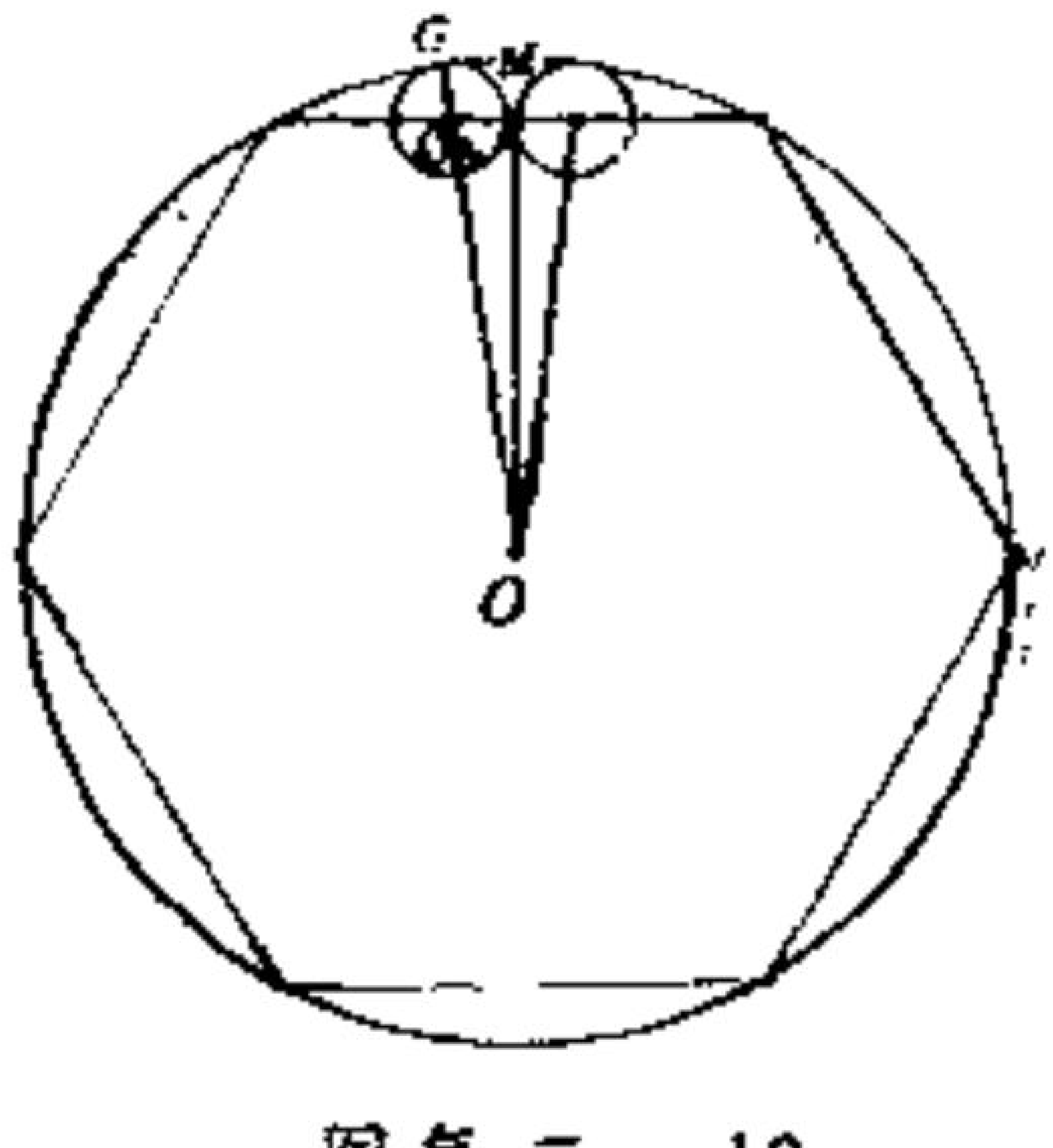
19．设分正六边形的每边为四等分，而以中间两段为直径各作圆，求证：所作十二圆均内切于正六边形的外接圆．

证明：正六边形边长为 R，且 R 为其外接圆半径，其边心距为：$OM=\frac{\sqrt{3}}{2}R$．

$\therefore\quad OO_1{}^2=OM^2+O_1M^2$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2+\left(\frac{1}{8}R\right)^2=\frac{49}{64}R^2$，

故 $OO_1=\frac{7}{8}R$

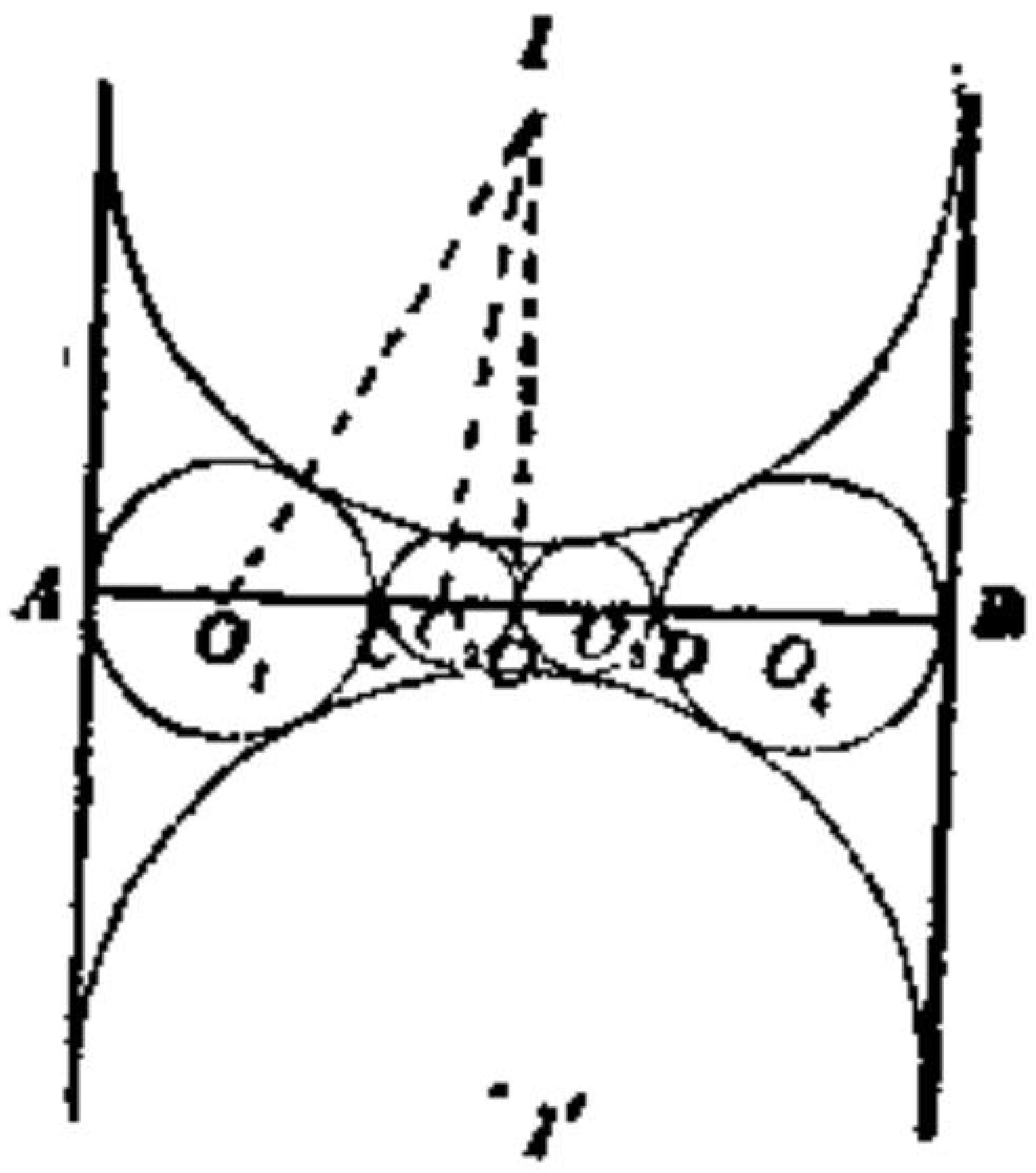


图复三—19

又$OO_1 = OG - O_1G = R - \frac{1}{8}R = \frac{7}{8}R$，故相切

20．设O是线段AB的中点，C、D是三等分点：$AC=CD=DB$．今以AC、CO、OD、DB为直径作圆，又过A、B作AB的垂线，求证：所作四圆、两线同切于两圆．

证明：若存在此两圆，则该两圆$\odot I$、$\odot I'$的半径必为$\frac{1}{2}AB$．令AB长为$12a$，则$\odot I$的半径为$6a$，当I、I'与AB的距离IO为$4\sqrt{3}a$时，有：



图复三—20

$$IO_1^2 = IO^2 + O_1O^2$$
$$= 48a^2 + 16a^2 = 64a^2,$$
$$IO_2^2 = IO^2 + O_2O^2$$
$$= 48a^2 + a^2 = 49a^2$$

$\therefore \quad IO_1 = 8a,\ IO_2 = 7a.$

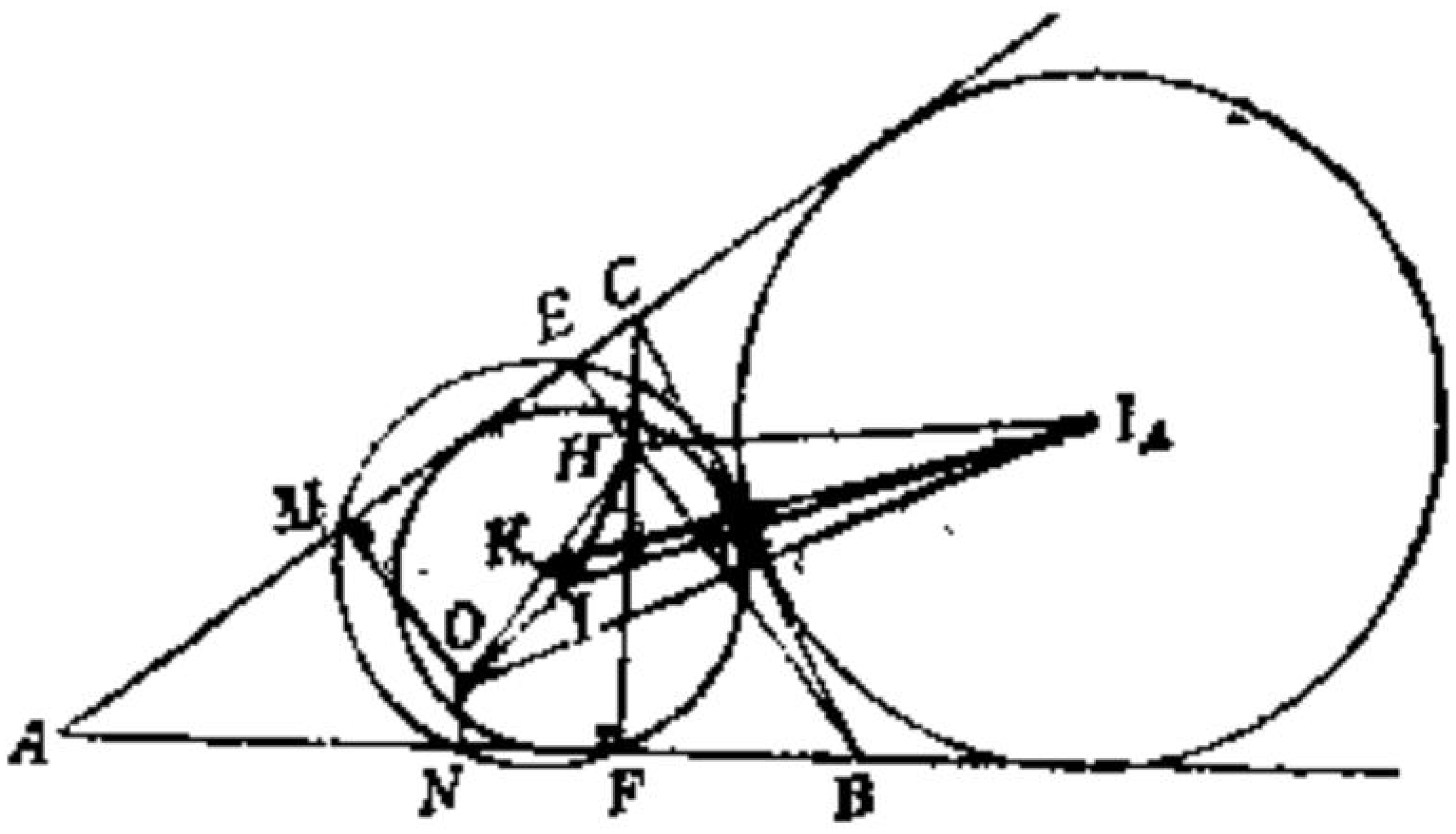
故$\odot I$、$\odot I'$满足所需要条件．

21．三角形的九点圆内切于内切圆而外切于三旁切圆．

证明：设K是九点圆心，H是垂心，O是外心，I是内切圆心，I_A是旁切圆心．

由P184推论知H、K、O三点共线且K是HO的中点，则IK是$\triangle IHO$的中线．

$\therefore \quad 2IK^2 = IO^2 + IH^2 - \frac{1}{2}OH^2$



图复三—21

由习题18第24题知

$$IH^2=4R^2+2r^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

$$OH^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$$

又　$IO^2=R^2-2Rr$,

$$\therefore\quad 2IK^2=(R^2-2Rr)+4R^2+2r^2-\frac{9}{2}R^2$$

$$=\frac{1}{2}R^2-2Rr+2r^2,$$

即　$IK^2=(\frac{R}{2}-r)^2$

$\because$ $R/2>r$ 且 $R/2$ 为九点圆半径令为 r',

于是 $IK=r'-r$，故相内切.

同理，$2I_AK^2=I_AO^2+I_AH^2-\frac{1}{2}OH^2$

$$=(R^2+2Rr_A)+4R^2+2r_A{}^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

$$-\frac{1}{2}\left[9R^2-(a^2+b^2+c^2)\right]=\frac{1}{2}R^2+2Rr_A+2r_A{}^2,$$

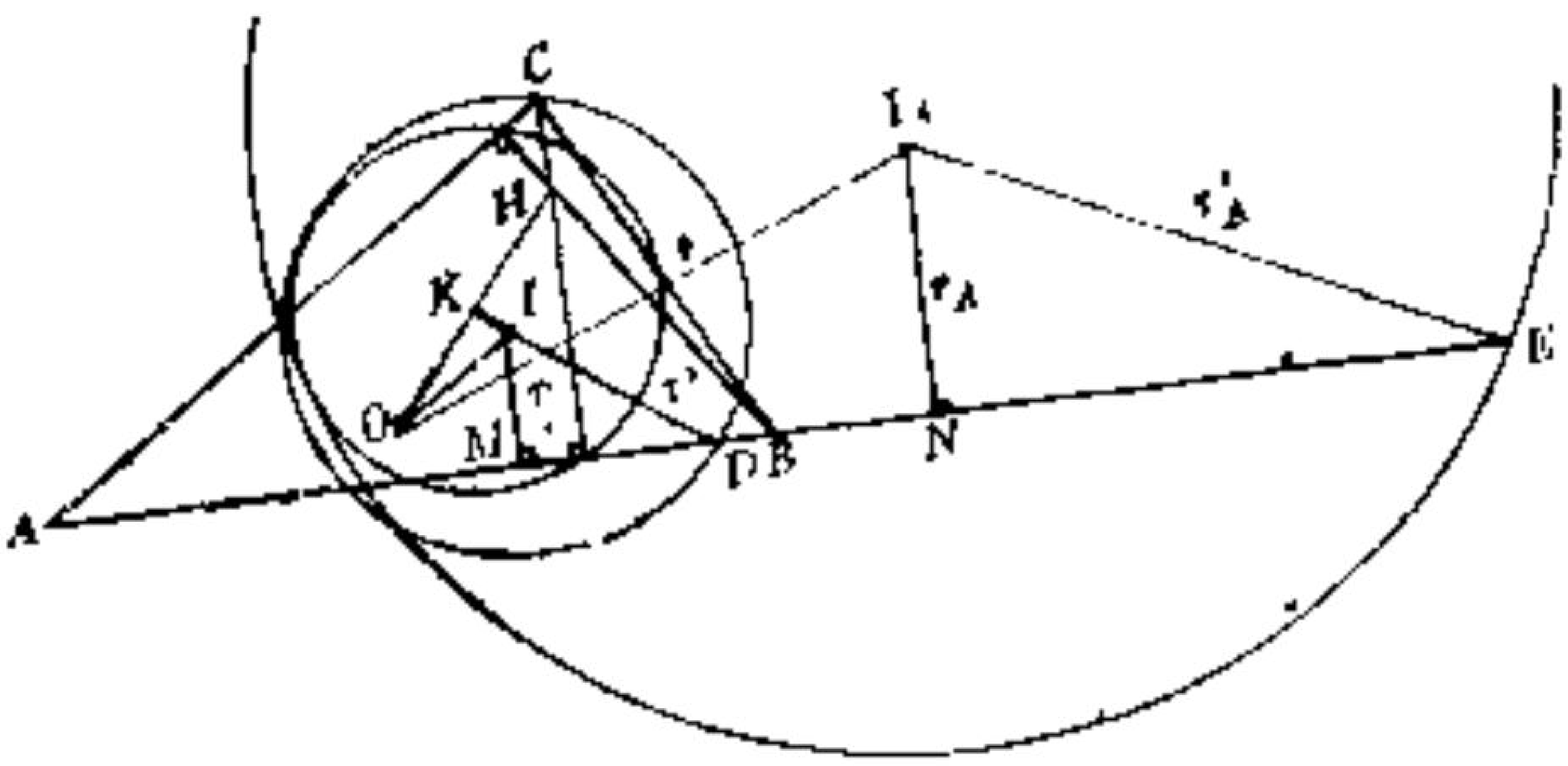
即　$I_AK^2=\left(\frac{R}{2}+r_A\right)^2$,　　$\therefore\quad I_AK=r'+r_A$

故$\odot K$与$\odot I_A$互相外切.

22．以三角形的内心及三旁心各作圆，若各在每边（所在直线）上所截的弦分别等于其圆心至外心的距离之二倍，则

（1）所作四圆均内切于九点圆；

（2）所作四圆的半径和等于外接圆半径的八倍．



图复三—22

证明（1）：令$\triangle ABC$的外接圆半径为R，则九点圆$\odot K$的半径为$\frac{1}{2}R$，又O为外心　H为垂心．I为内心，r为内切圆半径，以I为圆心所作圆的半径为r'；r_A'为对$\angle A$的旁切圆半径，其旁心为I_A．以I_A为圆心所作圆的半径为r_A'，又M、N为所作两圆$\odot I$、$\odot I_A$在AB所截弦的中点，则有以下等式：

$MD=OI$，$r'^2=r^2+OI^2=r^2+R^2-2Rr=(R-r)^2$

于是$r'=R-r$，令九点圆半径为r_0，

则　$r'-r_0=R-r-\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}R-r$．

又由上题知，　$IK=\frac{1}{2}R-r$，∴　$\odot K$内切于$\odot I$．

∵　$r_A'^2=r_A^2+NE^2=r_A^2+OI_A^2=r_A^2+R^2+2Rr_A$

$=(R+r_A)^2$，

$\therefore\quad r_A' = R + r_A$

于是 $r_A' - r_0 = R + r_A - \frac{1}{2}R = \frac{R}{2} + r_A$.

由上题知，$I_AK = \frac{1}{2}R - r_A$，$\therefore$ $\odot K$ 内切于$\odot I_A$.

（2）：$\because$ $r' = R - r$，$r_A' = R + r_A$，$r_B' = R + r_B$，
$r_C' = R + r_C$.

$\therefore$ $r' + r_A' + r_B' + r_C' = 4R + r_A + r_B + r_C - r$

由12题有 $r_A + r_B + r_C - r = 4R$，

$\therefore$ $r' + r_A' + r_B' + r_C' = 8R$.

23．一三角形中，高线越长，它的中点离垂心越远.

证明：令$\angle A > \angle B > \angle C$

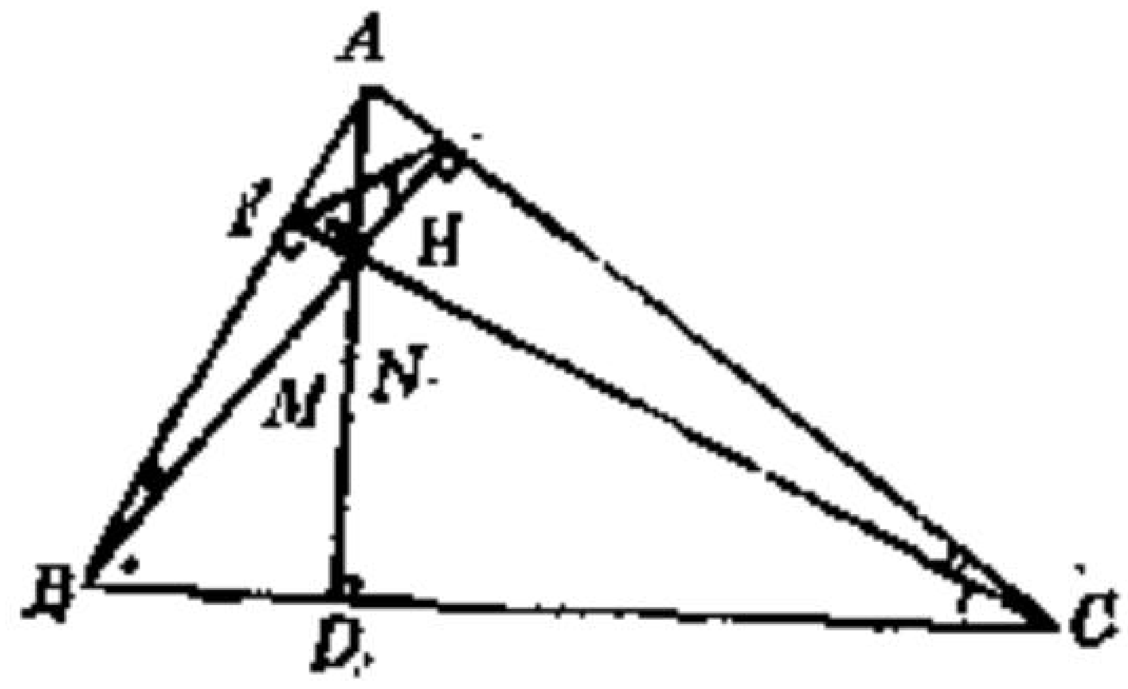
则 $BC > CA > AB$

由习题十二第13题得

$AD < BE < CF$

令 L、M、N 为 CF、BE、AD 的中点，则

$AN < EM < FL$，　①



图复三—23

$\because$ B、C、E、F 四点共圆，且$\angle B > \angle C$，

$\therefore$ $\angle EFH > \angle FEH$. 故 $AH > EH > FH$　②

比较①、②得　$NH < MH < LH$

24．一三角形中，平分线越长，它的中点离内心越远.

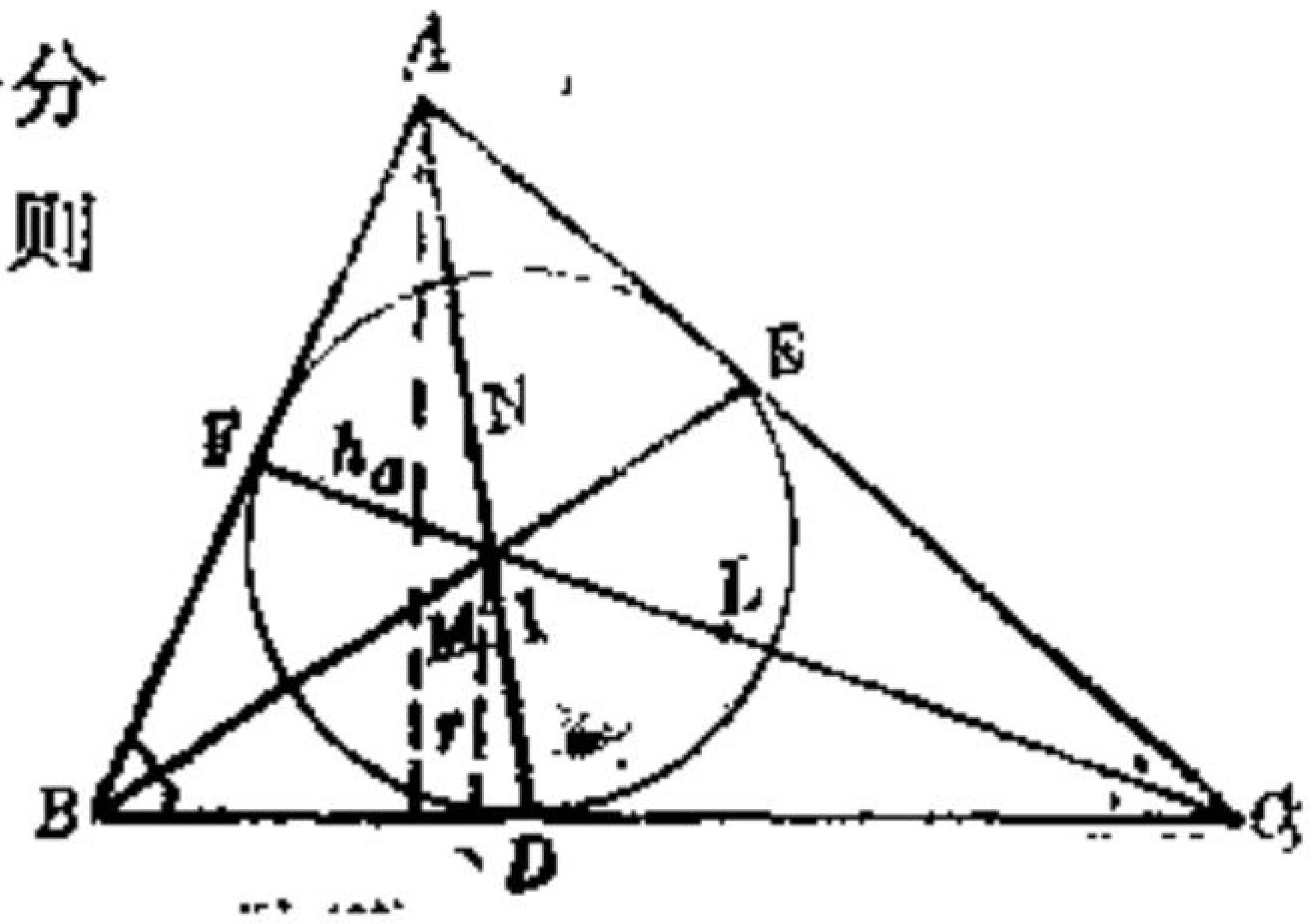
证明：令 L、M、N 为平分角线 CF、BE、AD 的中点，则

$2NI = AD - 2ID$，

$2MI = BE - 2IE$，

$2LI = CF - 2IF$.

$\because$ $\frac{ID}{AD} = \frac{r}{h_a}$，$\therefore$ $\frac{2ID}{AD} = \frac{2r}{h_a}$



图复三—24

同理，$\frac{2IE}{BE}=\frac{2r}{h_b}$ ∴ $\frac{2IF}{CF}=\frac{2r}{h_c}$

令　$BC>CA>AB$，由例题26，则 $AD<BE<CF$，

及　$h_a>h_b>h_c$，∴　$\frac{2r}{h_a}>\frac{2r}{h_b}>\frac{2r}{h_c}$

故 $2NI=AD(1-\frac{2ID}{AD})=AD(1-\frac{2r}{h_a})$，

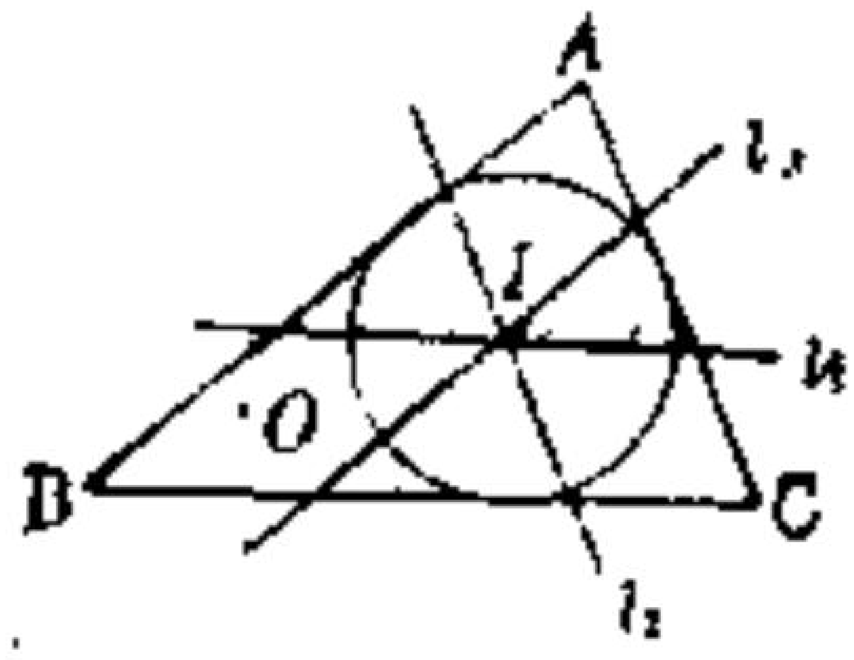
$2MI=BE(1-\frac{2IE}{BE})=BE(1-\frac{2r}{h_b})$，

$2LI=CF(1-\frac{2IF}{CF})=CF(1-\frac{2r}{h_c})$.

于是 $2NI<2MI<2LI$，∴　$NI<MI<LI$

25．与三角形三边所在直线都相会的圆，以内切圆为最小．

证明：⊙I 是△ABC 的内切圆，当O 与 I 重合时，为同心圆，显然有⊙I 的半径最短．



图复三—25

过 I 作三线分别平行于△ABC的三边，当 O 点不与 I 重合时，则总存在一条直线，使 O 点与此条直线所平行的边分在该直线的两侧，例如在如图的场合，对于 l_2 来说，O 点与 AC 在 l_2 的异侧，故 O 点到 AC 的距离大于l_2上的点 I 到 AC 的距离，所以⊙I 为最小．

26.三角形三高的连乘积不大于三旁切圆半径的连乘积．

证明：令△表三角形的面积，由习题十八第23题有

$\triangle=\sqrt{rr_ar_br_c}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$，

$\because\quad h_a h_b h_c=\dfrac{8\triangle r r_a r_b r_c}{abc}$，由习题四第28题有：

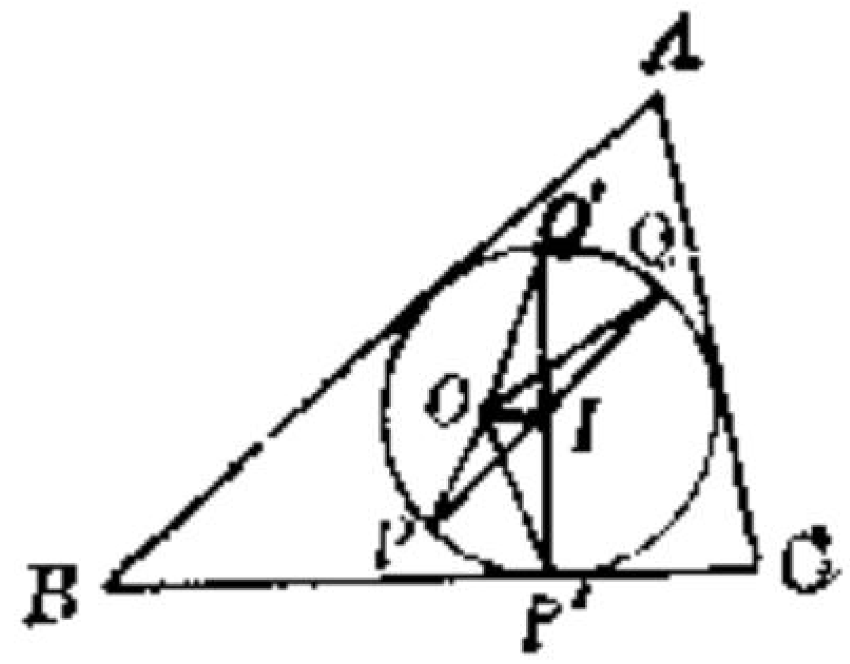
$$\frac{h_a h_b h_c}{r_a r_b r_c}=\frac{2r}{R}$$

由复习题三第17题有 $R\geqslant 2r$，$\therefore\quad h_a h_b h_c\leqslant r_a r_b r_c$．

27．设 O 是$\triangle ABC$ 的外心，PQ 是这三角形内切圆的任一直径，求证：$\triangle OPQ$ 的周长不大于$\triangle ABC$ 的外接圆直径．

证明：设外接圆半径为 R，由第17题得，当$OI\perp P'Q'$时，$\triangle OP'Q'$ 的周长等于 $2R$，即当$\triangle OP'Q'$ 为等腰三角形时，其周长等于 $2R$．

当PQ 在任意位置时，$\triangle OPQ$的中线仍为 OI，即$\triangle OPQ$与$\triangle OP'Q'$有同底且有相同的中线，故 $OP+OQ<OP'+OQ'$．故$\triangle OPQ$ 的周长不大于$2R$．



图复三—27

28．设 a、b、c 表三角形的三边，R 表外接圆半径，求证：$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{R}$．

证明：$\because\quad \dfrac{1}{a}$、$\dfrac{1}{b}$、$\dfrac{1}{c}$均为正实数，由算术平均值不小于几何平均值得：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}\qquad ①$$

由习题四第28题，$abc=4R\triangle$（$\triangle$表三角形面积）

在内接于同一圆的三角形中，以正三角形的面积为最大，其最大面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$．

$\therefore\quad abc\leqslant 4R\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2=(\sqrt{3}R)^3$

于是 $\frac{1}{abc}\geqslant\frac{1}{(\sqrt{3}R)^3}$，即 $\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}R}$

①得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}R}=\frac{\sqrt{3}}{R}$

当 $a=b=c$ 时等号成立.

29．A、B、C、D是任意四点，求证：

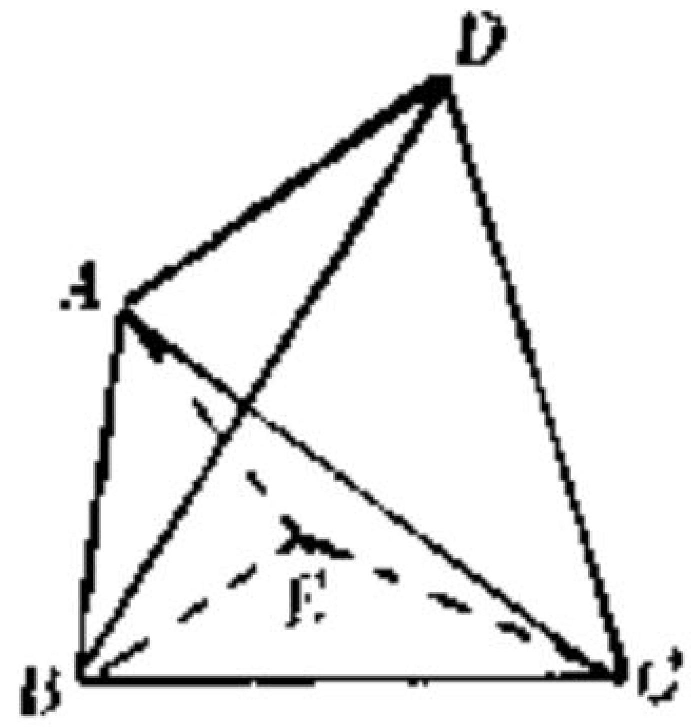
$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$

证明：作$\triangle EBC\backsim\triangle ABD$，

则 $\angle DBC=\angle ABE$，

且 $\frac{BC}{BD}=\frac{BE}{BA}=\frac{EC}{AD}$ ①

$\triangle DBC\backsim\triangle ABE$，$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{EA}$ ②



图复三—29

由①，②有 $BD\cdot EC=AD\cdot BC$，

$BD\cdot EA=AB\cdot CD$.

两式相加 $BD(EC+EA)=AB\cdot CD+AD\cdot BC$

$\therefore\quad BD\cdot AC\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$

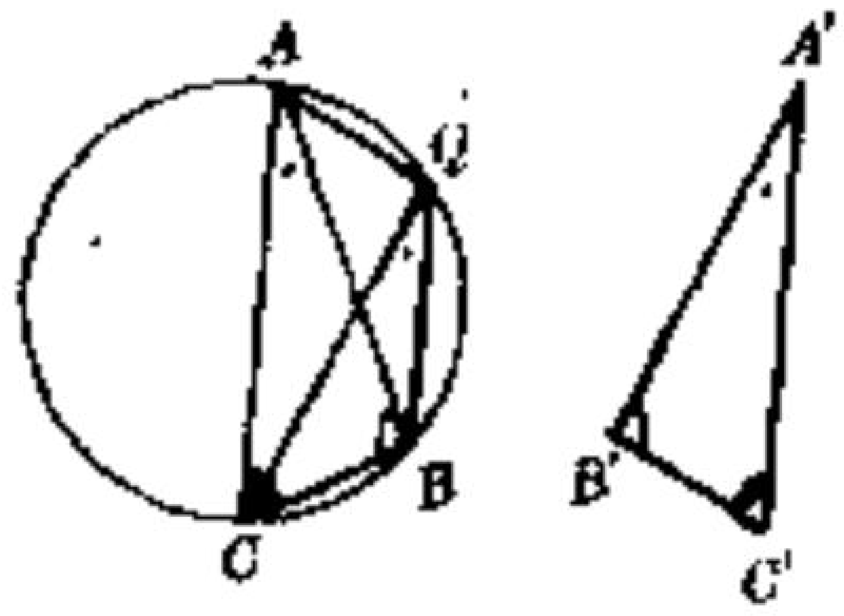
30．若凸四边形每双对边乘积的和等于两对角线的乘积，则这四边形必有外接圆.

证明：由上题知，等号成立时，E 点在 AC 上，且有$\triangle ECB\backsim\triangle ADB$.

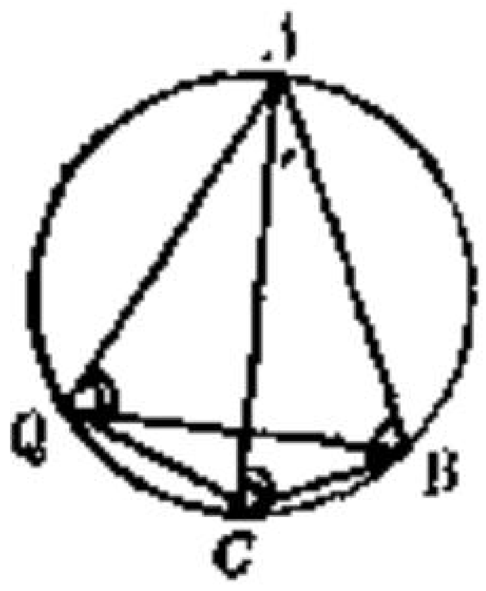
$\therefore\quad\angle ECB=\angle ADB$，即$\angle ACB=\angle ADB$

故 A、B、C、D 四点共圆.

31．设$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$镜象相似，则自 A、B、C分别所引$B'C'$、$C'A'$、$A'B'$的平分线必共点，这点在$\triangle ABC$的外接圆上.



图复三—31



图复三—32

证明：作 $AQ\parallel B'C'$，$BQ\parallel C'A'$，
则 Q、B、C、A 四点共圆，故 $QC\parallel A'B'$．

32．承上题，自 A、B、C 分别引 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 的垂线也共点，这点仍在 $\triangle ABC$ 的外接圆上．

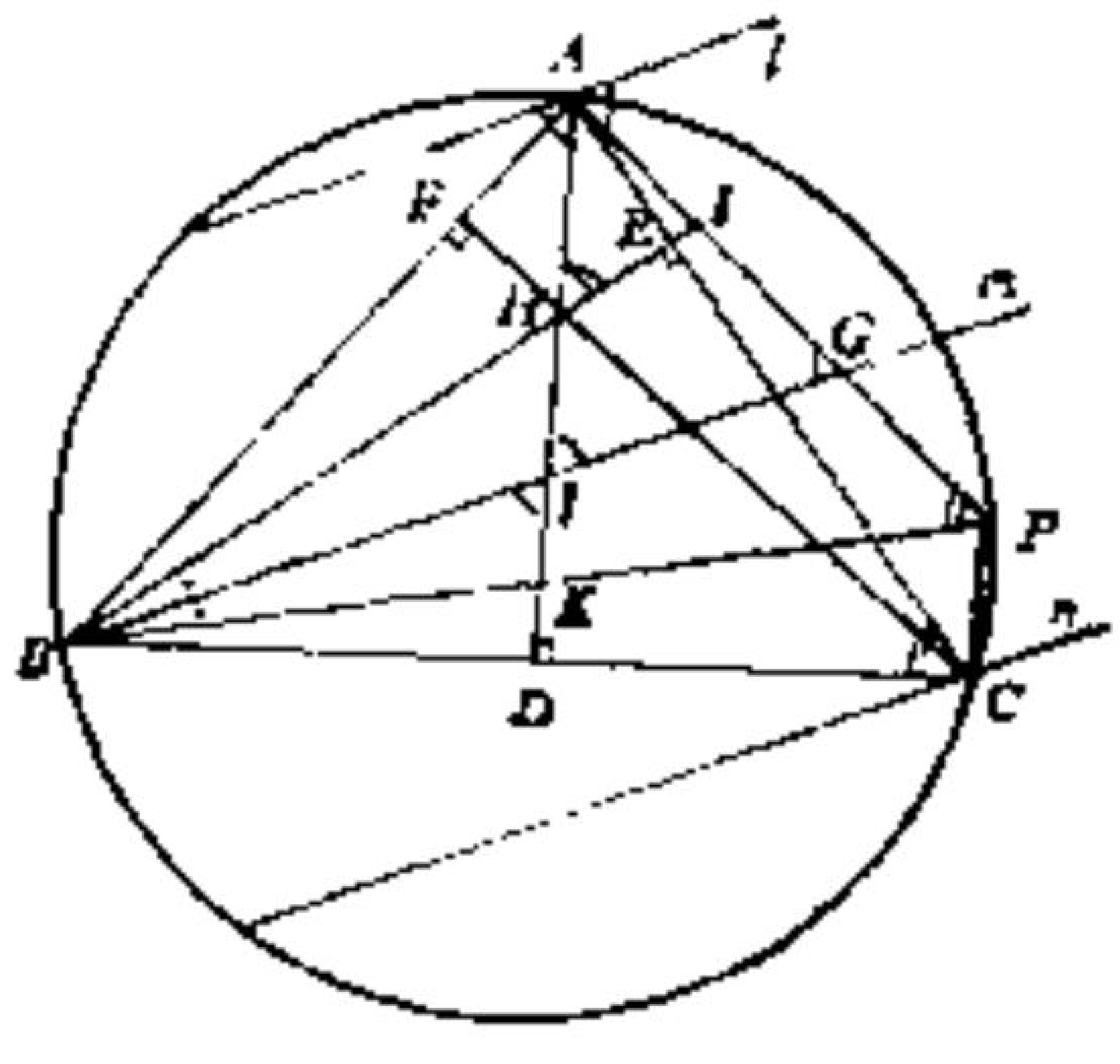
证明：作 $AQ\perp B'C'$，$BQ\perp C'A'$，
则 Q、A、B、C 四点共圆，故 $\angle CQB=\angle CAB$．

$\therefore\quad QC\perp A'B'$．

33．设 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，直线 l、m、n 分别通过 A、B、C 且互相平行，试证 AH、BH、CH 各关于 l、m、n 的对称线共点，这点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上．

证明：

$$\angle AIH=\angle IBG+\angle IGB$$
$$=\angle KBJ+\angle KJB$$
$$=\angle HKP.$$



图复三—33

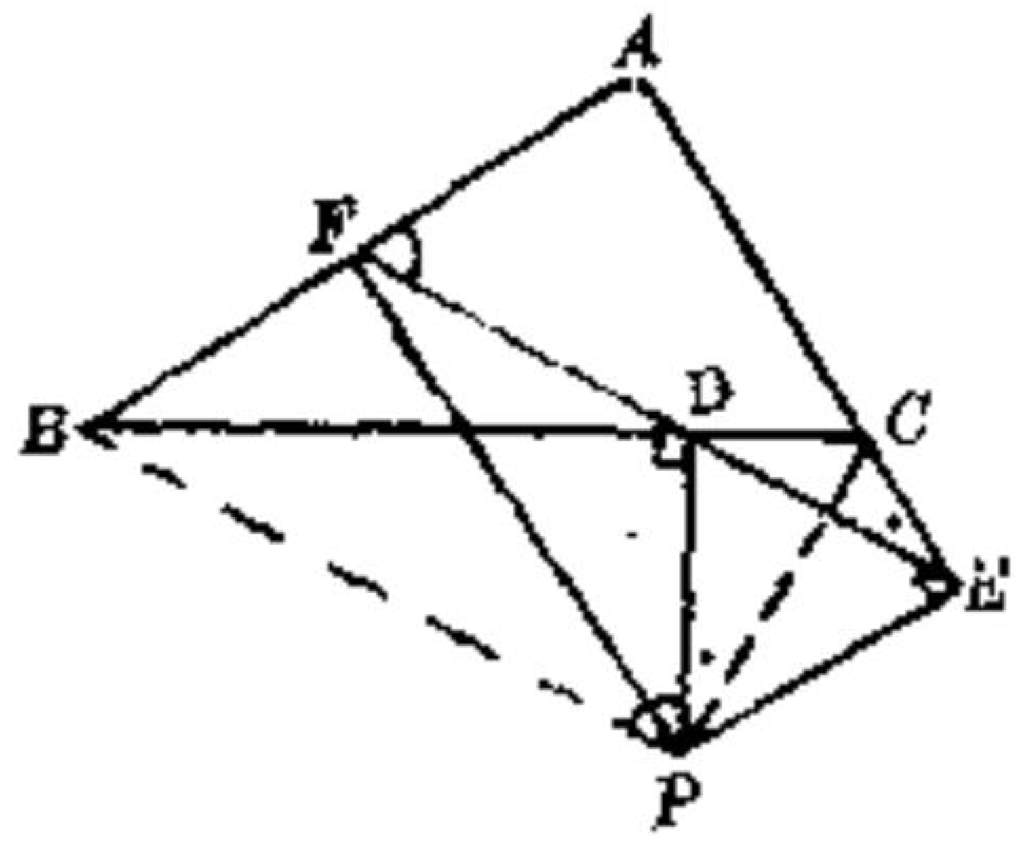
P 是 AH、BH 关于 l、m 对称线的交点，故有 I、H、K、P 四点共圆，又 H、D、C、E 四点共圆．

$\therefore\quad \angle IPK=\angle AHI=\angle ACB$，
即 $\angle APB=\angle ACB$．故 P 在 $\odot ABC$ 上．

同理有 CH 关于 n 的对称线与 BP 的交点也在 $\odot ABC$

上．故CP即CH关于n的对称线．

34．设一点在三角形三边所在直线上的射影共线，则该点必在三角形的外接圆上．



图复三—34

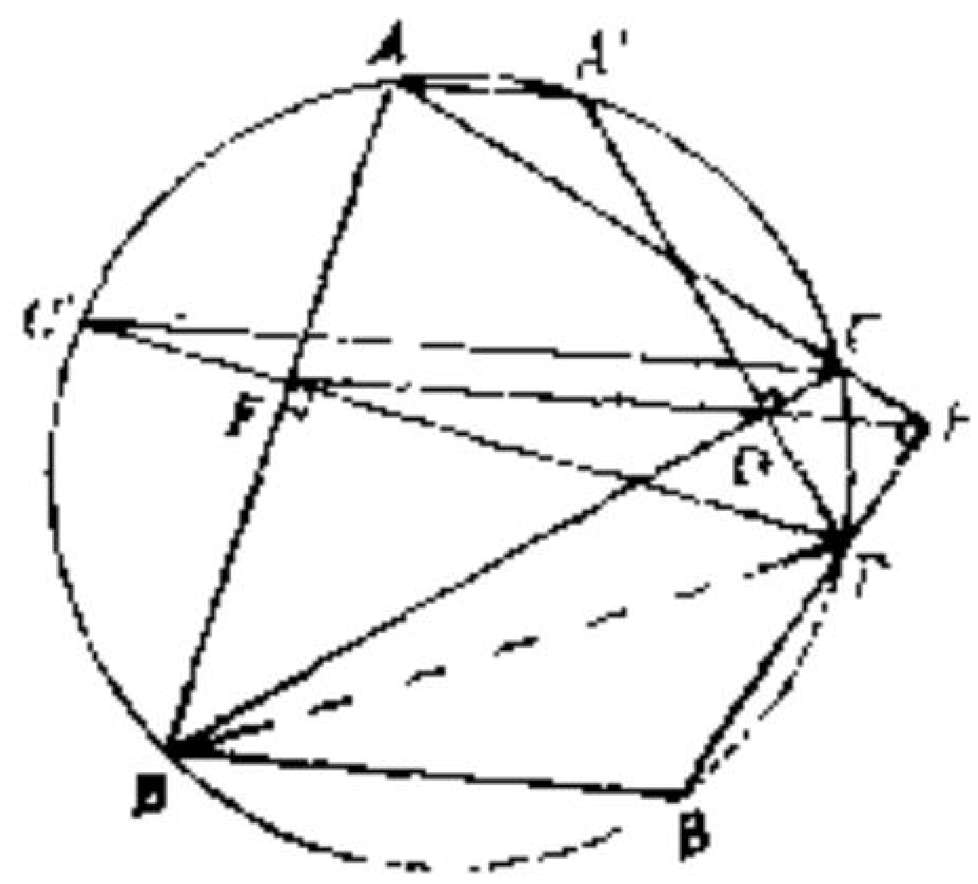
证明：$\because$ P、D、C、E与P、D、F、B均四点共圆，

$\therefore$ $\angle DPB+\angle DPC$

$=\angle AFE+\angle AEF$

故$\angle A+\angle BPC=180^\circ$

35．设P是$\triangle ABC$的外接圆上一点，自P引三线分别垂直于BC、CA、AB而交外接圆于A'、B'、C'。求证：AA'、BB'、CC'均平行于P对$\triangle ABC$的西摩松线．



图复三—35

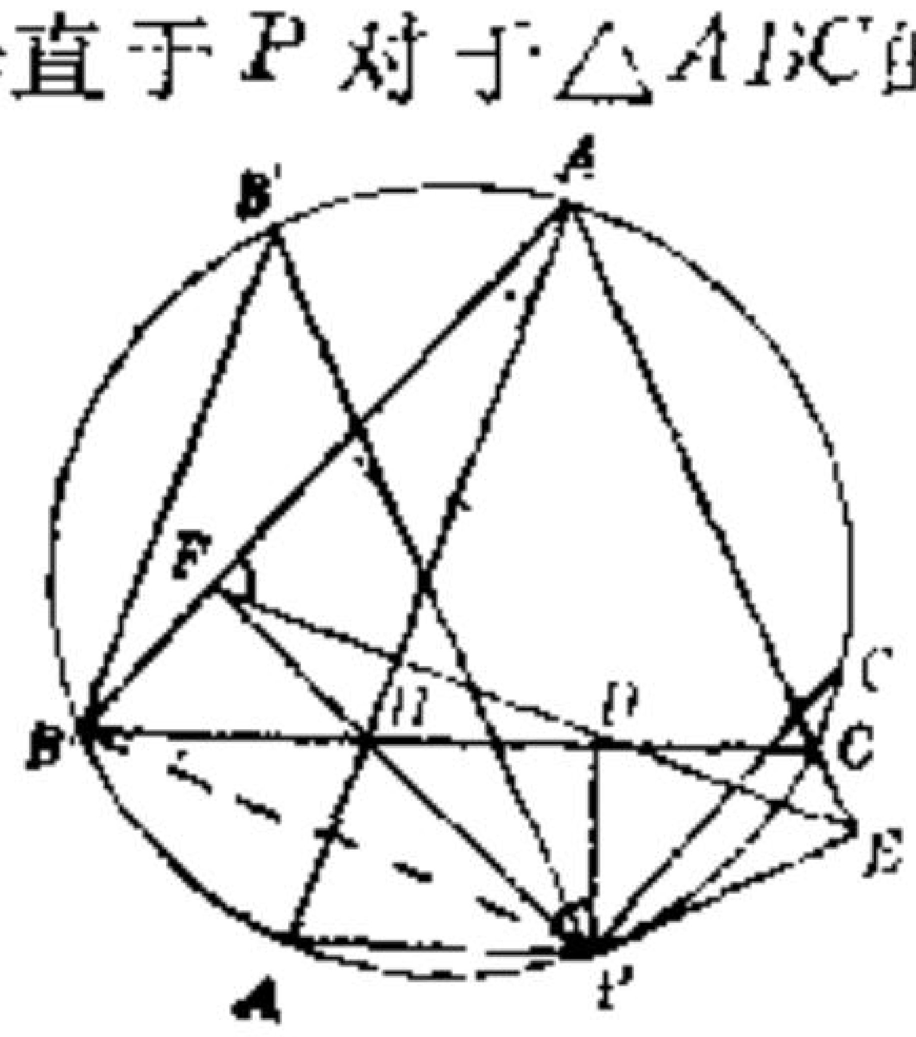
证明：$\angle A'$与$\angle FDP$均与$\angle ABP$互补，

$\therefore$ $\angle A'=\angle FDP$，

故$AA'\parallel FD$．

同理$BB'\parallel CC'\parallel FE$．

36．在上题中，若自P所引三直线是分别平行于BC、CA、AB的，则AA'、BB'、CC'均垂直于P对于$\triangle ABC$的西摩松线．



图复三—36

证明：$\because$ $\overset{\frown}{A'B}=\overset{\frown}{PC}$，

$\therefore$ $\angle BAA'=\angle PBC$

又 $\angle AFH=\angle BPD$，

故 $AH\perp FH$，即$AA'\perp FE$．

同理，BB'、CC'均垂直于FE．

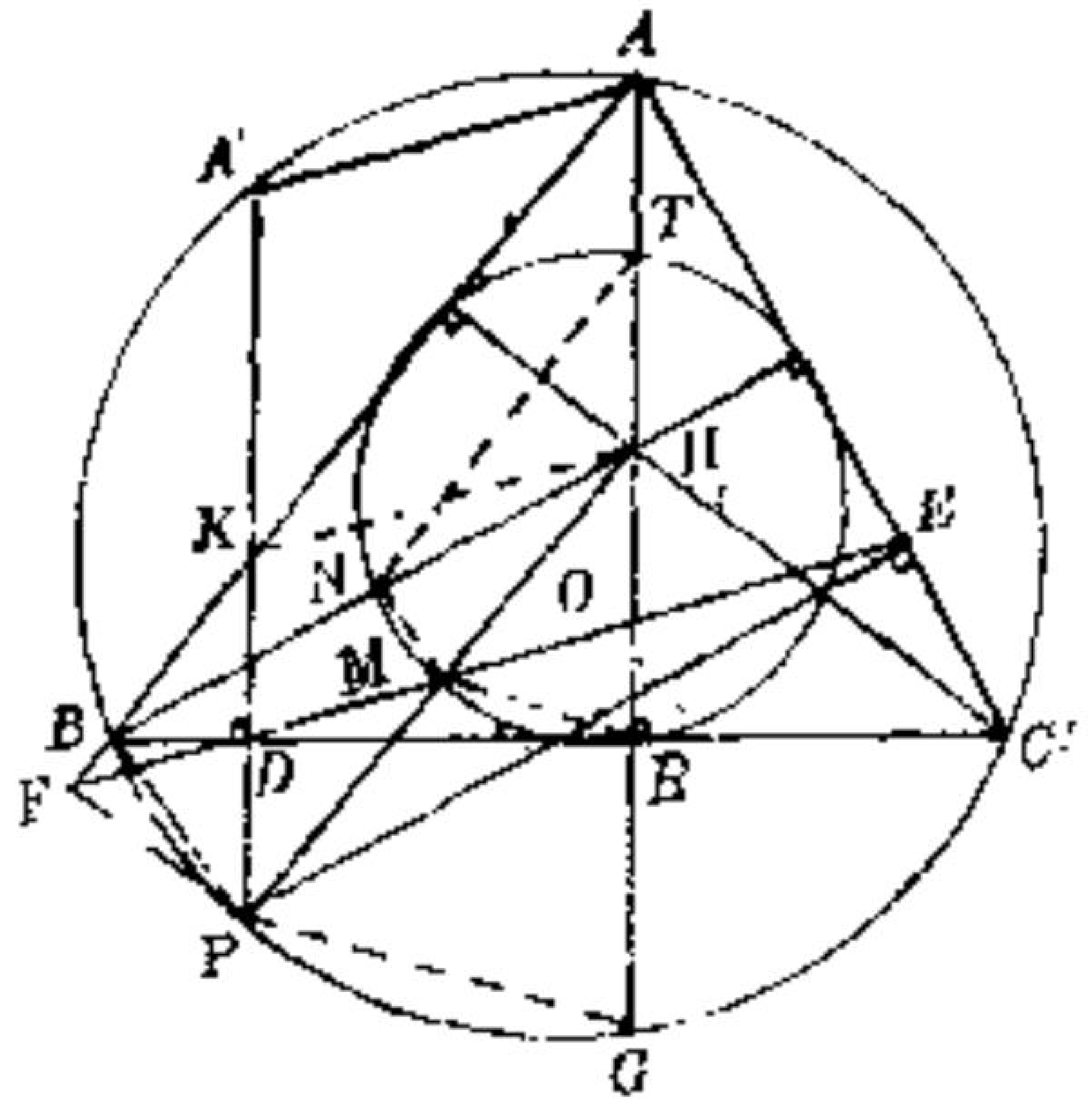
37．圆上任一点对于内接三角形的西摩松线，必平分该点至此三角形的垂心的连结线，且分点在三角形的九点圆上．

证明：令 AH 交⊙O 于 G，PD 交⊙O 于 A'，由复习题一第21题有 R 为 GH 的中点．

过 H 作 $HK \parallel AA'$，则 $HKPG$ 为等腰梯形且 DR 为其对称轴，故 D 是 KP 的中点．

∵ $KH \parallel A'A \parallel DE$，故 M 为 PH 的中点．

又 N、T 为 BH、AH 的中点，由于 A、B、P、G 共圆，故 T、N、M、R 亦共圆，此圆即△ABC 的九点圆．

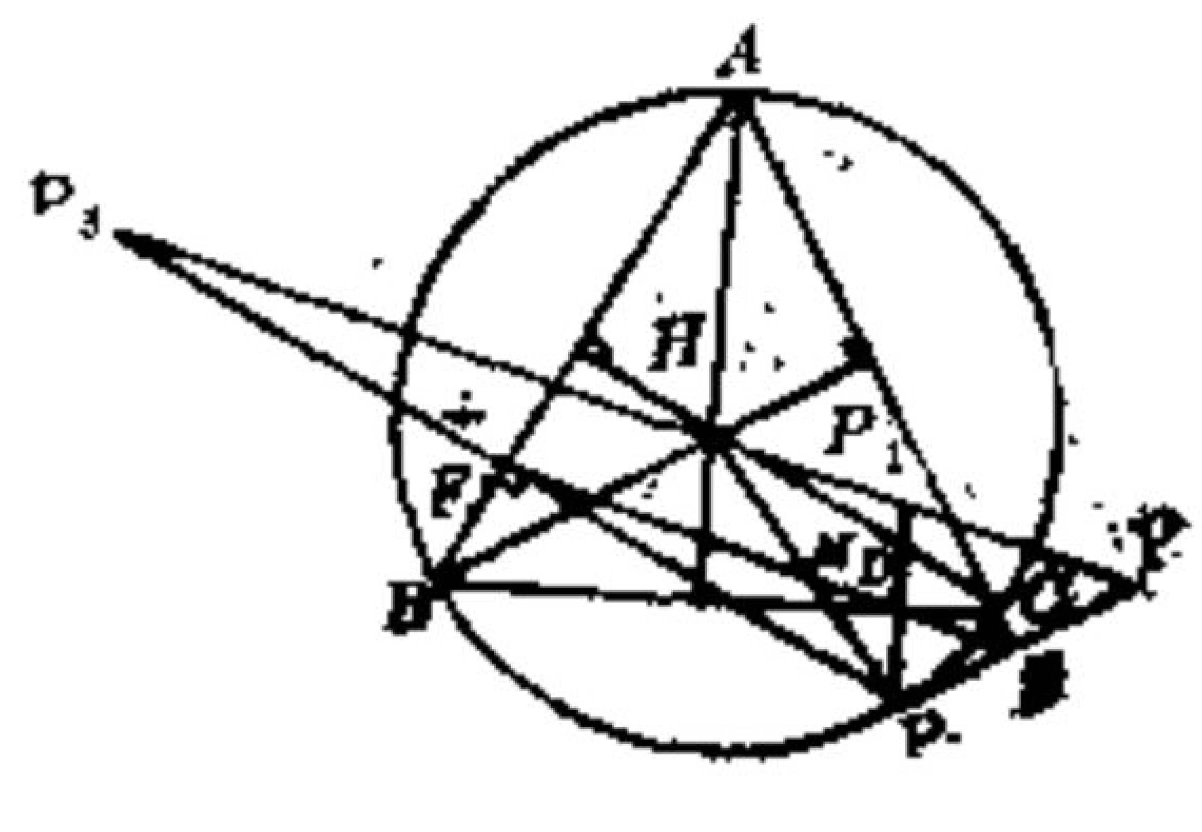


图复三—37

38．三角形的外接圆上任一点关于三边的对称点共线．这线通过三角形的垂心。

证明：作 P 点的西摩松线 FDE，连 PH 交 FE 于 M，由上题知 M 是 PH 的中点．

作 P 点关于三边的对称点 P_1、P_2、P_3，于是有 $HP_1 \parallel MD$，$HP_2 \parallel ME$，$HP_3 \parallel MF$．

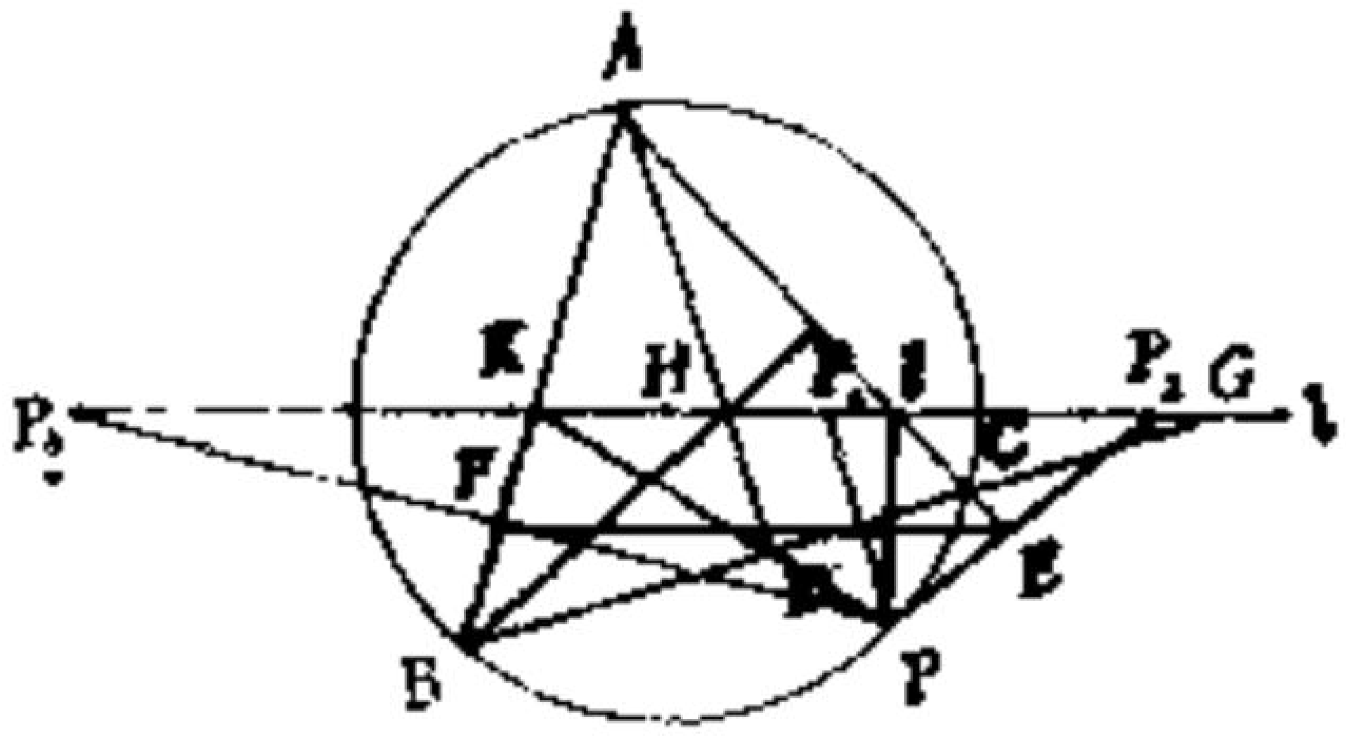


图复三—38

过 H 的三线均平行于 EF，故均共线．

39．设一直线通过三角形的垂心，则它关于三边的对称线必会于外接圆上一点，这点对于三角形的西摩松线平行于所设直线。

证明：令过H的直线l交BC、CA、AB于G、I、K，设l关于CA的对称线交$\odot ABC$于P，作P点关于三边BC、CA、AB的对称点P_1、P_2、P_3，由上题知$P_1P_2P_3$共线且过垂心H，故$P_1P_2P_3$与l重合，且由上题可得P点关于$\triangle ABC$的西摩松线与l平行。

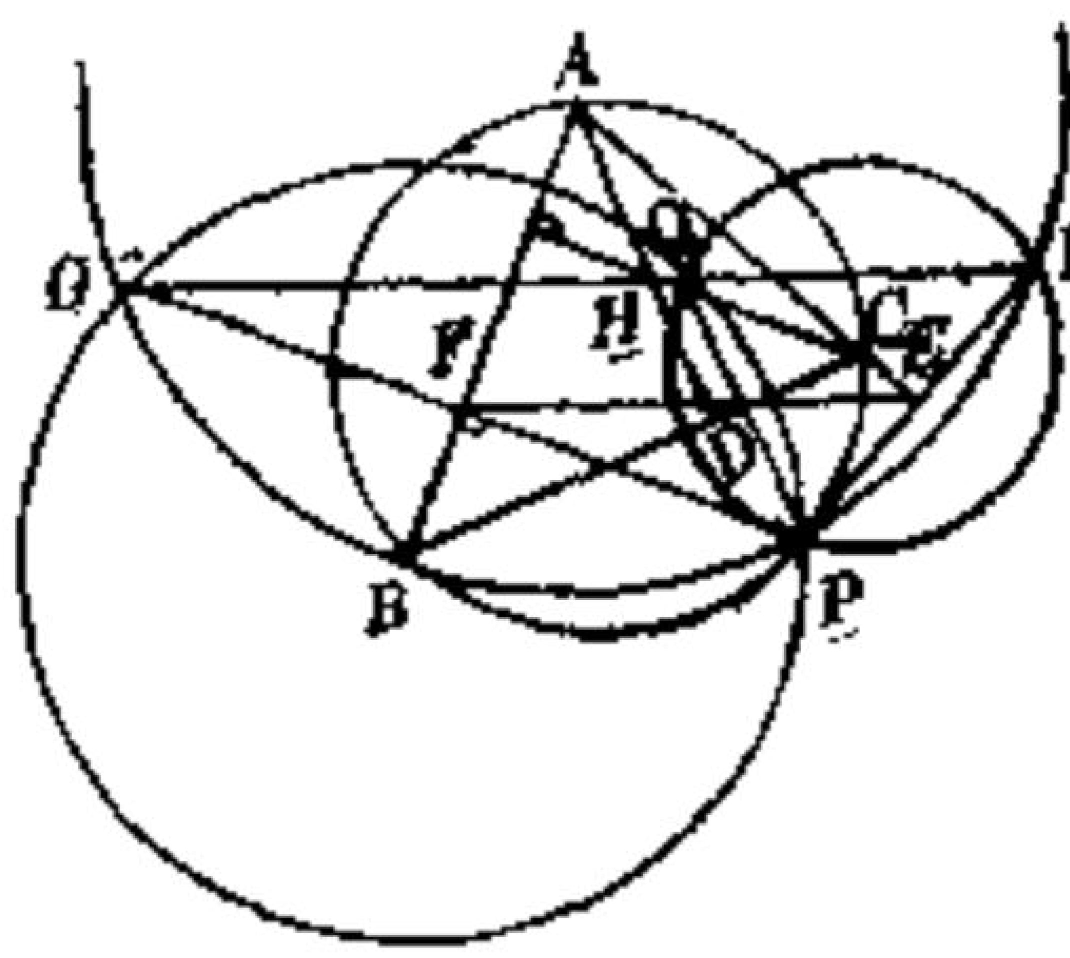


图复三—39

又PK、PG、PI为l关于AB、BC、CA的对称线，故此三线会于$\odot ABC$上的点P。

40．设以三角形的顶点为心各作圆，使会于外接圆上一点，则所作三圆的其他三交点与三角形的垂心共线。

证明：由BC、CA、AB垂直平分PQ、PR、PG于D、E，F，有FDE为西摩松线，且G、Q、R为P点关于AB、BC、CB的对称点，由38题得G、H、Q、R共线。

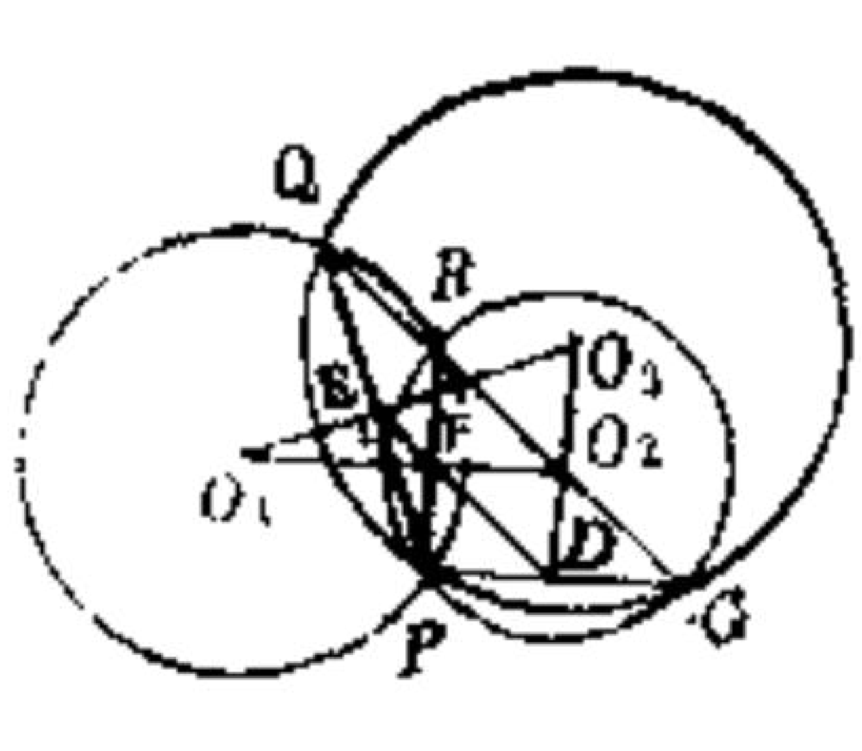


图复三—40

41．设三圆共点且其他三交点共线，则三圆的公共交点与三圆心共圆。

证明：O_2O_3、O_3O_1、O_1O_2分别垂直平分PG、PQ、PR于D，E、F，且Q、R、G共线，故E、F、D共线．

由于D、E、F是P点在$\triangle O_1O_2O_3$三边上的射影且共线，由34题知P在$\odot O_1O_2O_3$上。

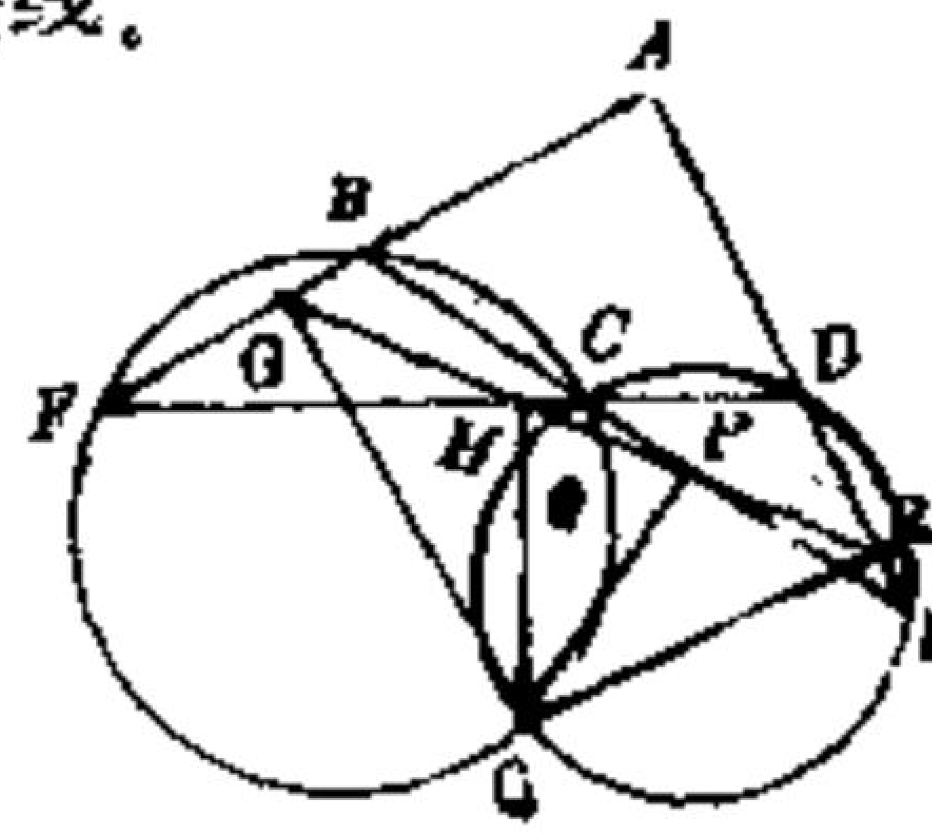


图复三—41

42．完全四边形的密克点在四边上的射影共线。

这直线叫做完全四边形的西摩松线。

证明：由 $P198$ 例题52知，Q 为四条直线所成的四个三角形的四个外接圆的公共交点，有 G、H、P 与 H、P、R 均共线，故 G、H、P、R 共线。



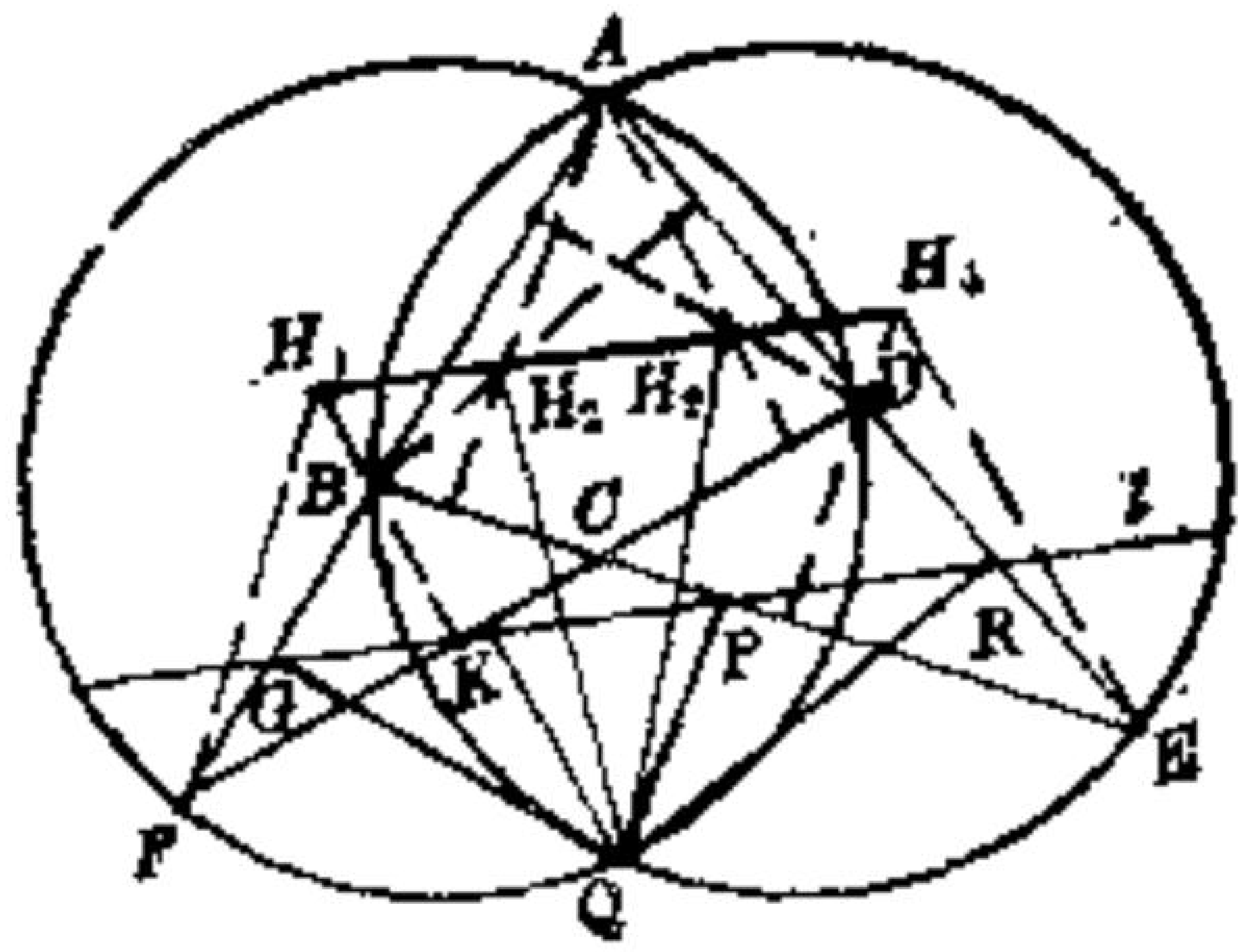
图复三—42

43．完全四边形各边所成四个三角形的垂心同在一条平行于西摩松线的直线上。

这直线叫做完全四边形的垂心线。

证明：H_1、H_2、H_3、H_4 是四个三角形的垂心，$GKPR$ 为完全四边形的西摩松线，由37题知，QH_1、QH_2、QH_3、QH_4 被西摩松线所平分。

$\therefore$ $H_1H_2H_3H_4$ 为一直线且平行于西摩松线。



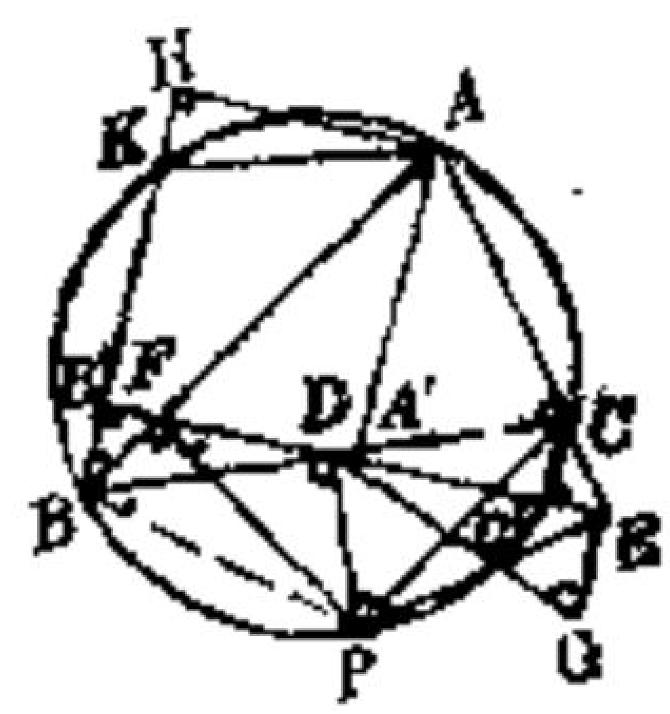
图复三—43

44．圆上一点对于内接三角形的西摩松线夹于该三角形两边（所在直线）间的线段，等于第三边在该西摩松线上的射影。

证明：DE 是夹在 BC、CA 间的西摩松线段，$A'B'$ 是 AB 在西摩松线上的射影。

在以 PC 为直径的圆中，作 $DG=PC$ 且 DG 过 PC 的中点，连 GE 则 $\triangle DGE$ 为直角三角形。

过 A 作 BB' 的垂线，垂足为 H，



图复三—44

连 AK，则$\triangle AKH$亦为直角三角形。

$\because\quad \angle ABK=\angle PFD=\angle PBD=\angle PBC$，

$\therefore\quad AK=PC=DG$.

又 $\angle AKH=\angle ACB=\angle DPE=\angle DGE$，

$\therefore\quad \triangle AKH\cong\triangle DGE$，故 $DE=AH=A'F'$

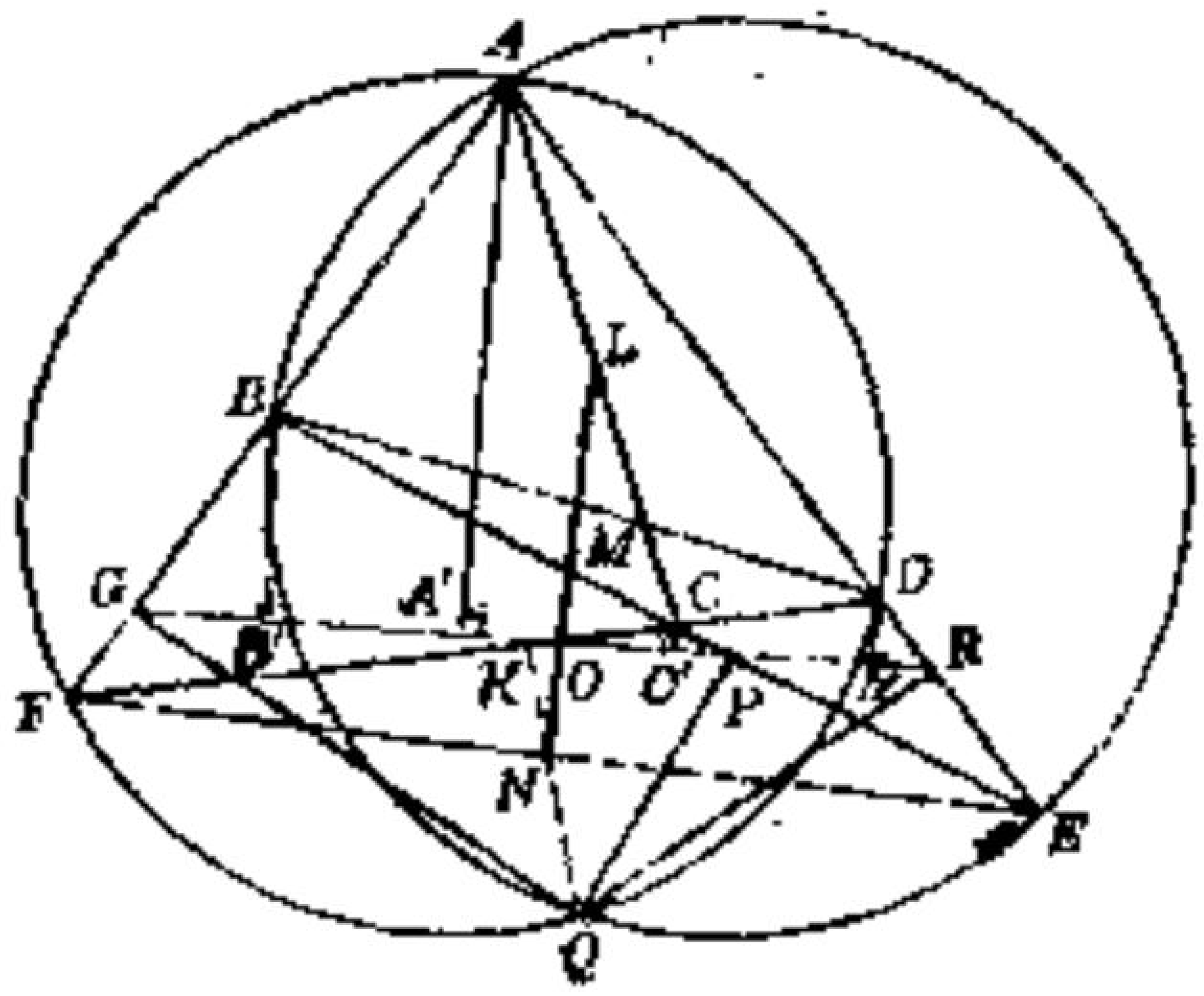
同理有 $FE=B'C'$，$FD=A'C'$.

45．完全四边形的牛顿线垂直于西摩松线及垂心线。

证明：由习题十四第23题知，牛顿线即完全四边形三条对角线中点所共之线，如图中的 LMN.

令 $GKPR$ 为西摩松线，A、B、C、D 在西摩松线上的射影为 A'、B'、C'、D'．由上题知，

在$\triangle AEB$与$\triangle CED$中，



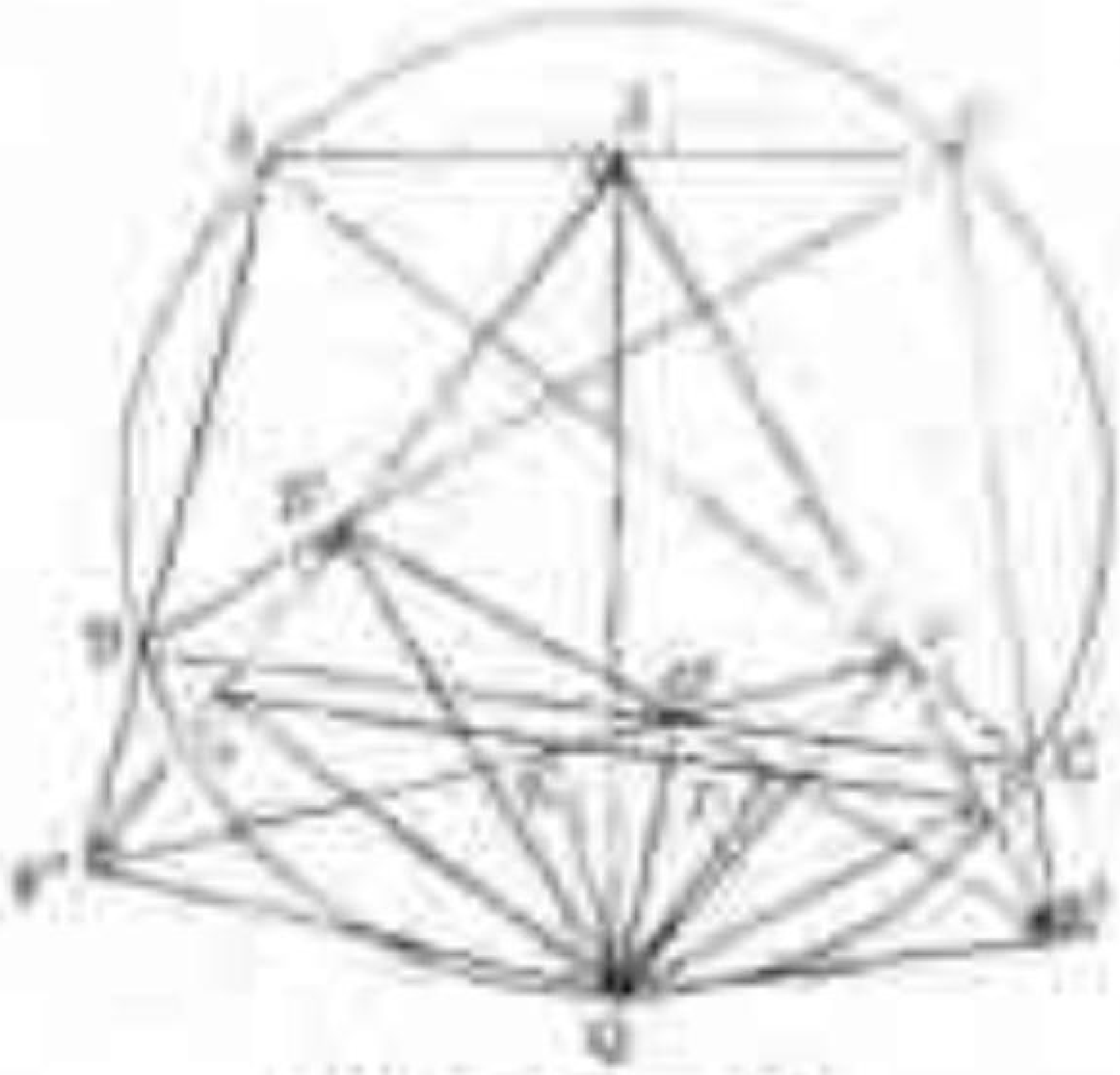
图复三—45

有 $A'E'=PR=C'D'$.

故令 $A'C'$ 的中点为O，则O亦为 $B'D'$ 的中点，而 LO、MO 分别为梯形 $AA'C'C$ 与 $BB'D'D$ 的中位线，故均垂直于 GR，即牛顿线垂直于西摩松线。由43题知，亦垂直于垂心线。

46．圆上四点两两连成四个三角形，求证：圆上任一点在它对于该四个三角形的西摩松线上的射影共线。

证明：圆上一点Q对于四个三角形的西摩松线构成一个完全四边形$A'B'C'D'E'F'$且Q为其密克点。由43题知，Q在四边上的射影G、K、P、R共线。



图复三—46

47．在一圆内接完全四角形中，求证下列十七条直线，四个圆交于一点：

(1) 每顶点至其他三顶点所连成三角形的垂心的连线，凡四线；

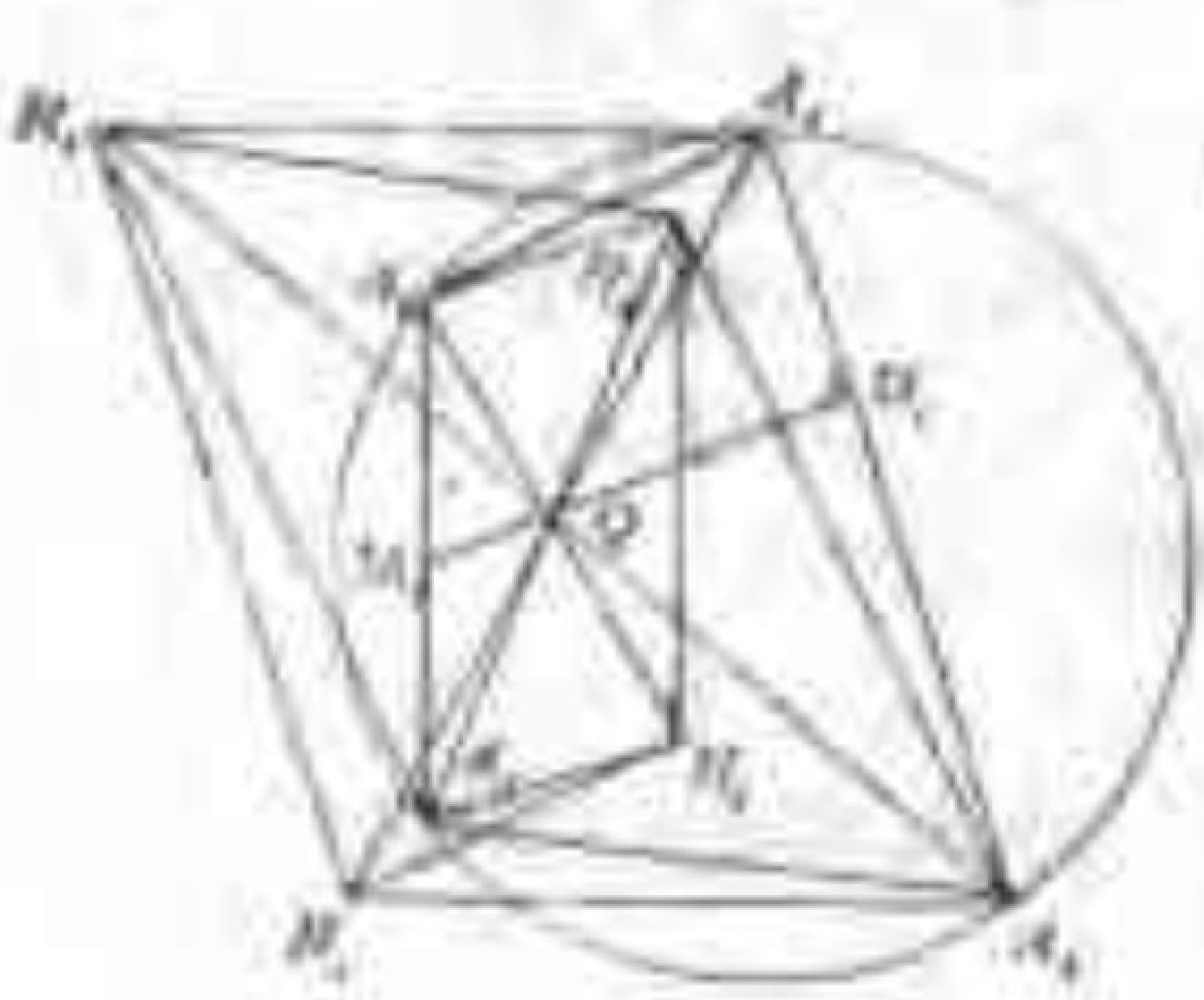
(2) 每顶点对于他三顶点所连成三角形的西摩松线，凡四线；

(3) 自每边中点所引对边的垂线，凡六线；

(4) 自每对角点所引过此点两边的中点连线的垂线，凡三线；

(5) 每三顶点所连成三角形的九点圆，凡四圆。

证明(1)：设每顶点与其他三顶点所连成三角形的垂心的连线为A_1H_1、A_2H_2、A_3H_3、A_4H_4。由习题十六第7题知四边形$A_1A_2A_3A_4$与四边形$H_1H_2H_3H_4$全等且有平行四边形$A_1A_2H_2H_1$、$A_1H_1H_3A_3$、$A_3A_4H_3H_4$。



图复三—47(1)(3)

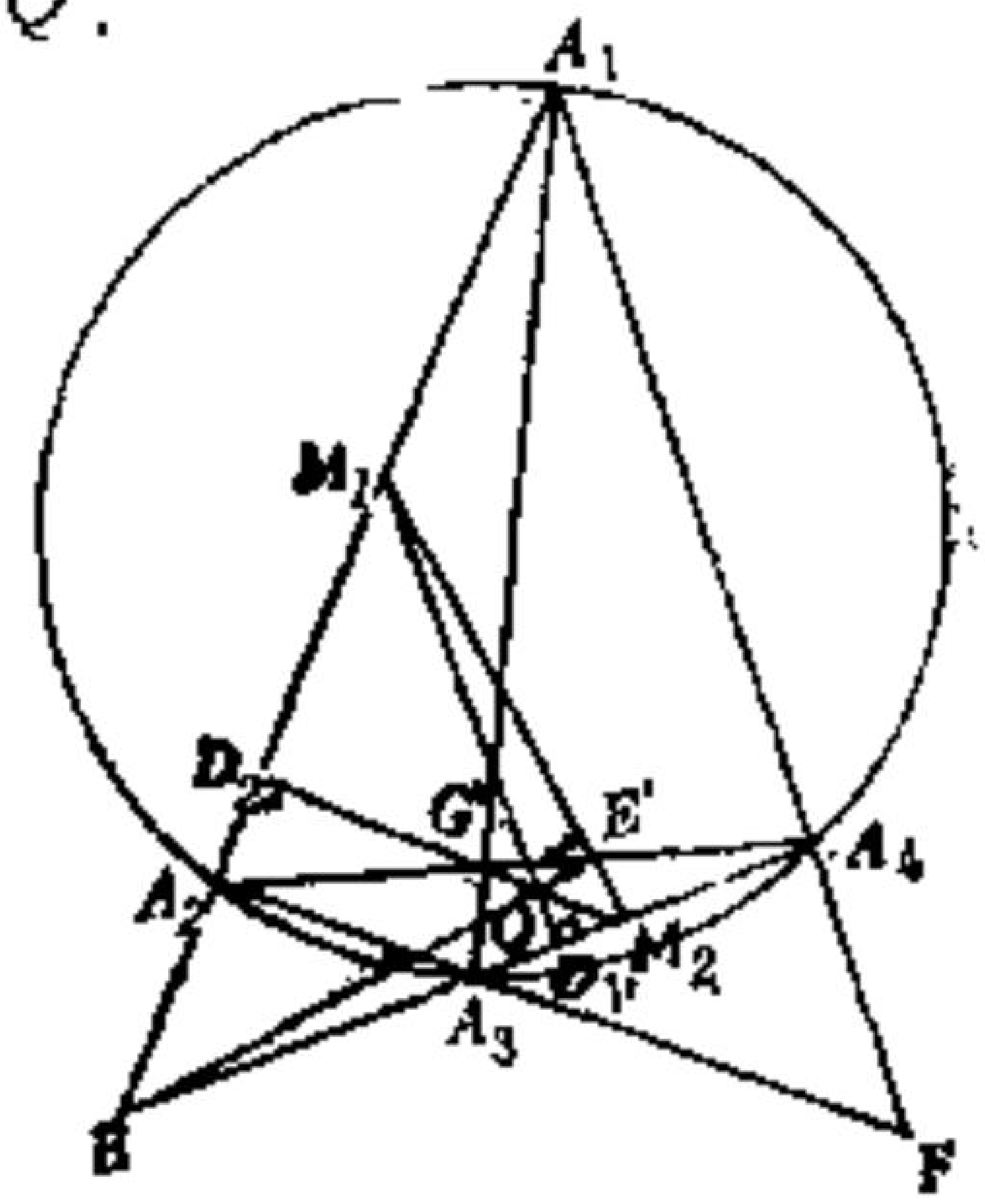
此三个平行四边形有相同的中心 Q，故四线 A_1H_1、A_2H_2、A_3H_3、A_4H_4共点于 Q.

(2)：由第37题知，每顶点对于内接三角形的西摩松线过该点与垂心的连线的中点，即均过Q点。

(3)：自 A_1A_2的中点 M_1 作 $M_1D_1 \perp A_3A_4$ 于 D_1，则 $M_1D_1 /\!/ A_1H_2 /\!/ A_2H_1$，故 M_1D_1 过 Q.

(4)：E、F、G 为三对角点，令 M_1、M_3为 A_1A_2、A_3A_4 的中点。作 $EE' \perp M_1M_3$ 于 F'，在 $\triangle EM_1M_3$中，M_1D_1、M_3D_3 为其高线，由证(3)知，其垂心即 Q.

(5)：由37题知所作四个九点圆均过顶点与垂心连线的中点，此点即Q点。

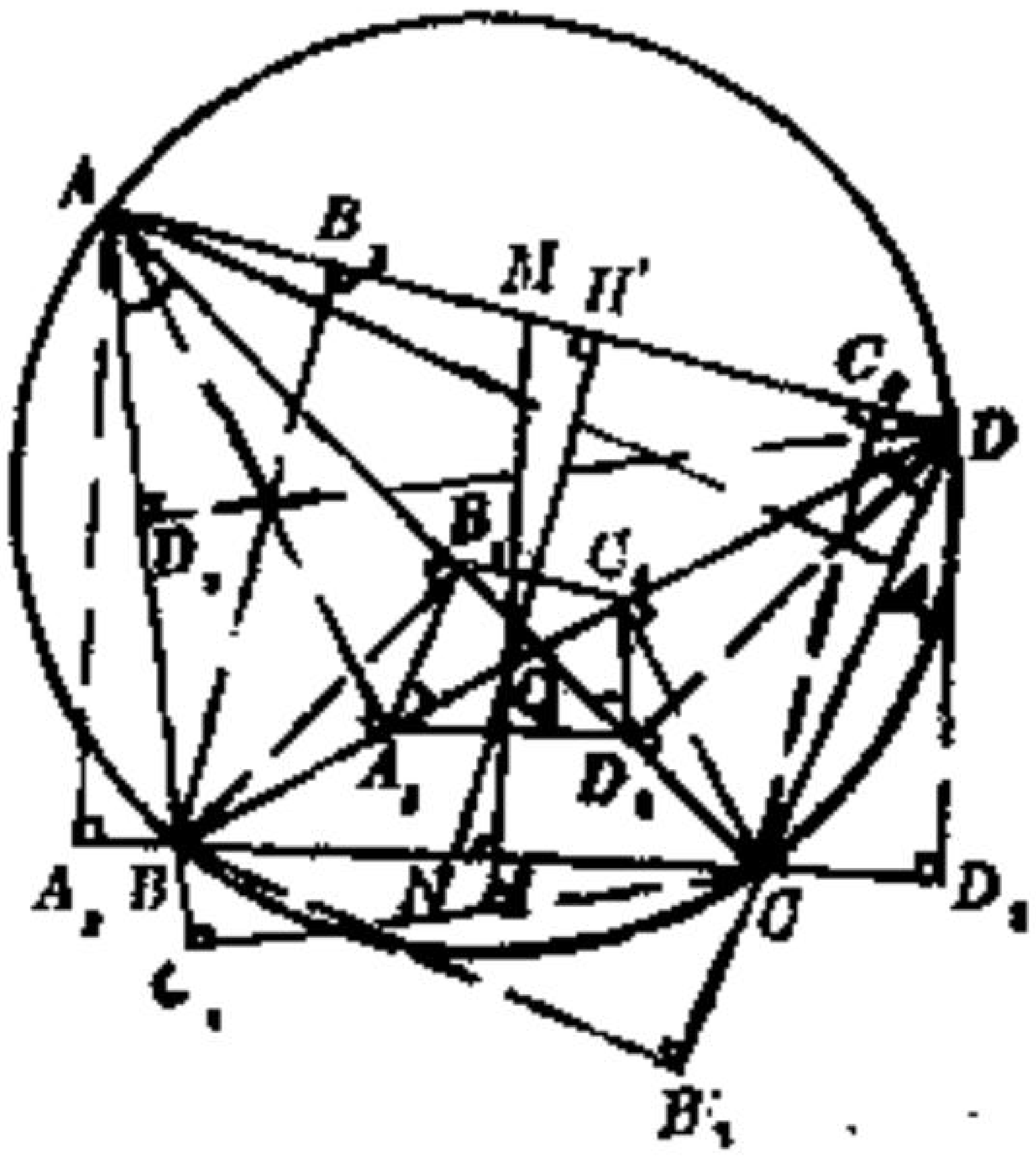


图复三—47(4)

48．圆上四点，任两点在他两点连线上的射影及他两点在此两点连线上的射影凡四点共圆，而且这样所得的三圆是同心的。

证明：由 A、B、A_1、B_1与 C、D、C_1、D_1均四点共圆，有 A_1、B_1、C_1、D_1四点共圆．同理，A_2、B_2、C_2、D_2与 A_3、B_3、C_3、D_3均四点共圆。

又 A_2D_2是 AD 在 BC 上的射影，则 A_2D_2的中垂线过 AD 的中点M．此中垂线 MH 即 AD 的中点所作 BC 的垂线；同理，NH' 即



图复三—48

BC 的中点所作 AD 的垂线。由上题(3)知，两中垂线的交点即 Q。

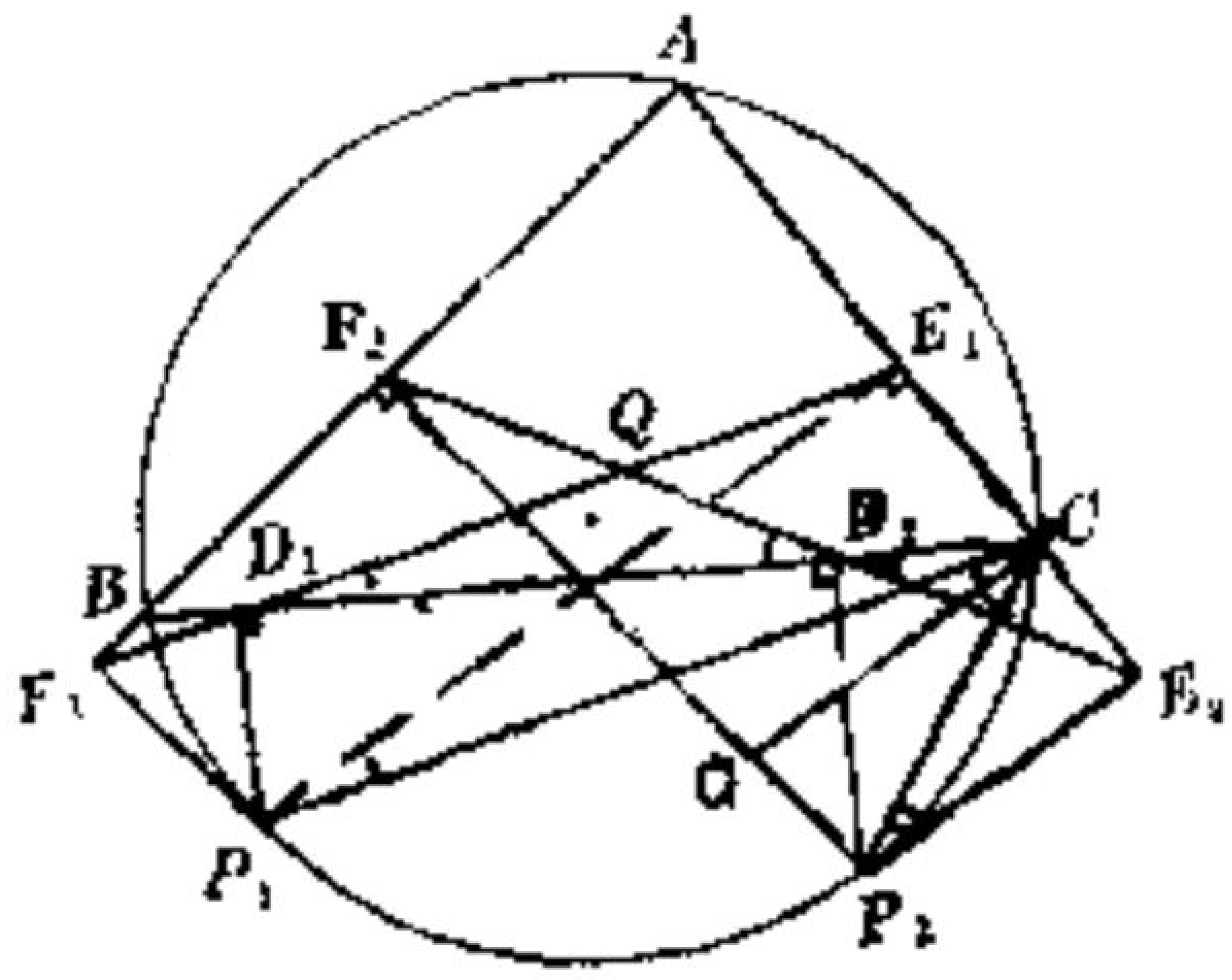
同理，Q 亦为$\odot A_1B_1C_1D_1$与$\odot A_3B_3C_3D_3$的圆心。

49．圆上两点对于同一内接三角形的西摩松线的交角，分别等于该两点连成的弦所对的圆周角。

证明：$\because P_1$、C、E_1、D_1 与 P_2、E_2、C、D_2 均四点共圆，

作 $CG /\!/ E_1P_1 /\!/ E_2P_2$，

$\therefore\ \angle E_1QE_2 = \angle QD_1D_2 + \angle QD_2D_1 = \angle E_1P_1C + \angle CP_2E_2 = \angle GCP_1 + \angle GCP_2 = \angle P_1CP_2$.

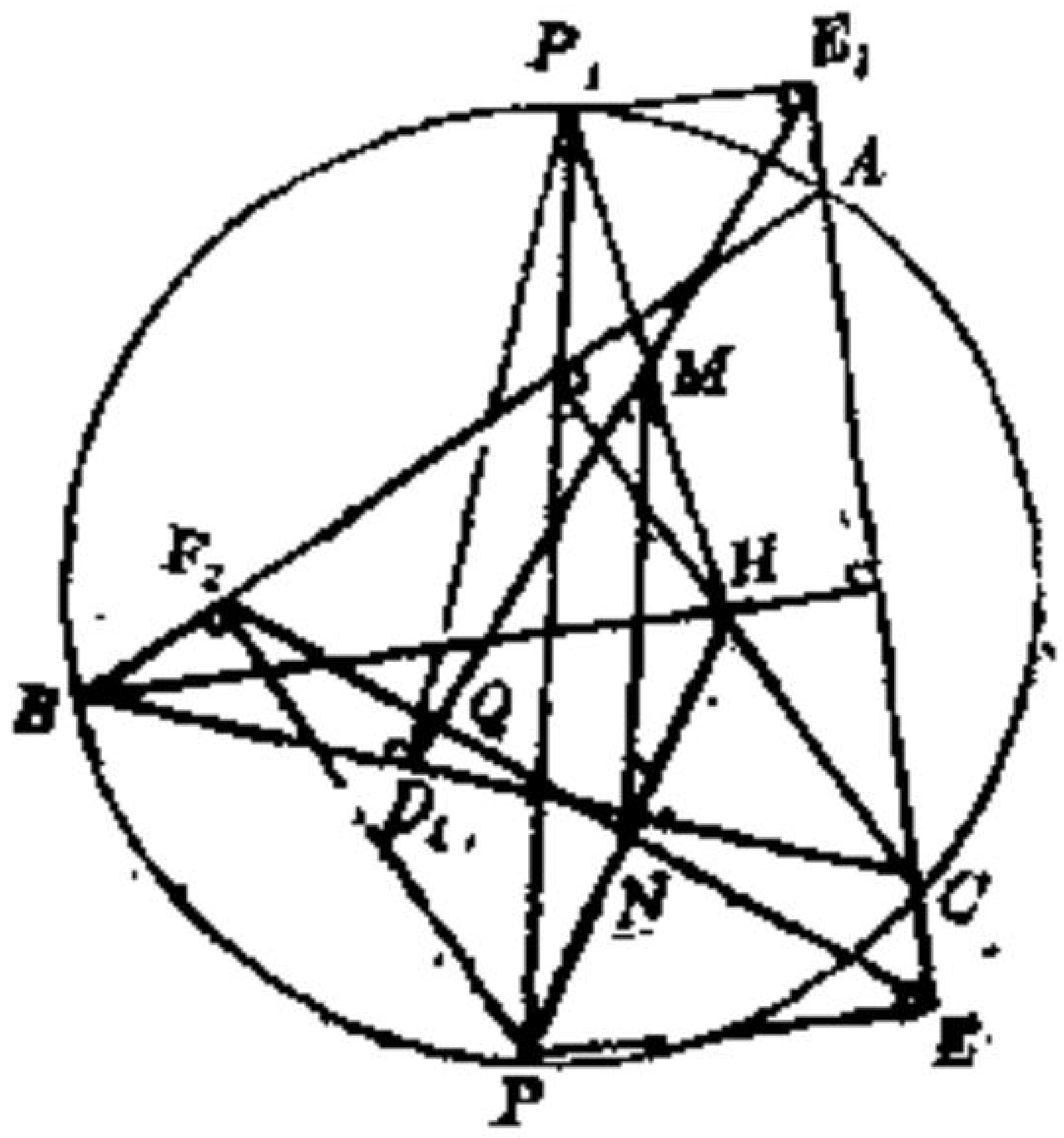


图复三—49

50．圆的任一直径的两端对于同一内接三角形的西摩松线互相垂直，垂足在三角形的九点圆上。

证明：由上题知，当 P_1P_2 为直径时，其所对的圆周角为直角，故 $D_1E_1 \perp E_2F_2$.

又由37题知，P_1H 与 P_2H 的中点 M、N 在$\triangle ABC$ 的九点圆上，且由 $MN=\dfrac{1}{2}P_1P_2$，得 MN 为九点圆的直径，故 Q 点在九点圆上。



图复三—50

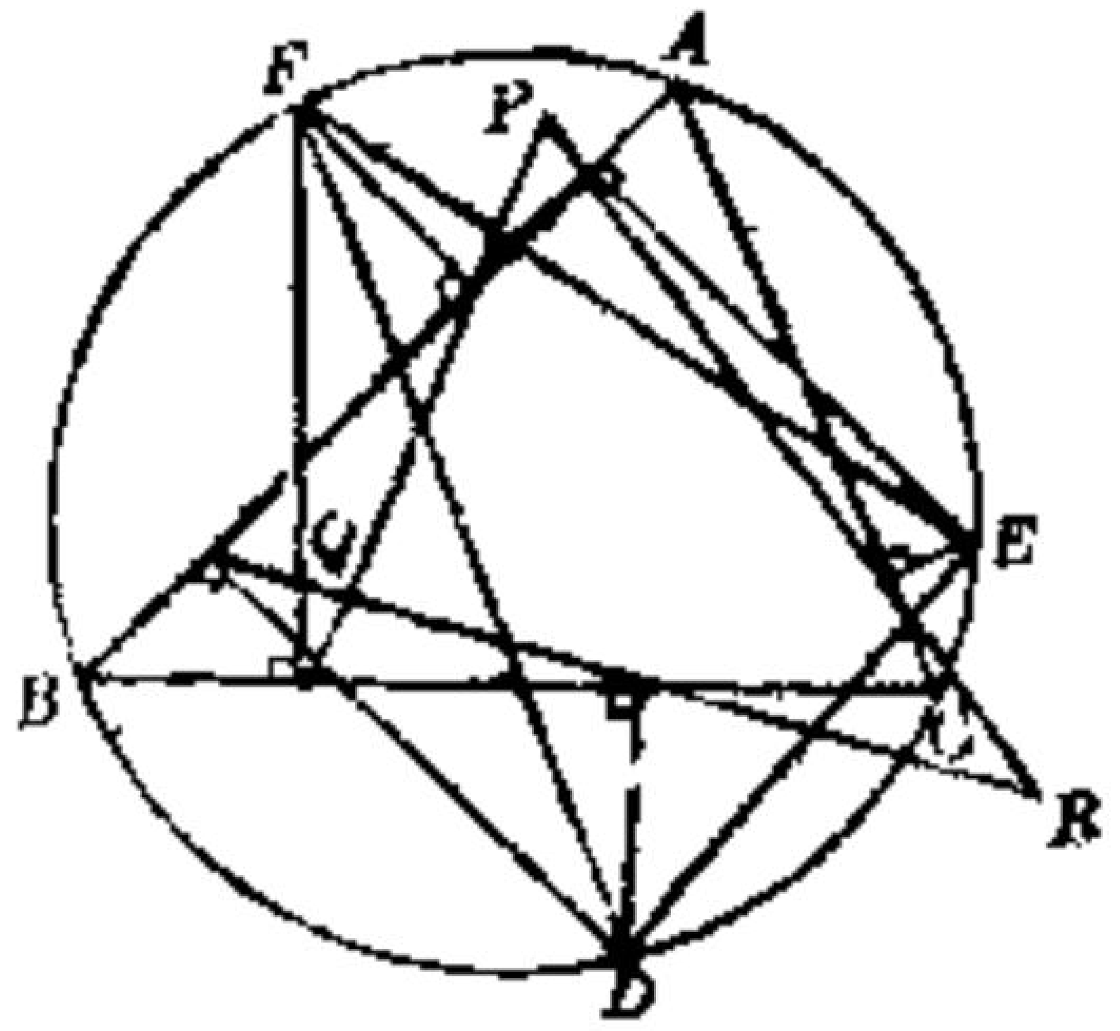
51．圆上三点对于同一内接三角形的西摩松线交成的三角形，与该三点连成的三角形相似。

证明，三点D、E、F对于$\triangle ABC$的西摩松线所交成的三角形为$\triangle PQR$，由49题得，

$\angle R=\angle DFE$，

$\angle P=\angle FDE$，

$\therefore\quad \triangle PQR\backsim\triangle DEF$



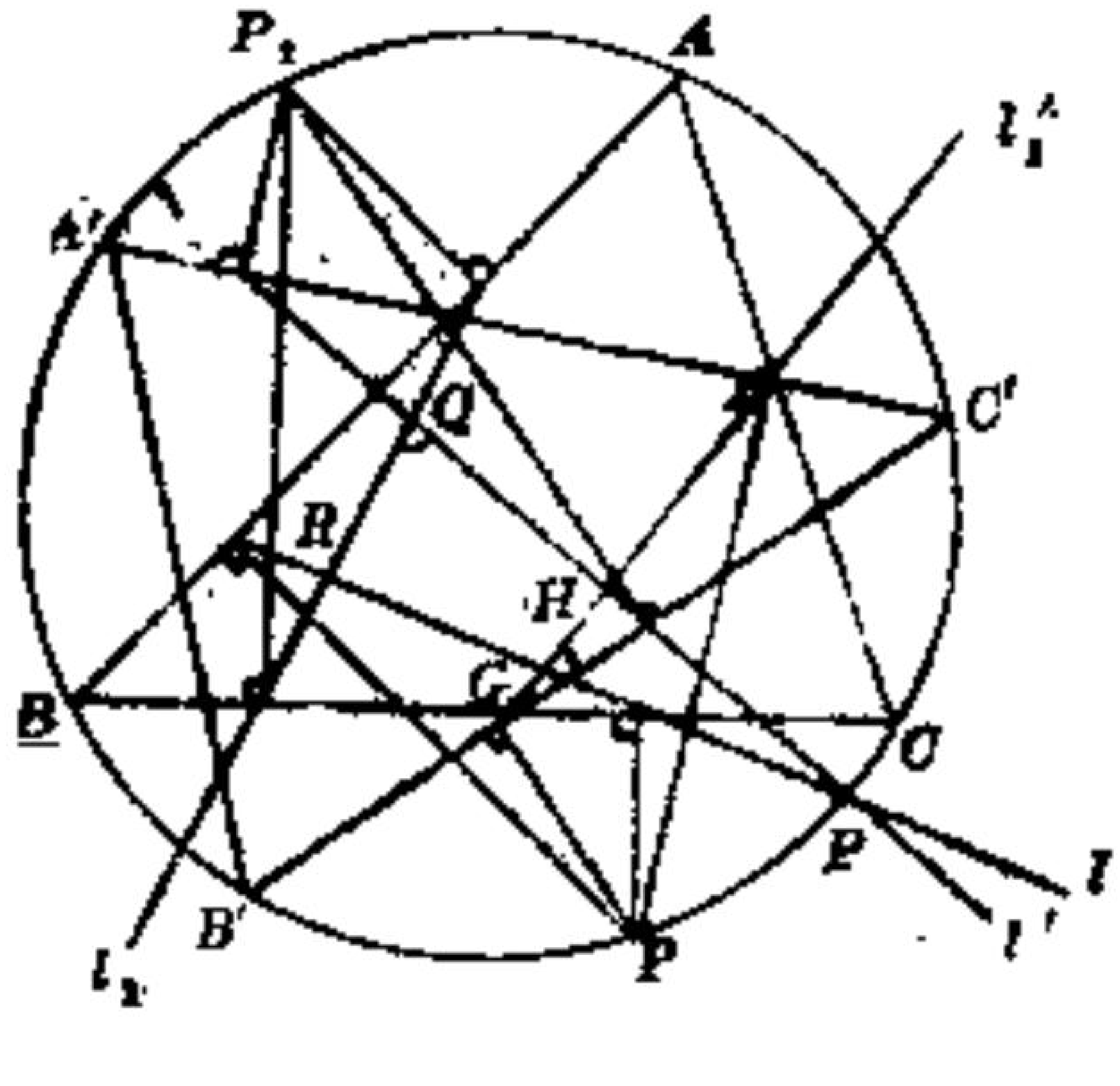
图复三—51

52．圆上任一点对于两个固定的内接三角形的西摩松线，它们的交角大小不因该点的位置而改变。

证明：由49题知，P_1、P_2对$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的西摩松线l_1与l_2、l_1'与l_1'的交角均等于P_1P_2弦所对的圆周角，即两角相等。

$\therefore\quad \angle PRQ=\angle PHG$.

又P_1对$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的西摩松线l_1与l_1'的交角为$\angle PGH$；P_2对$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的西摩松线l_2与l_2'的交角为$\angle RQP$.



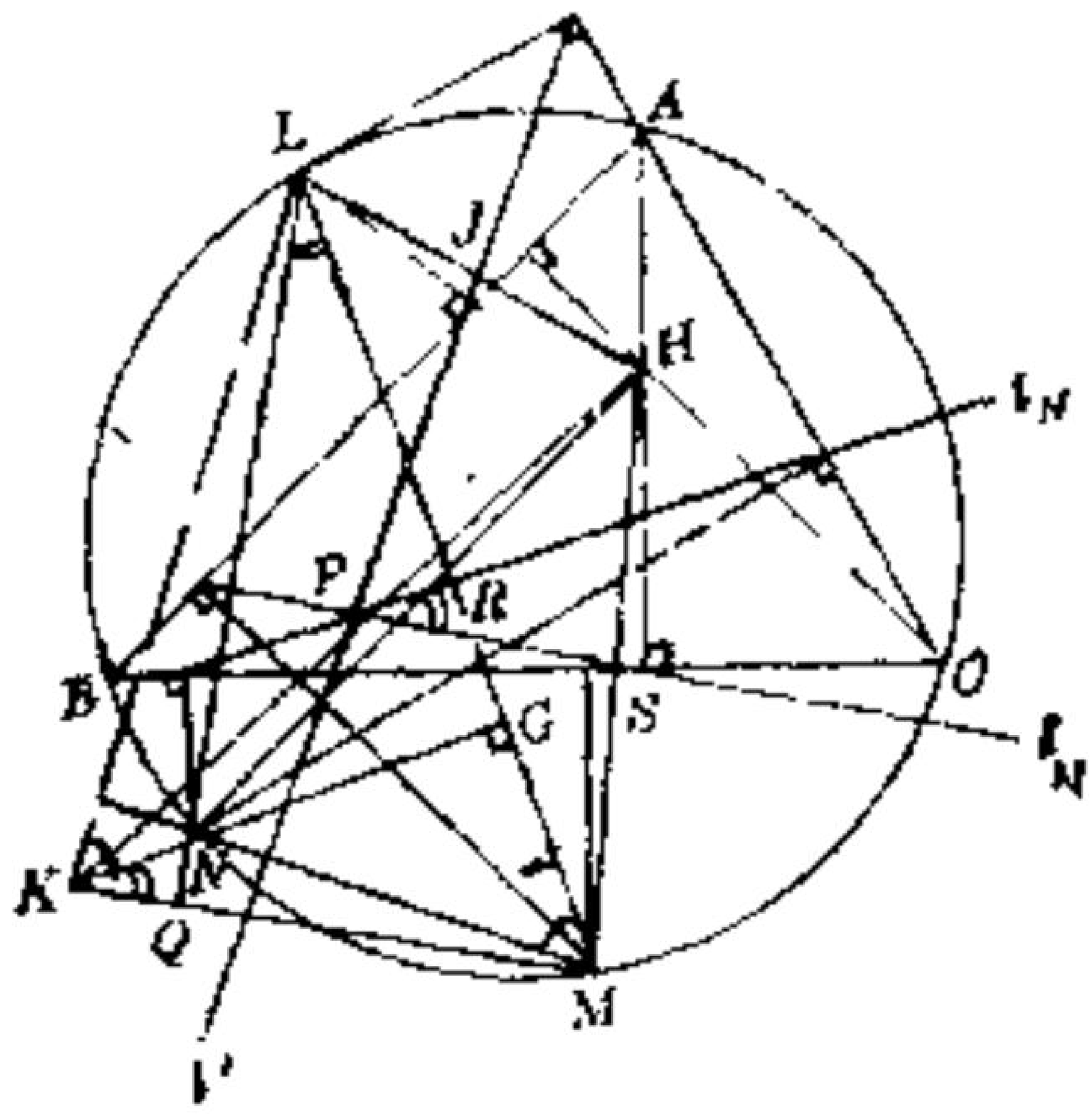
图复三—52

在$\triangle PGH$与$\triangle PQR$中，

$\because\quad \angle PRQ=\angle PHG$，$\therefore\quad \angle PGH=\angle PQR$.

故点P在圆上任意位置，其对两个固定的内接三角形的西摩松线有固定的交角。

53．设H是$\triangle ABC$的垂心，M、N是外接圆上两点，P是这两点的西摩松线上的交点，K是H关于P的对称点。求证：$\triangle KMN$的垂心L在$\triangle ABC$的外接圆上且L对于$\triangle ABC$的西摩松线垂直于MN而通过P点。



图复三—53—55

证明：设M、N对$\triangle ABC$的西摩松线为l_M、l_N其与HM、HN的交点为S、R，由37题知，S、R为HM、HN的中点，又P是HK的中点，

$\therefore\quad PR\parallel KN,$

$PS\parallel KM.$

过N作KM的垂线使交圆于L，连LM、LK．由$\angle RPS$为l_M与l_N的交角，$\therefore\quad \angle NKM=\angle RPS=\angle NLM.$

故有$\angle NGL=\angle NQK=90°$，$\therefore\quad KG\perp LM.$

故L为$\triangle KMN$的垂心。

令L对$\triangle ABC$的西摩松线为l'，其与l_N的交角等于弦LN所对的圆周角$\angle LMN$．由于$\angle LMN=\angle LKN$且$LN\parallel KN$，$\therefore\quad l'\parallel KL$．又$l'$过$HL$的中点$J$，故$l'$过$P$点

$\because\quad LK\perp MN$，故有$l'\perp MN$.

54．设 M、N 是$\triangle ABC$ 的外接圆上两点，自M引线垂直于N的西摩松线，又自N引线垂直于M的西摩松线，则所引两线会于圆上一点L，且L的西摩松线垂直于MN而与前两西摩松线共点。

证明：作 $ML\perp PR$，$NL\perp PS$，

则$\angle MLN=\angle RPS$，故L在外接圆上。

同上题证明，可得 $L'\perp MN$ 且过 P 点。

55．设L是$\triangle ABC$ 外接圆上一点，MN 是垂直于L的西摩松线的一弦，则 L、M、N 三点的西摩松线共点。

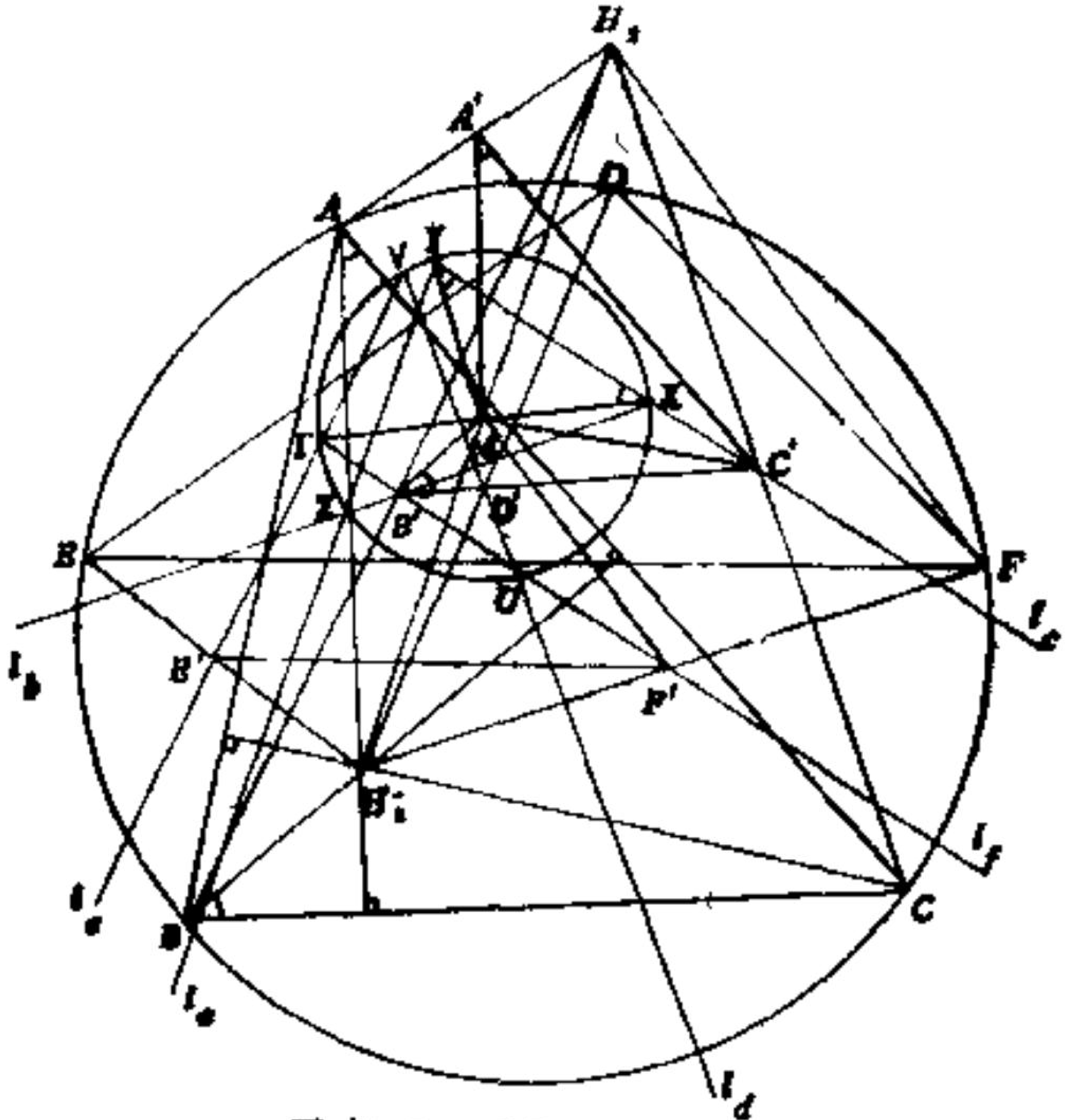
证明：作$\triangle LMN$ 的垂心 K，可得：

$LM\perp l_N$，$LN\perp l_M$，

$\therefore$ $l'\parallel LK$，故有L、M、N 三点的西摩松线共点于P．

56．设两三角形有共同的外接圆，则此形三顶点对于他形的三西摩松线的交点及他形三顶点对于此形的三西摩松线的交点凡六点共圆，圆心是两三角形的垂心连结线的中点。

证明：令H_1、H_2为$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$的垂心，其连线的中点为M，各顶点对$\triangle DEF$与$\triangle ABC$ 所作西摩松线分别为l_A、l_B、l_C、l_D、l_E、l_F，H_1与D、E、F 连线的中点为D'、E'、F'；H_2 与 A、B、C 连线的中点为 A'、B'、C'．由37题知，所得六个中点分别为l_D、l_E、l_F、l_A、l_B、l_C 与 H_1D、H_1E、H_1F、H_2A、H_2B、H_2C的交点，又



图复三—56

X、Y、Z 为 l_A、l_B、l_C 三线的交点；T、U、V 为三线 l_D、l_E、l_F 的交点，于是有：$MA' \parallel H_1A$，$MB' \parallel H_1B$，$MC' \parallel H_1C$，$B'C' \parallel BC$，$C'A' \parallel CA$，

∴ $\angle B'MC' = \angle BH_1C = 180^\circ - \angle BAC$.

又由49题有 l_B、l_C 的交角 $\angle BX'C = 180^\circ - \angle BAC$.

故有 B'、M、X、C' 四点共圆。

同理 C'、M、Y、A' 四点共圆。

$$\angle MXY = \angle MB'C' = \angle H_1BC = \angle H_1AC$$
$$= \angle MA'C' = \angle MYX.$$

故有 $MX = MY$，同理，$MY = MZ = MX$，

即 X、Y、Z 共圆，圆心为 M，

同理，T、U、V 也共圆，圆心为 M，

以下证明 $MX=MT$．

$\because$ $\triangle MB'C'\backsim\triangle H_1BC$，其相似比为1/2，

而$\triangle H_1BC$ 与$\triangle ABC$ 有相同的外接圆半径 R，故$\triangle MB'C'$的外接圆半径为$R/2$，由正弦定理得：

$$MX=2\cdot\frac{1}{2}R\sin\angle MC'X=R\sin\angle MC'X.$$

同理 $MT=2\cdot\frac{1}{2}R\sin\angle MF'T=R\sin\angle MF'T$.

由于$\angle MC'X$ 等于 H_1C 与l_C 所交成的角，而$\angle MF'T$等于 H_2F 与 l_F 所交成的角，且 H_1C、l_C 与 l_F、H_2F为 C、F两点对$\triangle ABC$ 与$\triangle DEF$ 的西摩松线。由52题知，

$\angle MC'X=\angle MF'T$．

$\therefore$ $MX=MT$．

57．设两三角形有共同的外接圆，且其中一形的三顶点对于他形的三西摩松线会于一点，则他形三顶点对于此形的三西摩松线亦会于同一点，这点是两三角形的垂心连结线的中点。

证明：此题为上题的特殊情形，T、U、V 三点退缩为一点，即半径退缩为零而与圆心M重合，所以由上题知，A、B、C 三顶点对$\triangle DEF$ 的三西摩松线l_A、l_B、l_C 亦会于同一点M．即$\odot XYZ$ 亦退缩为一点。

58．设$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 透视且对应边互相垂直．P 是它们的透视中心，l 是它们的透视轴．求证：

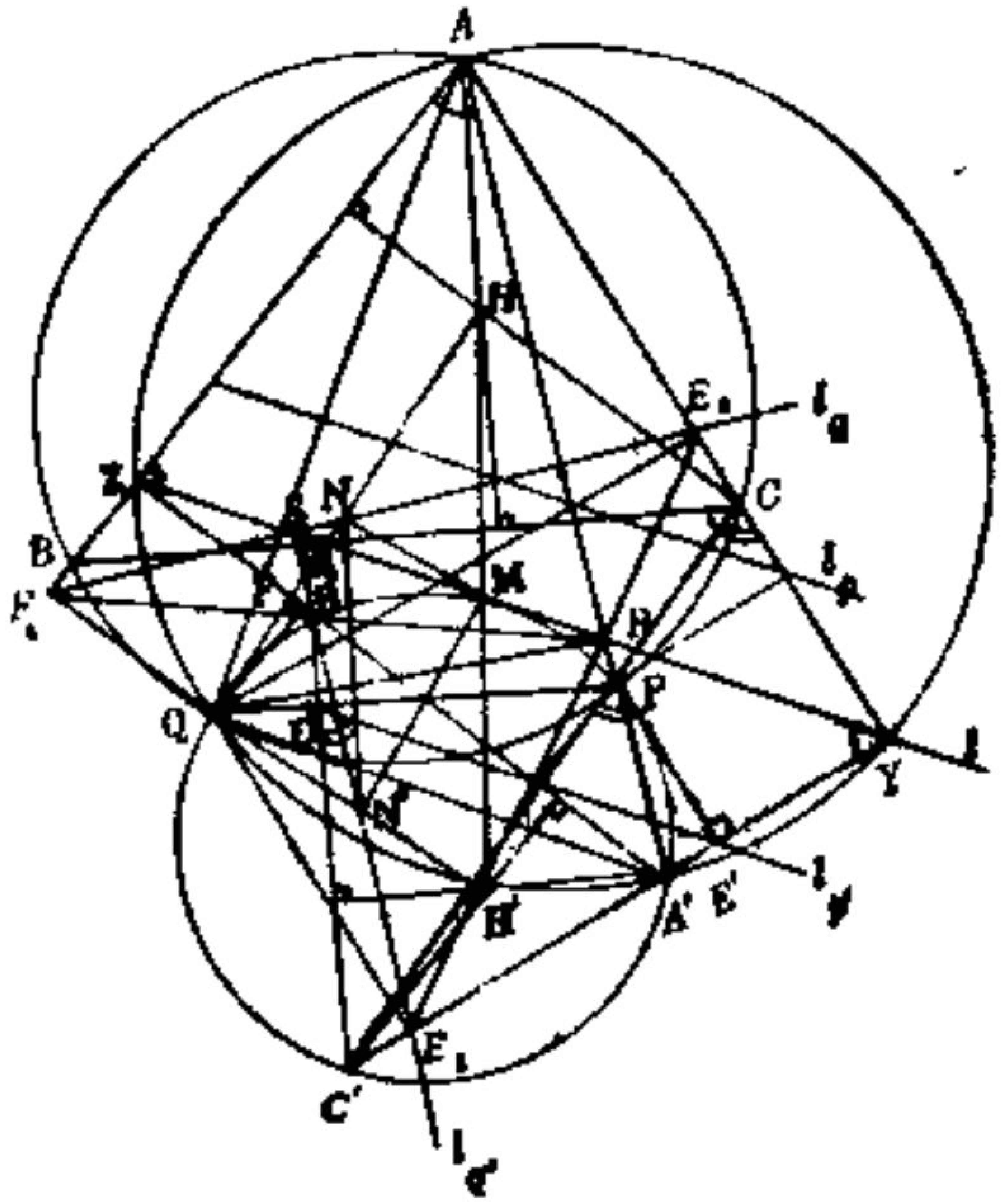
(1) P 是两三角形的外接圆交点之一；

(2) 直径为 AA'、BB'、CC' 的圆会于一点Q，这点是两外接圆的另一交点；

(3) P对于两三角形的西摩松线同平行于 l；

(4) Q对于两三角形的西摩松线与 l 共点；

(5) l 平分两三角形的垂心连接线。



图复三—58

证明(1)：∵ Z、A、Y、A' 与 X、C、Y、C' 均四点共圆，∴ $\angle ZAA'=\angle ZYA'=\angle XYC'=\angle XCC'$

即$\angle BAP=\angle BCP$，故 P 在$\odot ABC$ 上。

同理，P 在$\odot A'B'C'$ 上。

$$(2)：\angle AQA'=\angle AQP+\angle PQA'=\angle PCY$$
$$=\angle PCA'=90^\circ$$

故 Q 在以 AA' 为直径的圆上。

同理，直径为 BB'、CC' 的圆均过点 Q。

(3)：令 P 对$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 的西摩松线为l_P，

$l_{P'}$,

∵ $\angle C'D'E'=\angle C'PE'=\angle C'CY=\angle C'XY$,

∴ $l_{P'}/\!/l$，同理，$l_P/\!/l$.

(4)：令Q对$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$的西摩松线为l_Q、$l_{Q'}$，在l、l_Q、$l_{Q'}$上取对应点Y、Z、E_1、F_1、E_2、F_2共六点，使构成两个三角形$\triangle YE_1E_2$、$\triangle ZF_1F_2$. 内Q点作AA'的射影R，有E_1RE_2为Q在$\triangle AYA'$上的西摩松线；
且F_1F_2R为Q在$\triangle AZA'$上的西摩松线，故有$\triangle YE_1E_2$与$\triangle ZF_1F_2$的对应边交点A、R、A'共线，由$P166$笛沙格定理有对应顶点连线YZ、E_1F_1、E_2F_2共点，即l、l_Q、$l_{Q'}$共点于S.

(5)：连QH、QH'、HH'，有l_Q、$l_{Q'}$交QH、QH'于中点N、N'，令HH'的中点为M，

∵ $\angle QAH=\angle QAC-\angle HAC=\angle QA'C'-\angle HA'C'$
$=\angle QA'H'$,

有$\triangle QAH\backsim\triangle QA'H'$，而$\angle AQA'$为直角。

故$\triangle HQH'$为直角三角形，且有$\triangle AQA'\backsim\triangle HQH'$.

∵ Q、N'、M、N、S五点共圆，

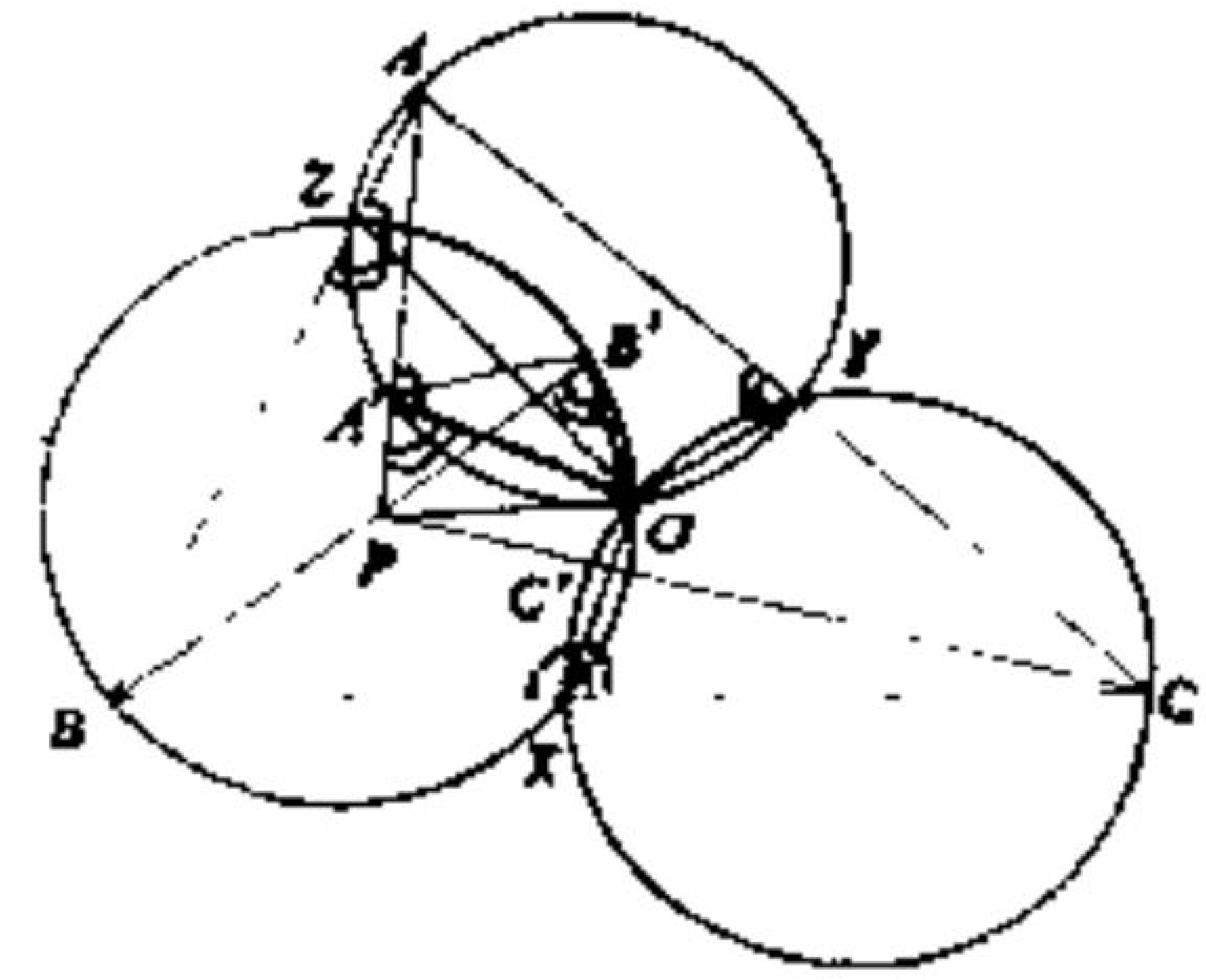
∴ $\angle MSN=\angle MN'N=\angle MHN=\angle H'HQ$
$=\angle A'AQ=\angle PAQ$.

∵ $l_P/\!/l$，故l与l_Q的夹角等于l_P与l_Q的夹角，由49题，其夹角等于$\angle PAQ$. 故M在l上，即l平分HH'.

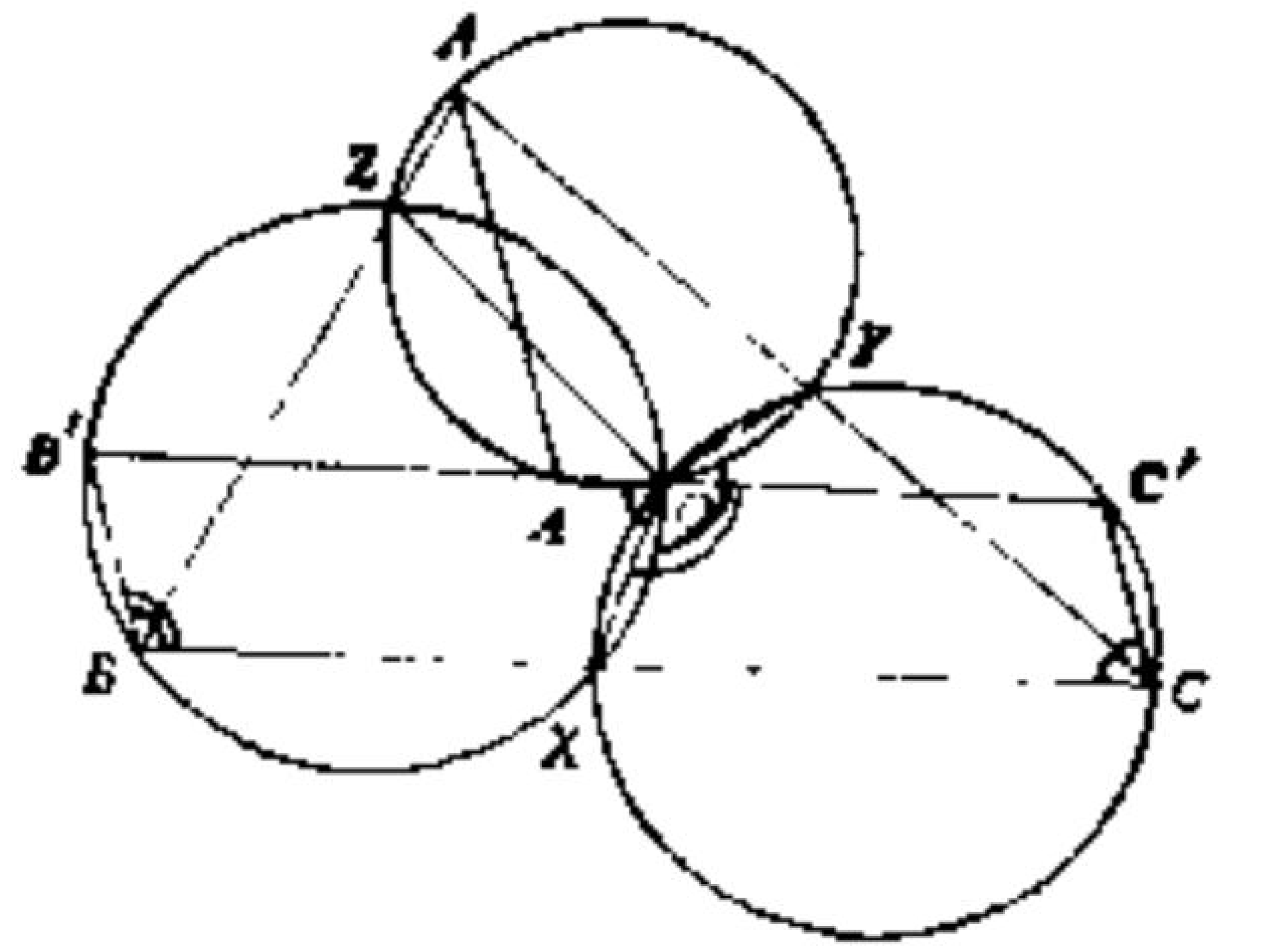
59. X、Y、Z各是$\triangle ABC$中BC、CA、AB上的点，设自A、B、C各引一直线a、b、c而分别交$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$于A'、B'、C'. 求证：当

(1) a、b、c会于一点P时，A'、B'、C'、O、P五点共圆；

(2) $a/\!/b/\!/c$时，A'、B'、C'、O四点共线。



图复三—59(1)



图复三—59(2)

证明：(1)：

$\angle PA'O=\angle OYA=\angle OZB=\angle OXC=\angle BB'O=\angle PB'O$，

∴ O、P、A'、B'共圆。

同理 O、P、B'、C'共圆。

60．已知$\triangle ABC$，设直线 l 交 BC、CA、AB 于X、Y、Z．求证：

(1) 在A、B、C各所引$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$的切线会于$\triangle ABC$的外接圆上一点，这点对于$\triangle ABC$的西摩松线与 l 垂直。

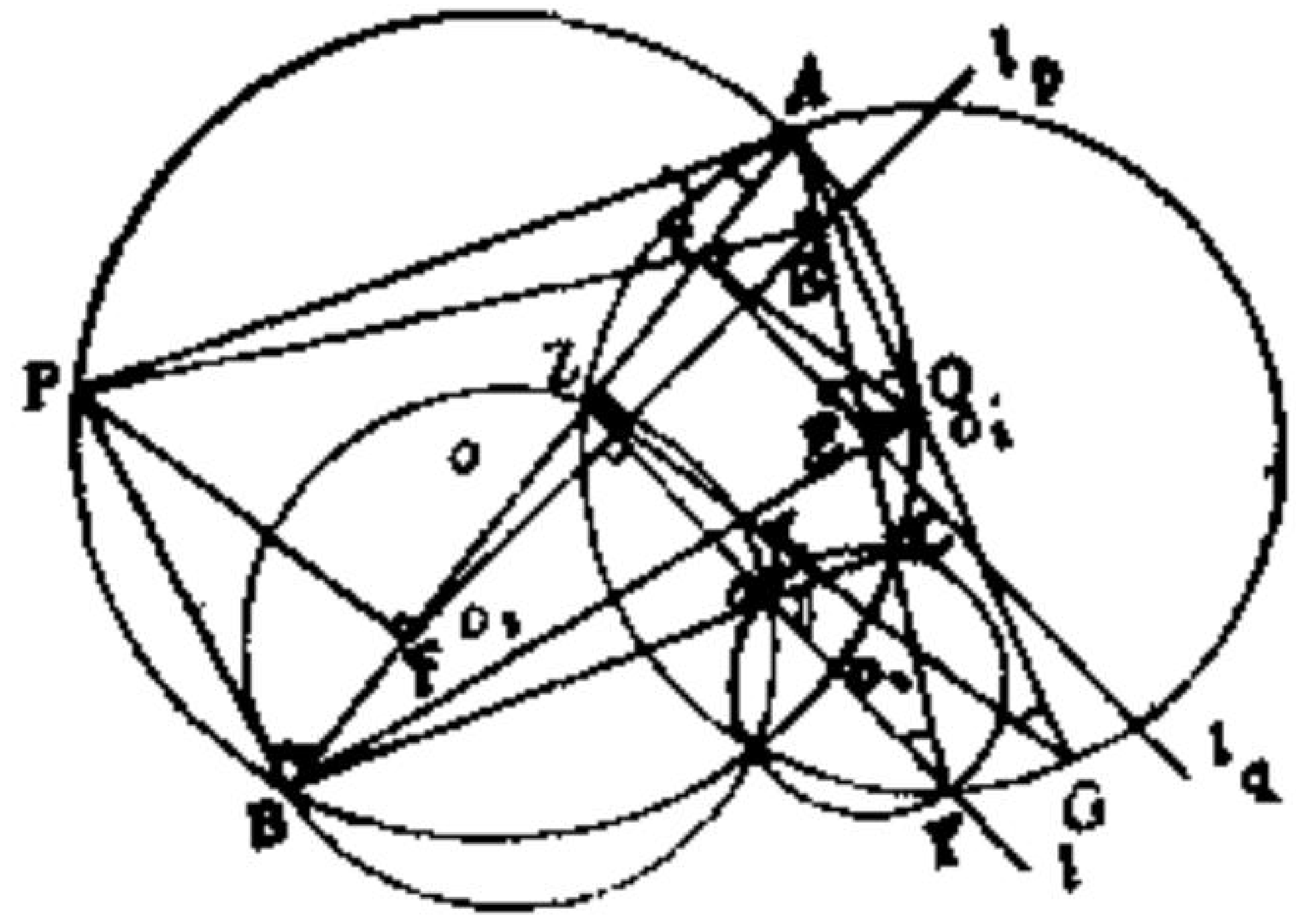
(2) 由A、B、C各所作$\odot AYZ$、$\odot BZX$、$\odot CXY$的直径（所在直线）也会于$\triangle ABC$的外接圆上一点，这点对于$\triangle ABC$的西摩松线与 l 平行。

证明(1)：作A点的切线交$\odot O$于P，连PB，则$\angle PAB=\angle AYZ$．

∵ $\angle ACB$与$\angle PAB+\angle PBA$均与$\angle APB$互补

∴ $\angle PBA=\angle BXZ$，

故 PB 是$\odot O_2$的切线，同理 PC 是$\odot O_3$的切线。



图复三—60

作 P 对 $\triangle ABC$ 的西摩松线 l_P，则 P、A、E、F 四点共圆，故 $\angle YEF=\angle APF$，∴ $l_P\perp l$。

(2)：作 AO_1 交⊙O 于 Q，则 $QA\perp AP$。

故 $\angle PBQ=90°$，而 PB 是⊙O_2 的切线，故 QB 是⊙O_2 的直径所在的直线。

同理 QC 是⊙O_3 的直径所在的直线。

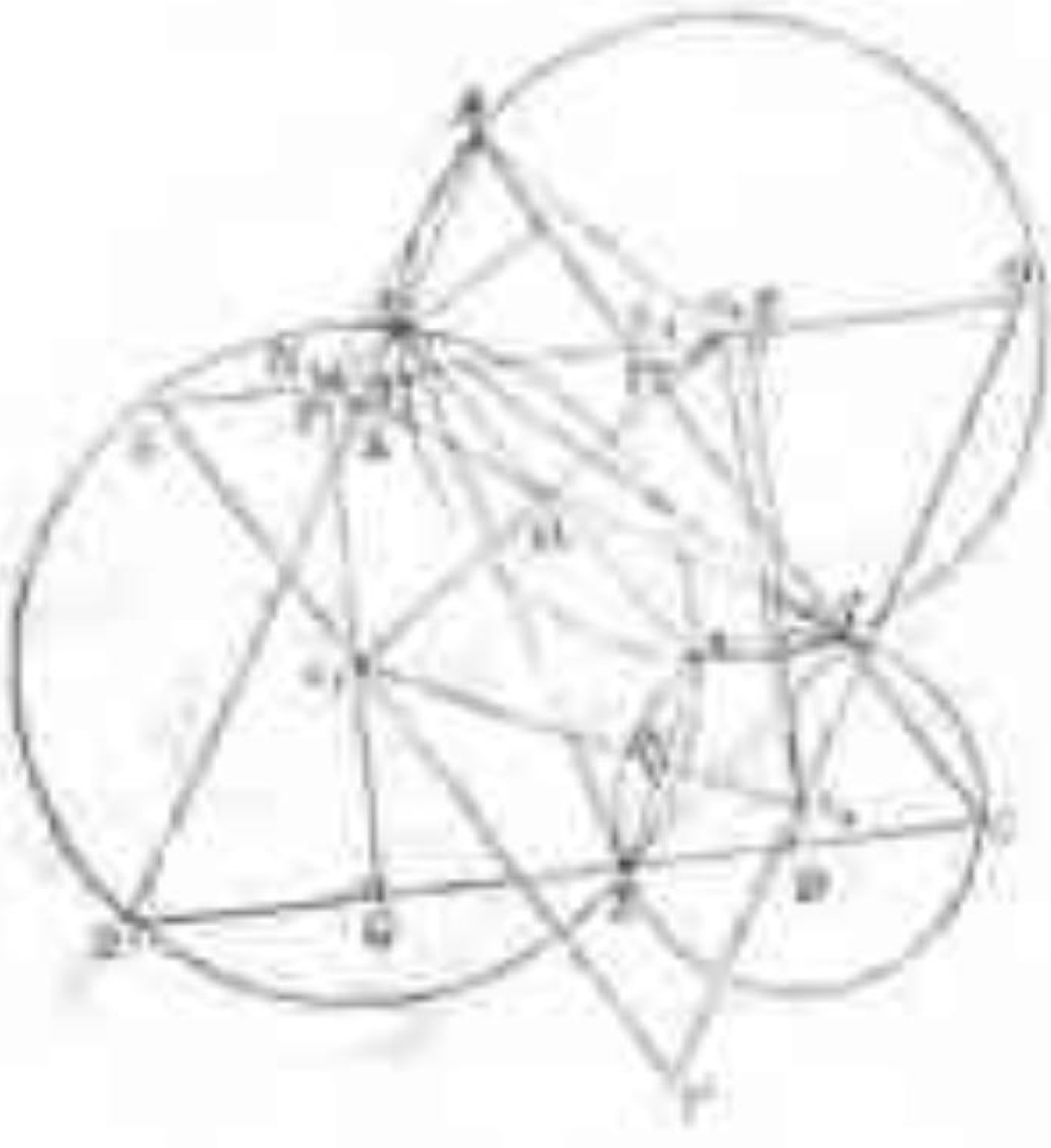
作 Q 对 $\triangle ABC$ 的西摩松线 l_Q，则 A、Q、E'、F' 四点共圆，且因 AG 是⊙O_1 的直径而有 $QF'\parallel GZ$。

∴ $\angle AE'F'=\angle AQF'=\angle AGZ=\angle AYZ$。

故有 $l_Q\parallel l$。

61. 在正三角形 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 或其延长线上各任取一点 X、Y、Z，求证：$\triangle AYZ$、$\triangle BZX$、$\triangle CXY$ 的欧拉线所交成的三角形合同于 $\triangle ABC$。

证：若一 $\triangle AYZ$ 是正三角形，则以过它的中心而平行于 BC 的直线来代替它的欧拉线。



图题三—61

证明：三角形外心、重心、垂心三者共线，称为欧拉线

令三欧拉线交成的三角形为$\triangle PQR$，$\triangle AYZ$的外心与垂心为O_1、H_1，作$O_1J\perp AY$于J，

有 $AJ=\frac{1}{2}AY=AK$.

又在$Rt\triangle H_1KZ$中，$\angle ZH_1K=60°$，

有 $H_1K=\frac{1}{2}ZH_1=O_1J$.

$\therefore$ $\triangle AH_1K\cong\triangle AO_1J$，故$AH_1=AO_1$.

令AB、AC交RQ于A_1、A_2，

由$\triangle AH_1A_1\cong\triangle AO_1A_2$，

得$\triangle AA_1A_2$为正三角形，故$RQ\parallel BC$.

同理，$PR\parallel CA$，$QP\parallel AB$，

$\therefore\triangle PQR$为正三角形，

$\because$ O、M、O_2、N四点共圆，得$\angle MO_2N=\angle B$.

故有$\triangle O_1O_2O_3$为正三角形，可得$\angle RO_1O_2=\angle QO_3O_1$.

$\therefore$ $\triangle RO_1O_2\cong\triangle QO_3O_1$，

故有$RO_1=QO_3$，$RO_2=QO_1$.

过O_2、O_3作BC的垂线交BC、QP于G、D、E、F，

则$FE=GD=\frac{1}{2}BC$.

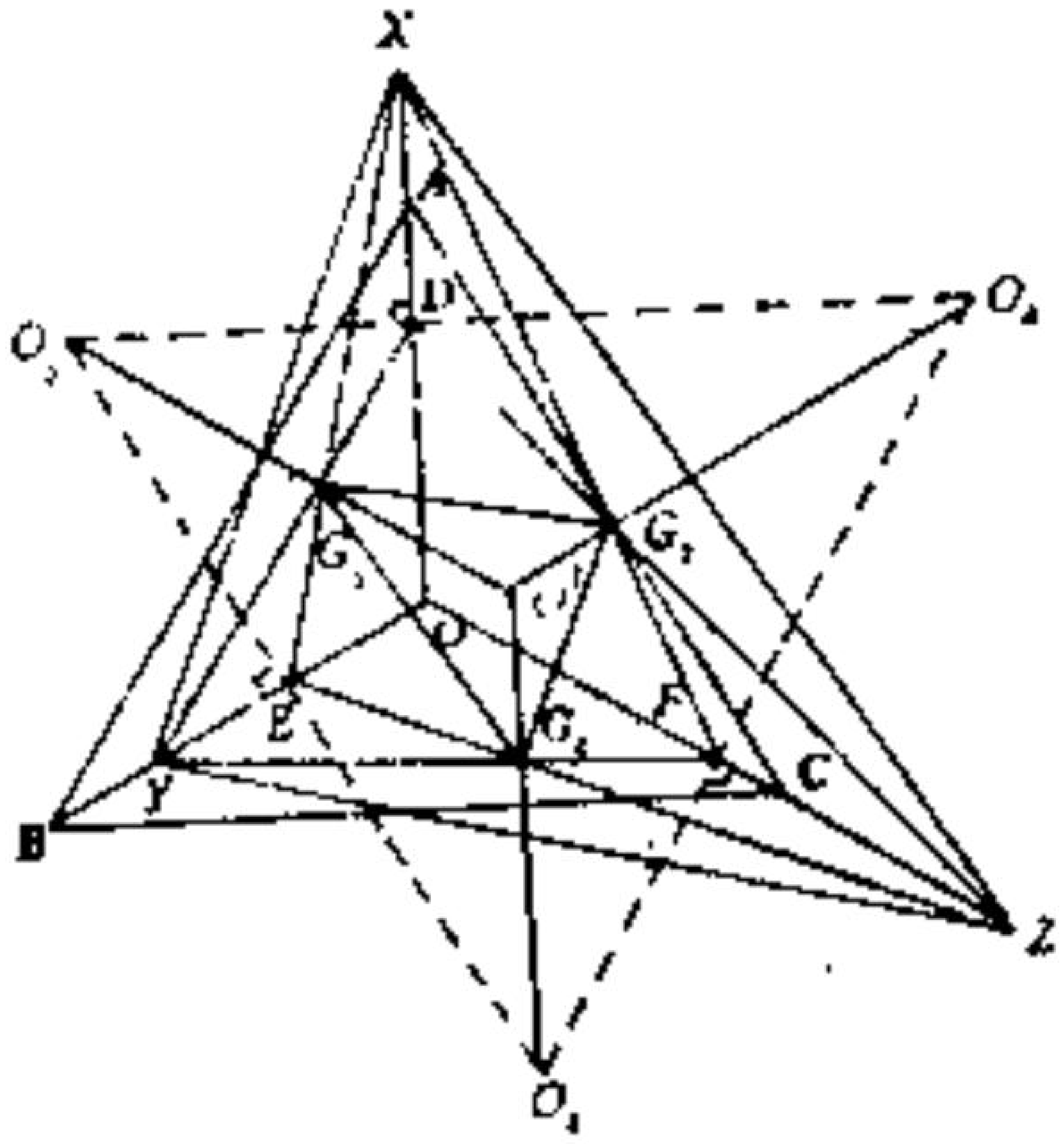
又由$\angle R=\angle Q=60°$，$\therefore$ $RF+QE=\frac{1}{2}(RO_2+QO_3)$

$=\frac{1}{2}(QO_1+RO_1)=\frac{1}{2}RQ$，故$EF=\frac{1}{2}RQ$，

$\therefore$ $RQ=BC$，$\triangle PQR\cong\triangle ABC$.

62．设O是正三角形$\triangle ABC$的中心，在直线OA、OB、OC上除O点外各任取一点X、Y、Z，求证：$\triangle OYZ$、$\triangle OZX$、

$\triangle OXY$ 的欧拉线共点。



图复三—62

证明：∵ $\triangle O_1O_2O_3$为正三角形，有$O_1G_1 \parallel OX$，$O_2G_2 \parallel OY$，$O_3G_3 \parallel OZ$。

令O_1G_1交O_3O_3于O'，则有$O'G_1 \parallel OX$，$O'G_3 \parallel OZ$。

又$\frac{EG_1}{G_1Z}=\frac{EG_3}{G_3X}$，∴ $G_1G_3 \parallel ZX$。

于是$\triangle O'G_1G_3 \backsim \triangle OXZ$。

同理$G_1G_2 \parallel YX$，$G_2G_3 \parallel ZY$。

于是$\triangle G_1G_2G_3 \backsim \triangle XYZ$。

∴ O'与O是$\triangle G_1G_2G_3$与$\triangle XYZ$的对应点，

故有$\angle G_2O'G_3=\angle YOZ$。

∵ $O'G_3 \parallel OZ$，∴ $O'G_2 \parallel OY$。

而$O_2G_2 \parallel OY$，故$O'G_2O_2 \parallel OY$。

∴ $\triangle OZX$的欧拉线过O'点。

故有$\triangle OYZ$、$\triangle OZX$、$\triangle OXY$的欧拉线共点。

63. 圆上四点两两连成四个三角形，非圆上任一点关于这四个三角形各得一等角共轭点。试证所得四点共圆或共线。

证明：令 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4 是 P 点关于 $\triangle ABD$、$\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle ACD$ 的等角共轭点，

则 $\angle AQ_1B=\pi-(\angle Q_1AB+\angle Q_1BA)$

$=\pi-(\angle PAD+\angle PBD)$，

$\angle AQ_2B=\pi-(\angle Q_2AB+\angle Q_2BA)$

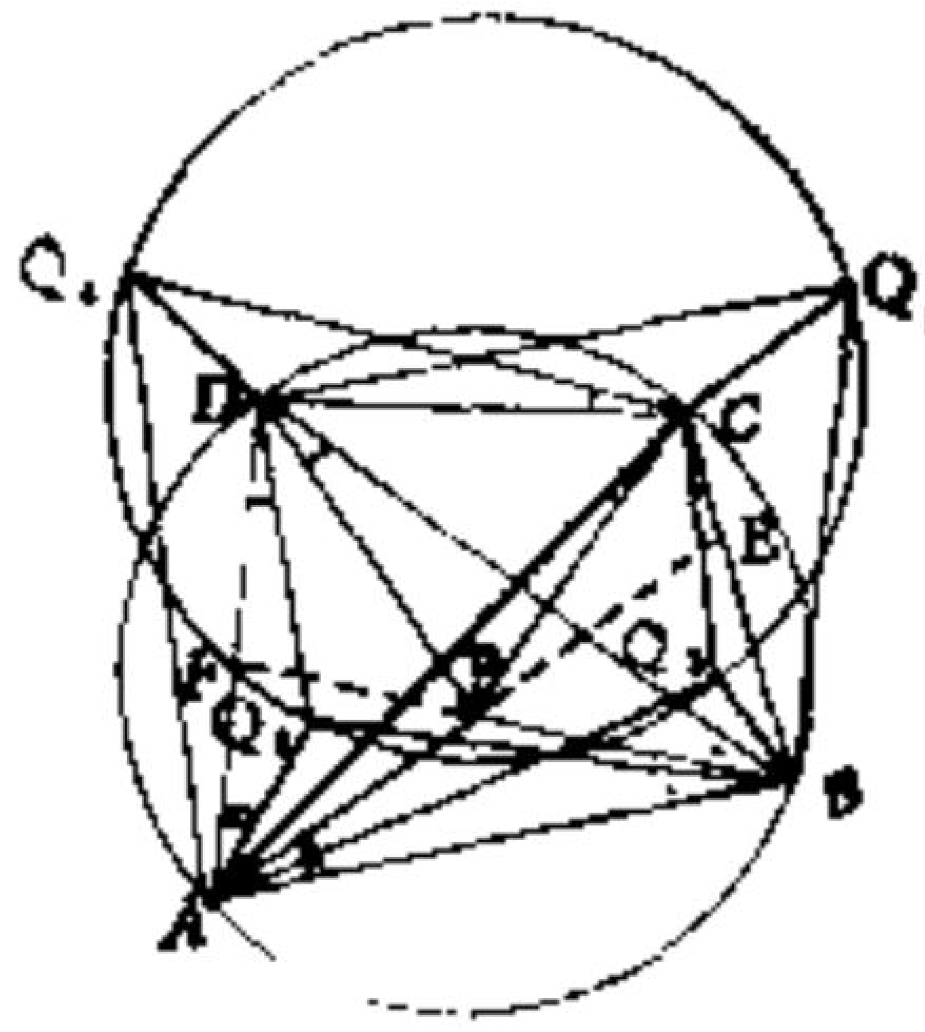
$=\pi-(\angle PAC+\angle PBC)$

又 $\angle APB=\angle PFA+\angle PAF$

$=\angle ADB+\angle PBD+\angle PAD$， ①

及 $\angle APB=\angle PEB+\angle PBE$

$=\angle ACB+\angle PAC+\angle PBC$． ②



图复三—63

由①、②及 $\angle ADB=\angle ACB$，

有 $\angle PAD+\angle PBD=\angle PAC+\angle PBC$．

$\therefore$ $\angle AQ_1B=\angle AQ_2B$，有 A、B、Q_2、Q_1 共圆，

同理，B、C、Q_2、Q_3，C、D、Q_3、Q_4，D、A、Q_4、Q_1 均四点共圆．

由 P195 定理 151，得 Q_1、Q_2、Q_3、Q_4 共圆或共线．

64．设作圆内接四边形两对角线的等角线，求证：

（1）所作四线同切于一圆；

（2）每边与其两端所作的线所构成的三角形，它们的垂心凡四点共线．

证明：（1）：令 AC 的两等角线 AA'、CC'；BD 的两等角线 BB'、DD'，四线的交点为 E、F、G、K．

则 $\angle GAB=\angle CAD=\angle CBD=\angle GBA$．

故 $\triangle GAB$ 为等腰三角形．

同理，$\triangle KBC$、$\triangle ECD$、$\triangle FDA$ 均为等腰三角形．

$\because$ $EF+GK=(ED-FD)+(GB-BK)=EC-FA+GA-CK=EK+GF$，

∴ 四边形 $EFGK$ 有内切圆。

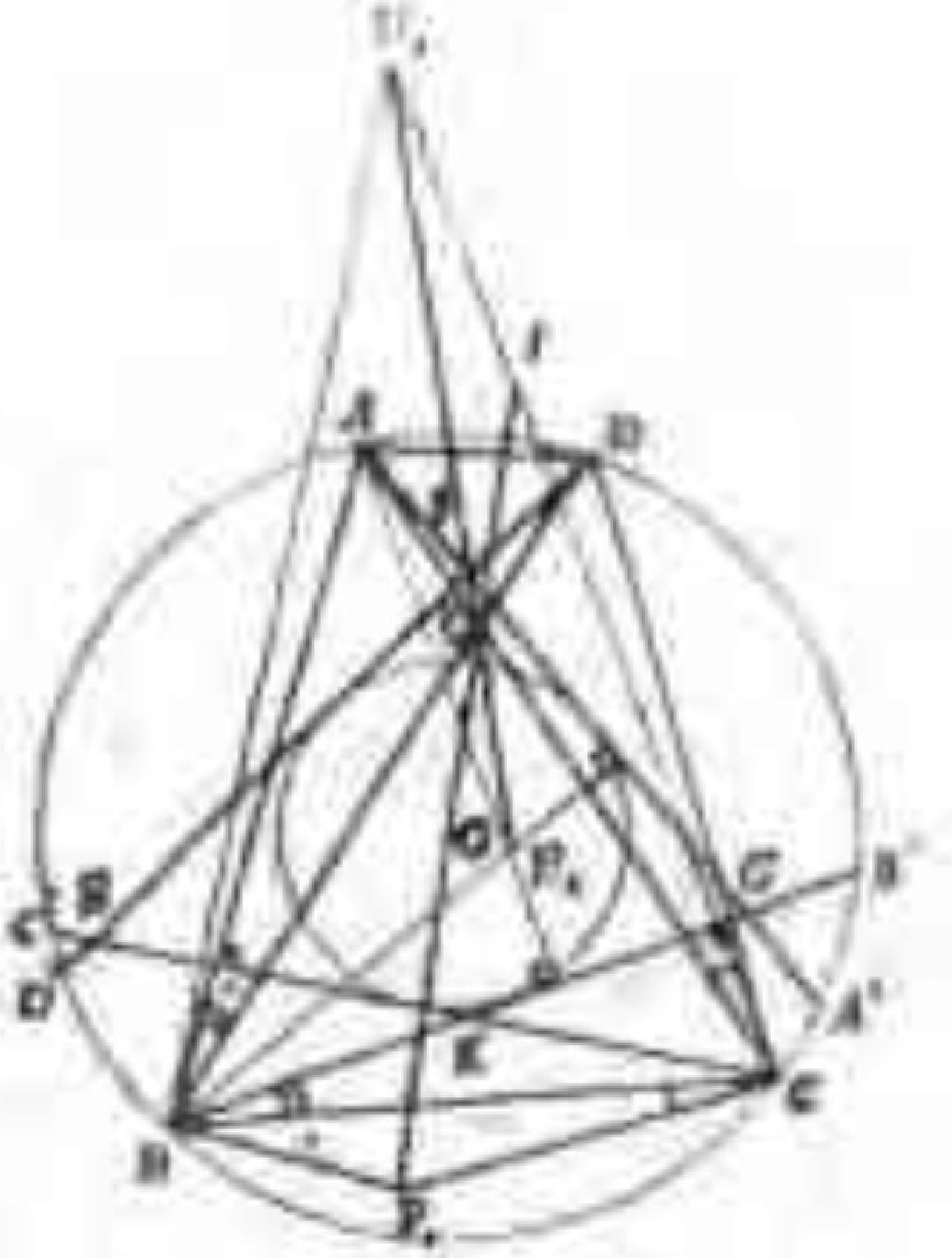
(二)。作 $P_2B \perp AB$，$P_2C \perp CD$，再作 P_2 关于 $\triangle QBC$ 的等角共轭点 H_2。

∵ $\angle KBC = \angle DBA$
$= \angle DCA - \angle DCH_2$
$+ \angle ACH_2 - \angle DCH_2$
$+ \angle P_2CD = 90^\circ$
$- \angle BCH_2$，

∴ $\angle KBC + \angle BCH_2 = 90^\circ$，

故有 $CH_2 \perp KB$。

同理 $BH_2 \perp CK$，故 H_2 为等腰三角形 $\triangle KBC$ 的垂心。



图见三—64

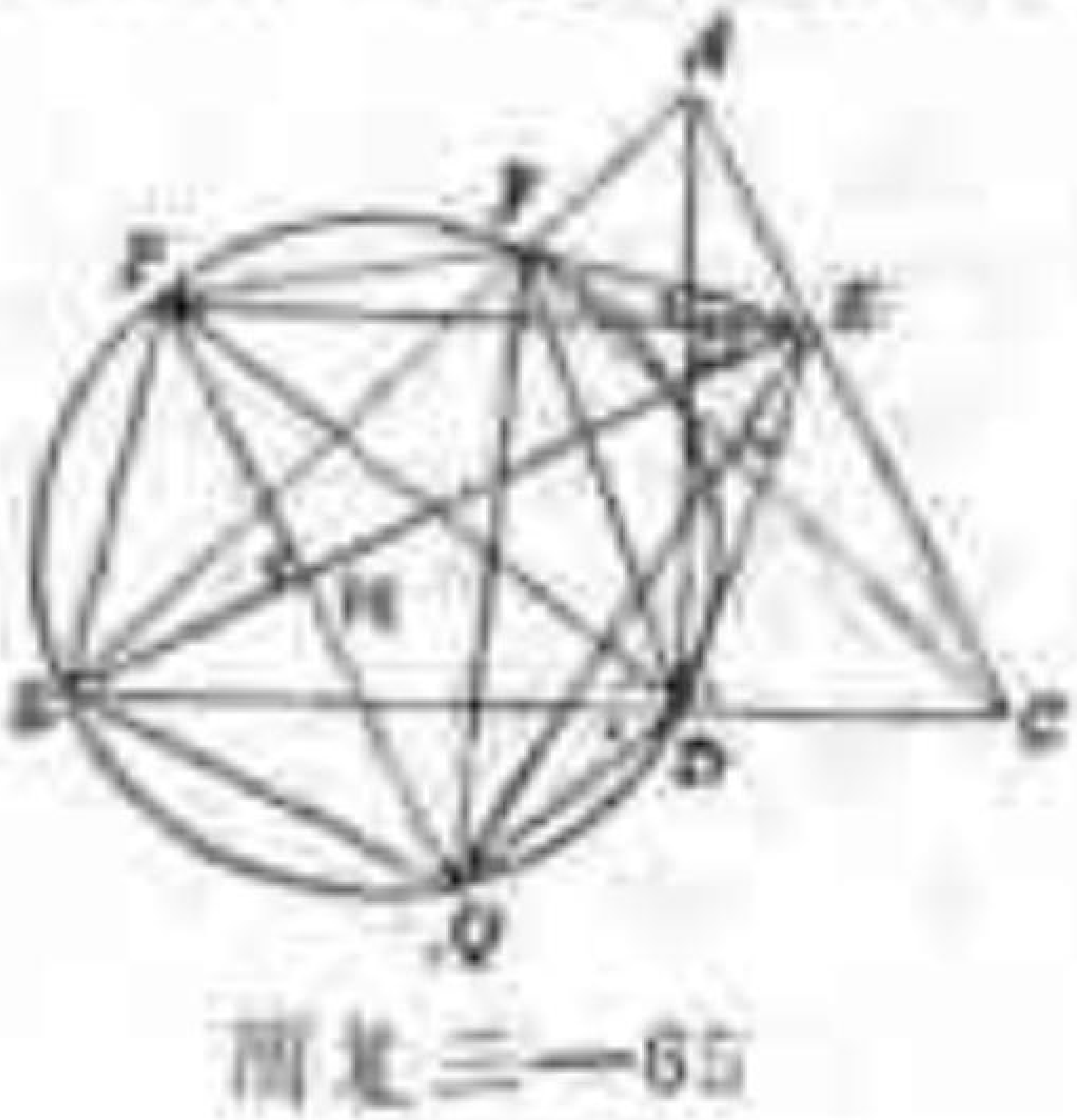
可以类似地作 CD、DA、AB 的两邻边的垂线，设交点为 P_3、P_4、P_1，再作它们关于 $\triangle OCD$、$\triangle ODA$、$\triangle OAB$ 的等角共轭点 H_3、H_4、H_1，则这三点为 $\triangle ECD$、$\triangle FDA$、$\triangle GAB$ 的垂心。由习题十四第8题知，P_1、P_2、P_3、P_4 共线且过 O 点，故 H_1、H_2、H_3、H_4 亦共线且过 O 点。

65. 试以一垂心组中任两点的连结线为直径作圆，则在此圆中，凡垂直于该直径的弦的两端点，都是垂心组的每三角形的等角共轭点。

证明：$\triangle DEF$ 为 $\triangle ABC$ 的垂足三角形，以 HB 为直径作圆，令 $PQ \perp HB$ 于 M。

∵ EH 是 $\angle DEF$ 的平分线，

∴ $\angle PEF = \angle QED$，即 PE、QE 是 $\angle DEF$ 的等角线。



图见三—65

又 AD、BD 是∠FDE的内、外角平分线，

∵ ∠PDF=∠PDH+∠HDE=∠PDH+∠HDF

=∠QDH+∠HDF=∠QDF=∠QPF，

有 ∠PDF+∠QDT=180°，

而 PH、QH 是∠PHQ的等角线。

同理 PF、QF 是∠EFD的等角线。

∴ P、Q 是△DEF的等角共轭点。

66．试证：三角形的内心及三旁心中任两点的连结线为直径作圆，则在此圆中，垂直于该直径的弦的两端点，都是三角形的等角共轭点。

证明：由习题二第55题知，三角形的内心及三旁心组成一个垂心组，由图15—6知，这个垂心组的垂三角形就是原三角形，由上题知本题结论成立。

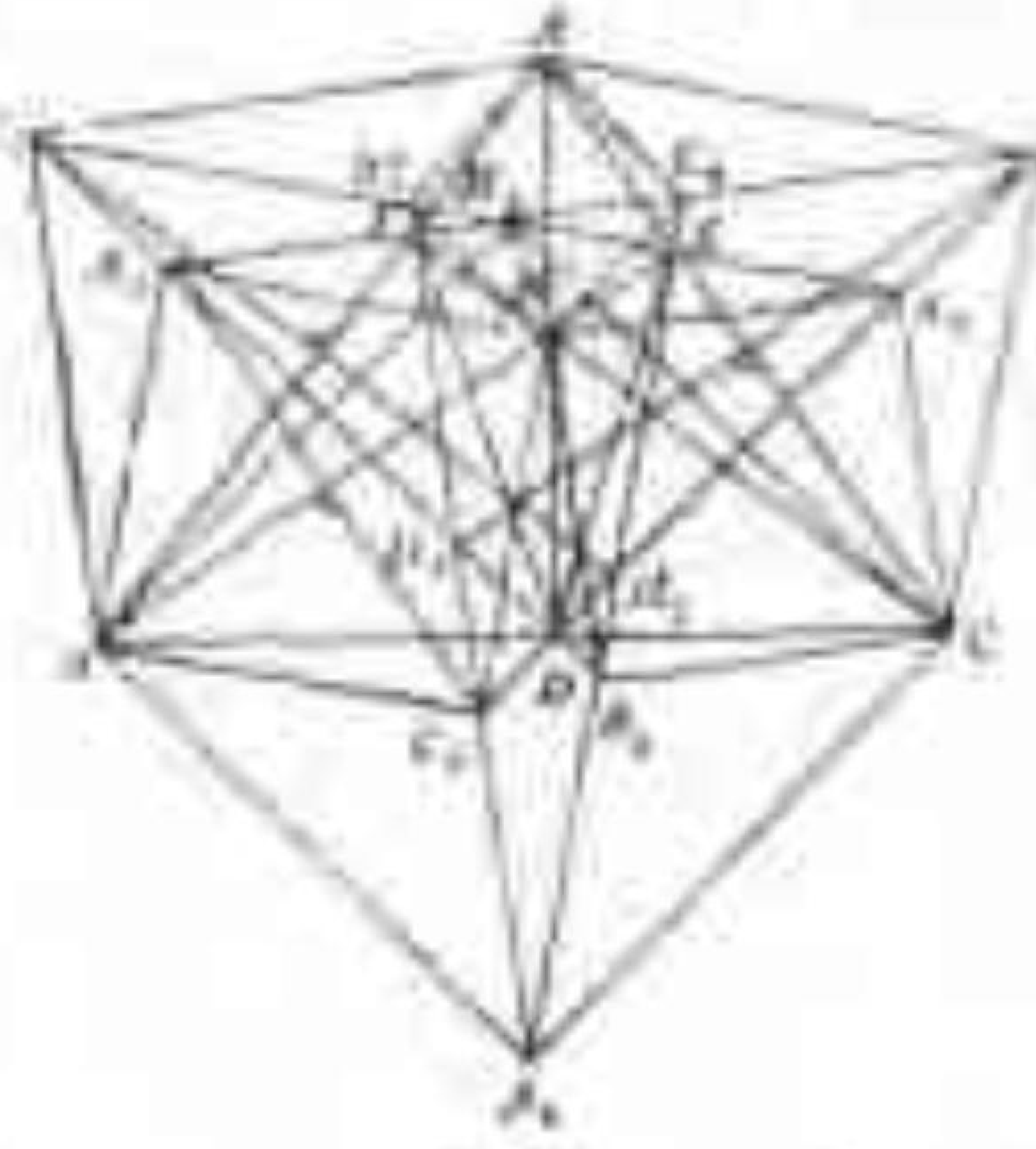
67．以一垂心组中任两点的连结线各为一对角线分别作正方形，这样所作六个正方形的顶点，除垂心组的四点外，余凡十二点，求证：

（1）它们是垂心组的垂三角形的六对等角共轭点；

（2）它们重合在三对垂直线上，每线上有四点。

证明（1）：以 AH、BH、CH 为对角线的正方形的另外两顶点为 C_1、C_2、A_2、A_3、B_2，以 AB、BC、CA 为对角线的正方形的另外两顶点为 C_3、B_1、A_1、B_1、B_2、B_3。

∵ A_1H_1 是垂直于以 BC 为直径的圆的横向



图题三—67

两端点，由65题知，A_1、H_1 是 $\triangle ABC$ 的垂足三角形 $\triangle DEF$ 的一对等角共轭点．

同理，B_2 与 H_2、C_3 与 H_3、B_1 与 C_1、A_2 与 C_2、A_3 与 B_3 都是 $\triangle DEF$ 的等角共轭点．

（2）：由 A、H、F、B_1 与 B、H、F、C_2 四点共圆，有 $\angle B_1FH+\angle C_2FH=\pi-\angle B_1AH+\angle C_2BH=\pi$．

$\therefore$ B_1、F、C_2 三点共线．

同理可得 B_1、F、H_2，B_1、F、A_1 亦三点共线．

故 B_1、H_2、C_2、A_1 共线且过 F，

同理，A_2、B_2、H_1、C_1 共线亦过 F．

$\because$ A_1、H_1、F、B 四点共圆，

有 $\angle A_1FH_1=\angle A_1BH_1=90°$，

即过 F 两直线互相垂直．

同理，过 D 点两直线与过 E 点两直线亦互相垂直．

68．设以一垂心组中每两点的连结线各为一对角线分别作矩形，使它们的边分别平行于互相垂直的两条定直线，则所作六个矩形的另一对角线（所在直线）会于垂心组的九点圆上一点．

垂心组中每三点所连成的三角形有共同的九点圆，这圆也叫做垂心组的九点圆．

证明（1）：设以 AH、BC 为对角线所作矩形的另一对角线 B_1C_1、A_1H_1 相交于 O，以 CH 为矩形对角线的另一

对角线为 $A_3'B_3'$，且 P、M、R 为所作矩形的中心．由 $PR /\!/ AC$，$MR /\!/ BH$，

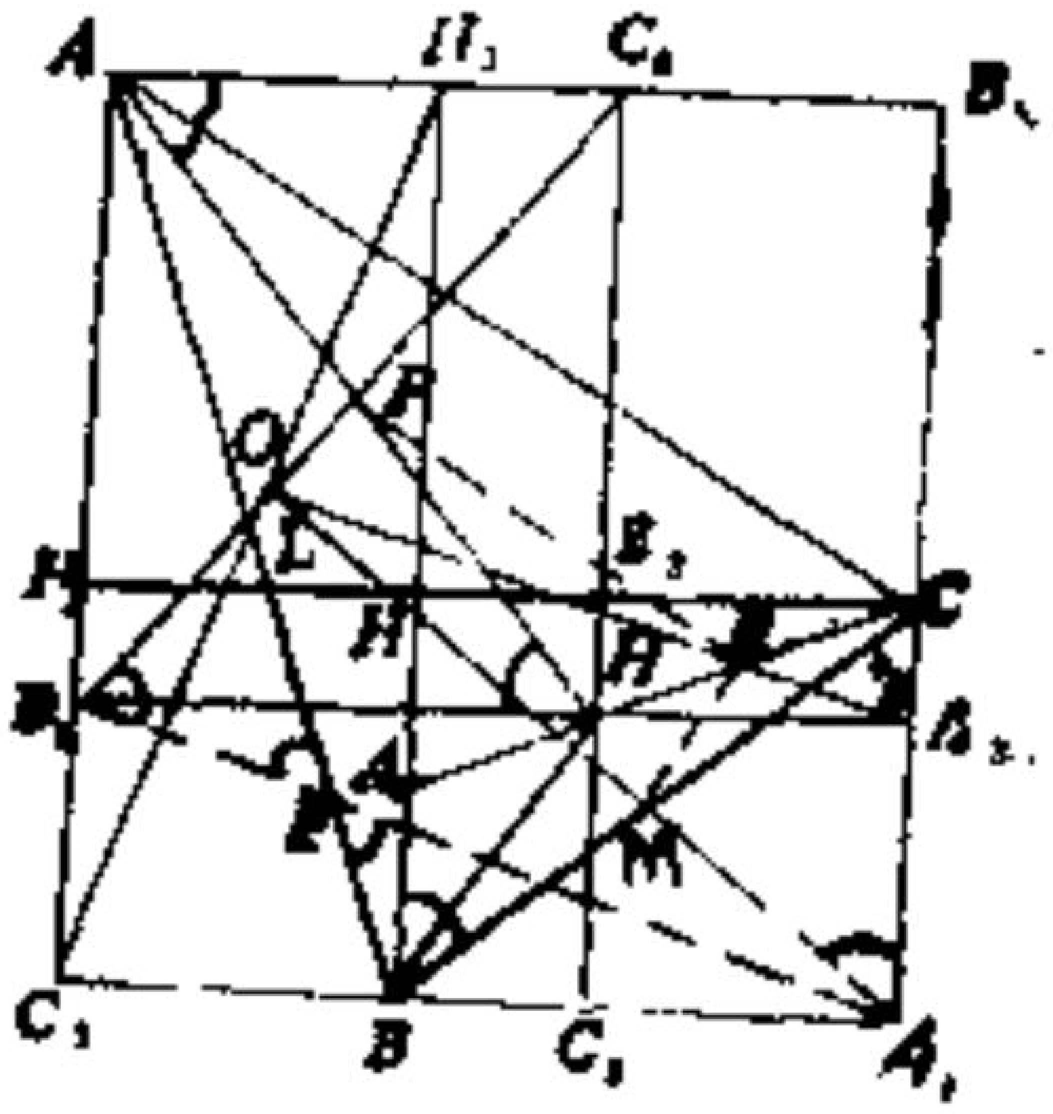
$\therefore$ $PR \perp MR$.

又 $\angle OA_1A_3' = \angle CBH_3 = \angle HAC_1$
$= \angle OB_1A_3$，

故 O、B_1、A_1、A_3' 四点共圆．

有 $\angle B_1OA_1 = \angle B_1A_3'A_1 = 90°$，

$\therefore MO \perp PO$.



图复三—68

$\therefore$ O、P、R、M 共圆，且此圆为垂心组的九点圆．

（2）：连 OA_3，由 B、A_1、F、C 及 B_1、A、H、F 四点共圆与 $AH \perp BC$，

有 $\angle BFA_1 = \angle BCA_1 = \angle H_3BC = \angle C_1AH = \angle B_1HA$
$= \angle B_1FA$，

故 CH 在 AB 上的垂足 F 在 A_1B_1 上，

又由 O、B_1、A_1、A_3 及 B_1、C_1、F、A 四点共圆与 $CH \perp AB$，

有 $\angle OA_3C = \angle OB_1A_1 = \angle C_1B_1F = \angle C_1AF$
$= \angle C_1AB = \angle C_1HC = \angle B_3HC$
$= \angle B_3A_3C$，

$\therefore$ $A_3'B_3'$ 过 O 点．

其余三个矩形的另一对角线也过 O 点可以类似证明．

69．三角形的外心至各顶点连结线的中点所连成的三角形，与原三角形的中点三角形有共同的九点圆．

三角形三边中点所连成的三角形，叫做原三角形的中点三角形．

证明：$\because OD\perp BC\parallel EF$，

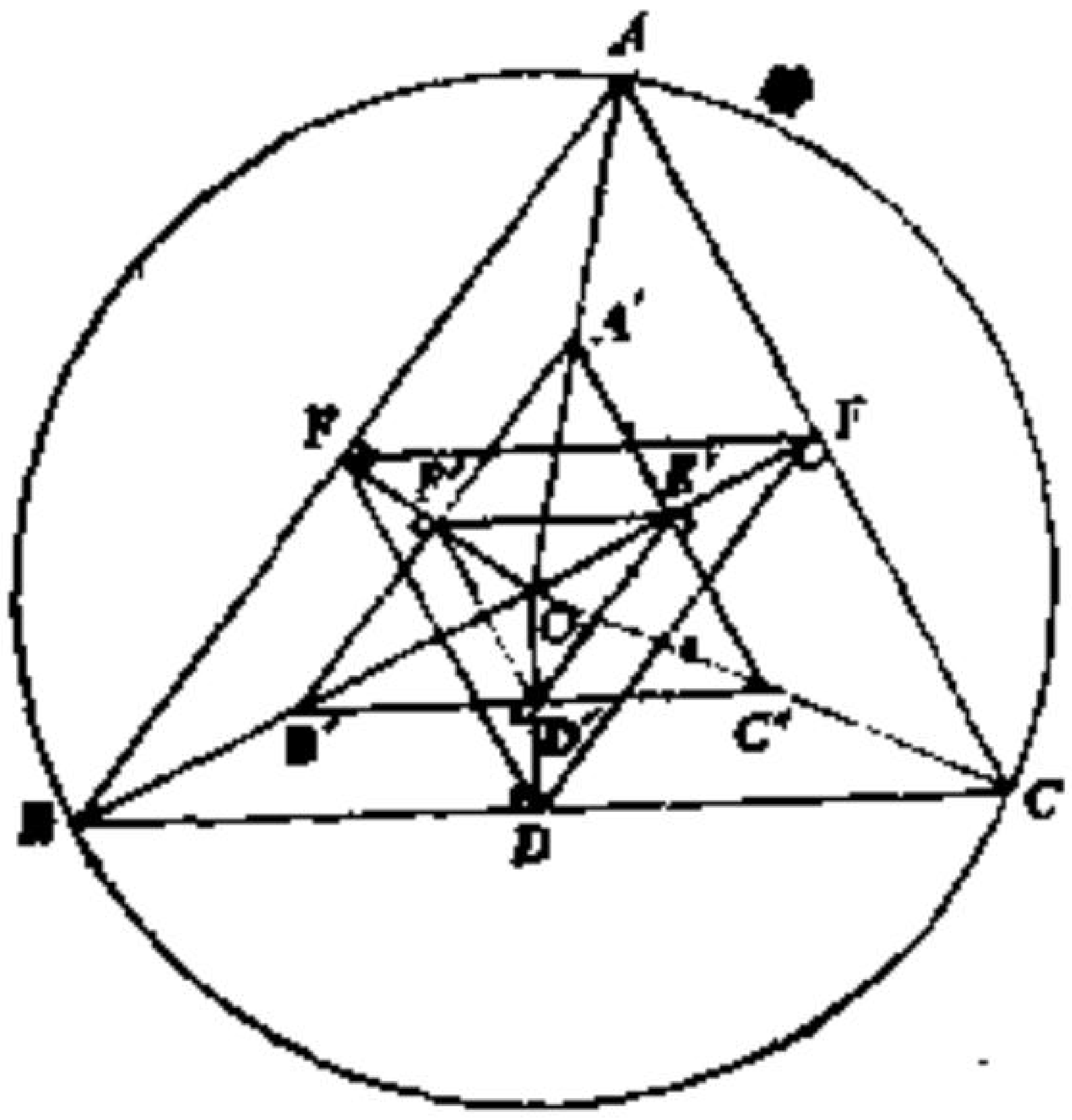
$OE\perp CA\parallel FD$，

$OF\perp AB\parallel DE$，

$\therefore O$ 是 $\triangle DEF$ 的垂心．于是 $\triangle D'E'F'$ 的外接圆是 $\triangle DEF$ 的九点圆．

又 D'、E'、F' 是 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 的中点，

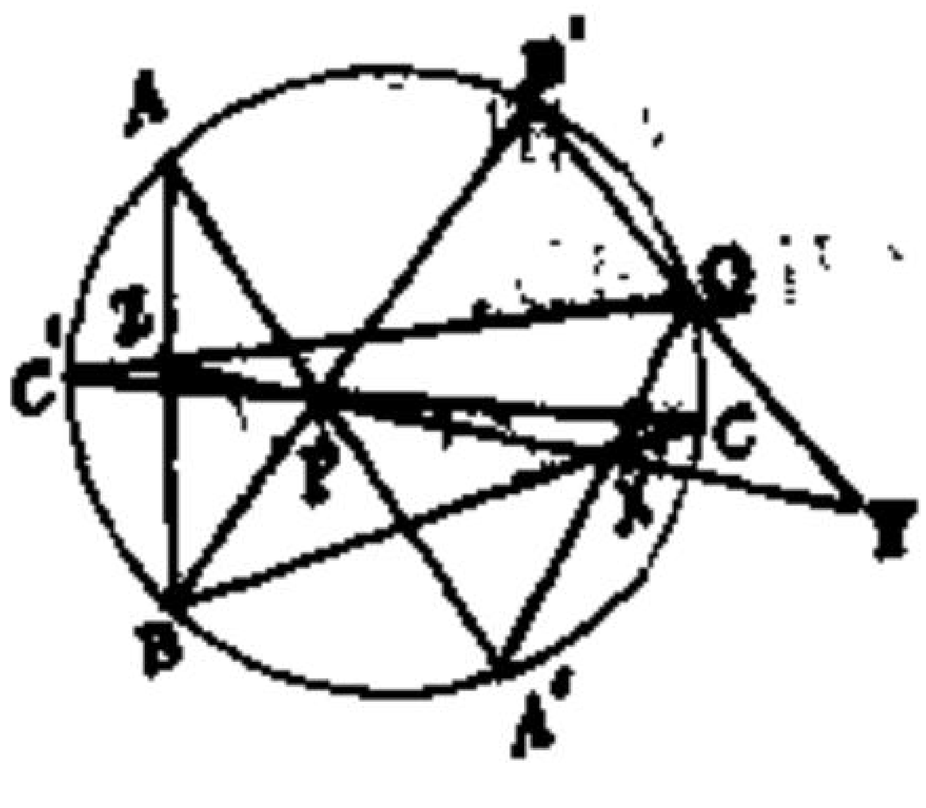
$\therefore$ $\odot D'E'F'$ 又是 $\triangle A'B'C'$ 的九点圆．



图复三—69

70．过 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 各作一直线使会于一点 P 而交外接圆于 A'、B'、C'，又在外接圆上任取一点 Q．求证 QA' 与 BC、QB' 与 CA、QC' 与 AB 的交点 X、Y、Z 共线．

证明：在圆内接六边形 $BCAA'QB'$ 中，其三双对边是 BC 与 $A'Q$、CA 与 QB'、AA' 与 $B'B$．由习题十四第 18 题，其交点 X、Y、P 共线；在圆内接六边形 $CBAA'QC'$ 中，其三双对边是 CB 与 $A'Q$、BA 与 QC'、AA' 与 $C'C$，故其交点 X、Z、P 共线．

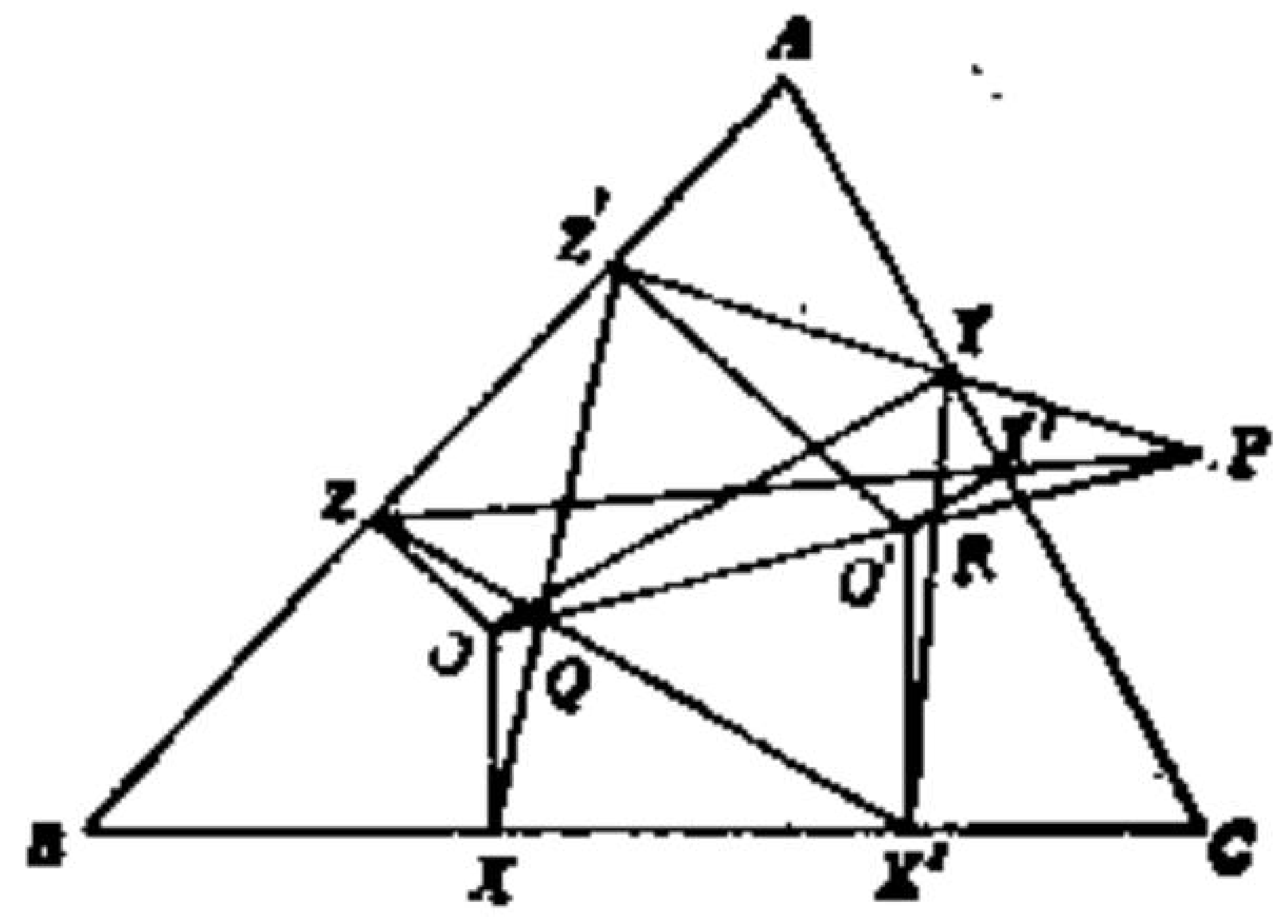


图复三—70

$\therefore$ X、Y、Z 共线且过 P．

71．O 与 O' 是 $\triangle ABC$ 的等角共轭点，X、Y、Z 及 X'、Y'、Z' 各是 O 及 O' 在 BC、CA、AB 上的射影．设 YZ' 与 $Y'Z$ 交于 P，ZX' 与 $Z'X$ 交于 Q，XY' 与 $X'Y$ 交于 R．求证 O、O'、P、Q、R 五点共线．

证明：由 P186 例题46 知 X、X'、Y、Y'、Z、Z' 六点共圆．在圆内接四边形 $XX'YY'$ 中，在弦 XY、$X'Y'$ 的两端点作两邻边的垂线，则其交点为 O、O'．由习题十四第 8 题知，O、O' 与四边形对角线的交点 R 共线．

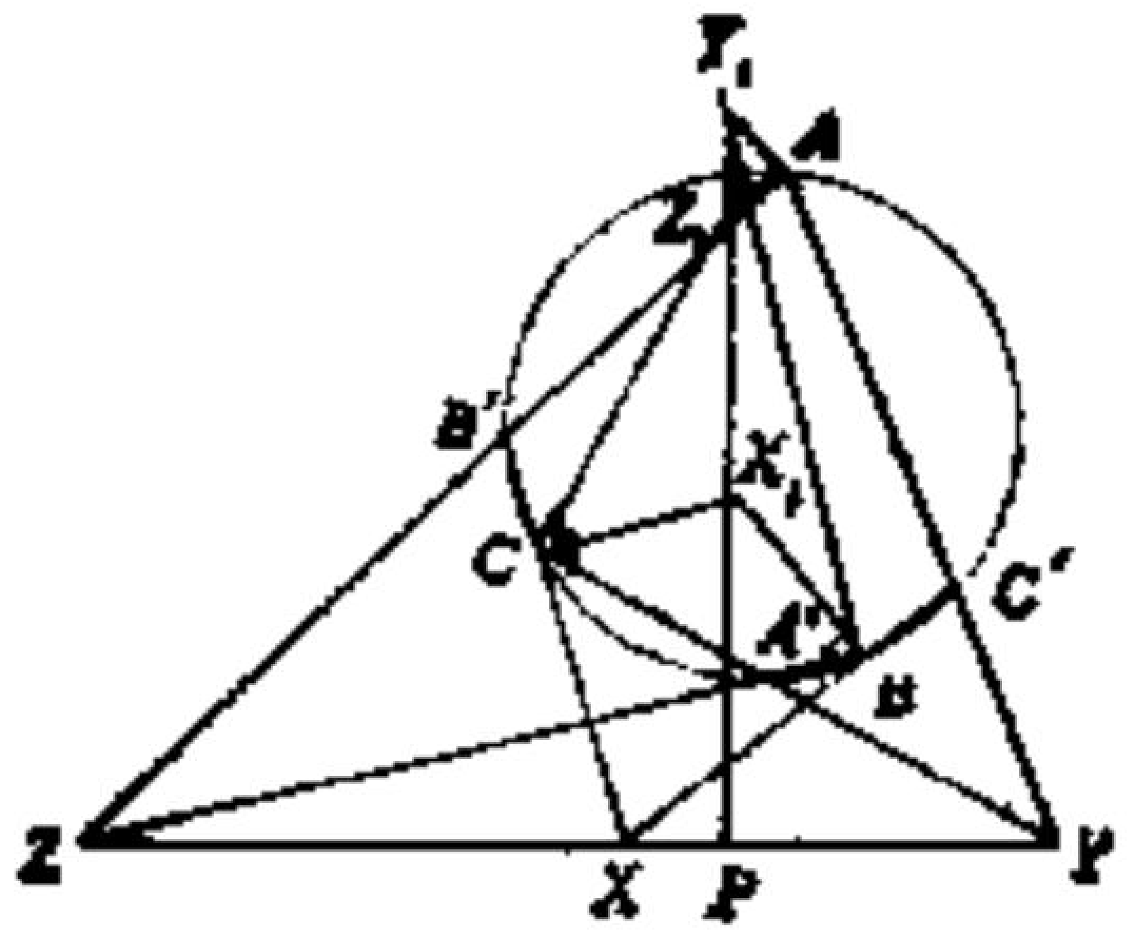


图复三—71

同理，P、Q 亦在直线 OO' 上．

72．自圆内接六边形相间的三顶点各作两邻接边的垂线．设垂直于对边者相交，则三交点共线．仿此，由其余三顶点作之，亦得类似的一线，这两线同垂直于六边形的巴斯开线．

证明：令 X_1、Y_1、Z_1 为自 A、B、C 所作两邻接边 BC' 与 $B'C$、AC' 与 $A'C$、AB' 与 $A'B$ 的垂线的交点，且 XYZ 是圆内接六边形的巴斯开线，作 X_1、Y_1、Z_1 在 XYZ 上的垂线，其垂足为 P、P'、P''．



图复三—72

∵ B、C、P，C、A、P'，A、B、P'' 分别在以 XX_1、YY_1、ZZ_1 为直径的圆上．即 P、P'、P'' 是 $\odot XBC$、$\odot YCA$、$\odot ZAB$ 与 XYZ 的交点．

由习题十七第 22 题知，$\odot XBC$、$\odot YCA$、$\odot ZAB$ 应会于一点且此点在 XYZ 上．故 P、P'、P'' 重合．

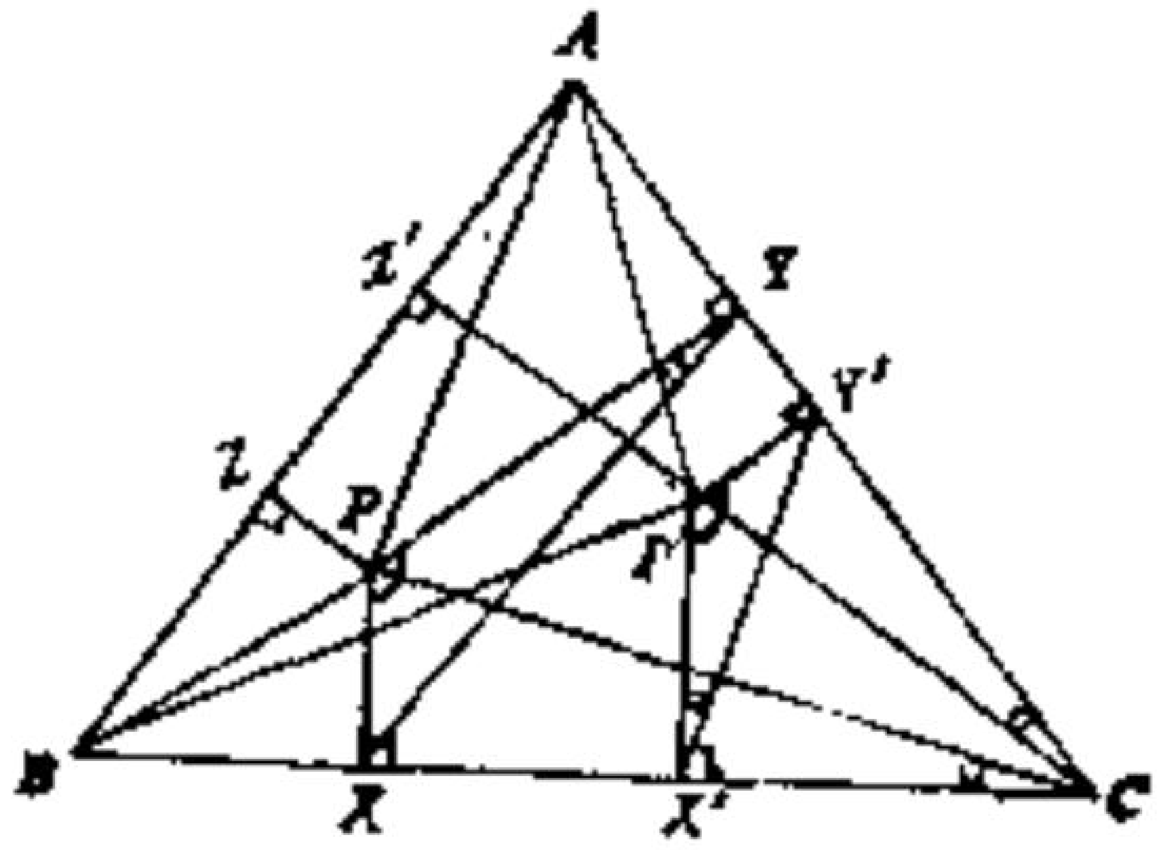
∴ X_1、Y_1、Z_1 共线且垂直于 XYZ．

同理，对A'、B'、C'作类似处理得X_2、Y_2、Z_2，亦共线并垂直于XYZ。

73. 设P及P'两点在$\triangle ABC$的三边BC、CA、AB所在直线上的射影为X、Y、Z及X'、Y'、Z'，则P与P'是$\triangle ABC$的等角共轭点的必要且充分的条件为：

$$\overline{PX}\cdot\overline{P'X'}=\overline{PY}\cdot\overline{P'Y'}=\overline{PZ}\cdot\overline{P'Z'}$$

证明（1）：



图复三—73

设$\overline{PX}\cdot\overline{P'X'}=\overline{PY}\cdot\overline{P'Y'}=\overline{PZ}\cdot\overline{P'Z'}$，

则$\dfrac{\overline{PX}}{\overline{PY}}=\dfrac{\overline{P'Y'}}{\overline{P'X'}}$，

有$\triangle PXY\backsim P'Y'X'$.

又P、C、X、Y与P'、C、X'、Y'均四点共圆.

$\therefore\quad\angle PCX=\angle PYX=\angle P'X'Y'=\angle P'CY'$.

即 PC、$P'C$是$\angle BCA$的等角线.

同理PA与$P'A$、PB与$P'B$各为$\angle CAB$、$\angle ABC$的等角线，故P、P'是$\triangle ABC$的等角共轭点.

（2）：设P、P'是$\triangle ABC$的等角共轭点，

则$\angle PYX=\angle PCX=\angle P'CY'=\angle P'X'Y'$.

又$\angle XPY=\angle Y'P'X'$，$\therefore\triangle PXY\backsim\triangle P'Y'X'$，

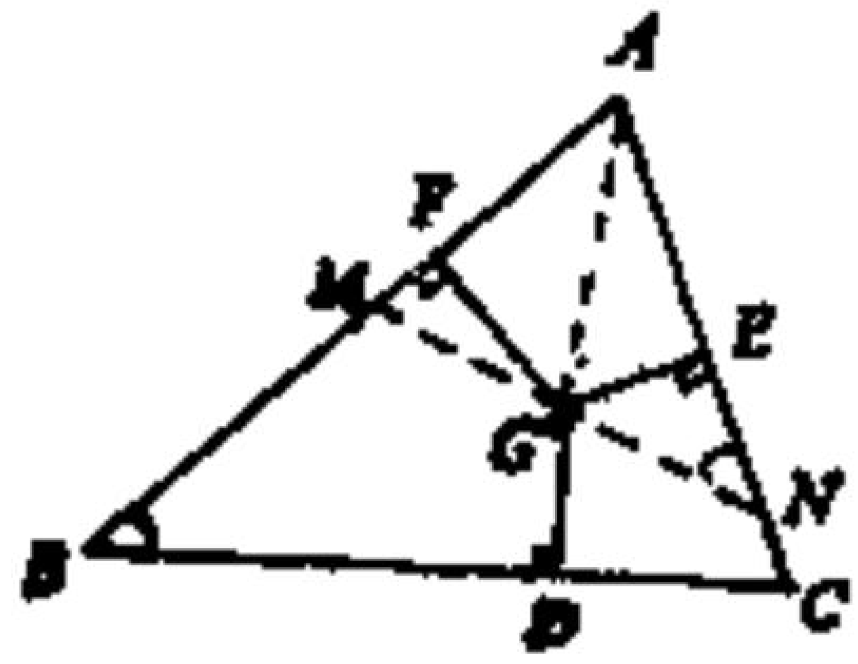
有 $\overline{PX}\cdot\overline{P'X'}=\overline{PY}\cdot\overline{P'Y'}$，

同理$\overline{PY}\cdot\overline{P'Y'}=\overline{PZ}\cdot\overline{P'Z'}$.

由（1）、（2）知所给条件为充要条件.

74. 三角形的陪位重心至三边的距离与三边成比例.

证明：设 G' 是 $\triangle AbC$ 的陪位重心，过 G' 作 BC 的逆平行线 NM．由陪位重心性质有 AG' 是 $\triangle AMN$ 的中线，



$\therefore\quad S_{\triangle AG'M}=S_{\triangle AG'N}$，

有 $\quad G'F\cdot AM=G'E\cdot AN$． ①

复图三—74

$\because\quad \triangle ABC\backsim\triangle ANM$，有 $\dfrac{AC}{AM}=\dfrac{AB}{AN}$． ②

①·② 得 $\quad G'F\cdot AC=G'E\cdot AB$，即 $\dfrac{G'E}{AC}=\dfrac{G'F}{AB}$．

同理有 $\quad \dfrac{G'F}{AB}=\dfrac{G'D}{BC}$，$\quad\therefore\quad \dfrac{G'F}{AB}=\dfrac{G'D}{BC}=\dfrac{G'E}{CA}$．

75．三角形的陪位重心至三边的距离平方和，小于其他点至三边的距离平方和．

证明：在恒等式 $\quad (a^2+b^2+c^2)(X^2+Y^2+Z^2)=(aX+bY+cZ)^2+(aY-bX)^2+(bZ-cY)^2+(cX-aZ)^2$ 中，令 a、b、c 表示 $\triangle ABC$ 的三边，X、Y、Z 表示任一点 P 到三边 a、b、c 的距离，则 P 到三边距离平方和为

$$X^2+Y^2+Z^2=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}[(aX+bY+cZ)^2+(aY-bX)^2+(bZ-cY)^2+(cX-aZ)^2]．\quad ①$$

当 P 为陪位重心时，由上题，有 $\dfrac{X}{a}=\dfrac{Y}{b}=\dfrac{Z}{c}$，

即 $\quad aY-bX=bZ-cY=cX-aZ=0$．

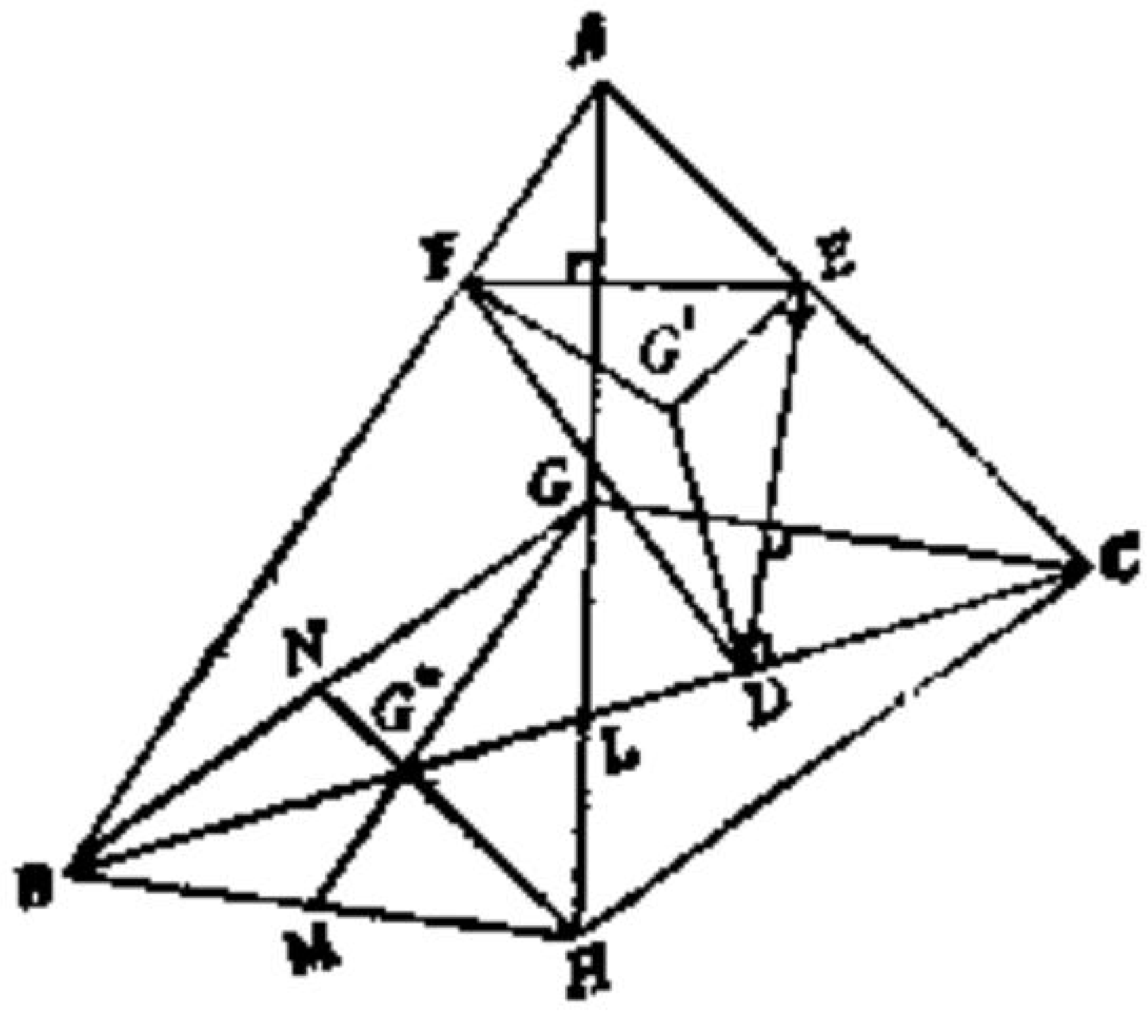
$\because\quad aX+bY+cZ=2\triangle$，$\triangle$ 为 $\triangle ABC$ 的面积，故陪位重心至三边的距离平方和由①得知为：$\dfrac{4\triangle^2}{a^2+b^2+c^2}$．

$\therefore\quad X_1^2+Y_1^2+Z_1^2>\dfrac{4\triangle^2}{a^2+b^2+c^2}$．

76.三角形的陪位重心是它的垂足三角形的重心.

自一点向已知三角形所在直线每边所在直线作垂线，则三垂足连成的的三角形叫做该点对于已知三角形的垂足三角形.

证明：G是$\triangle ABC$的重心，G'是$\triangle ABC$的陪位重心．作$BH /\!/ GC$且交AG于H，则$BHCG$是平行四边形．由P 175例题42知，



图复三—76

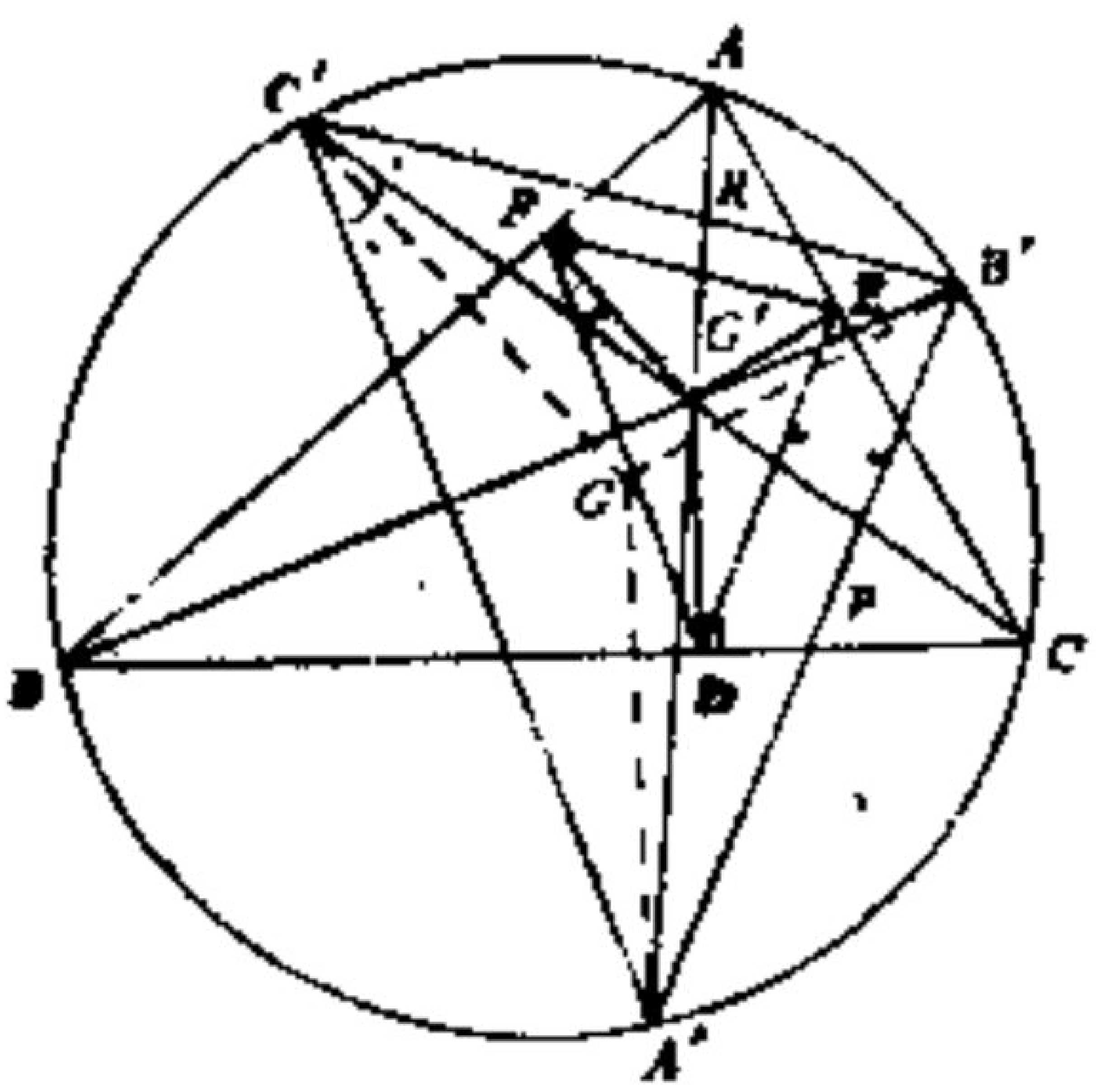
$AG\perp EF$，$BG\perp FD$，
$BH /\!/ CG\perp DE$，

$\therefore\ \triangle DEF\backsim\triangle BHG$，又 $G'D\perp BC /\!/ BL$，
$G'E\perp CA /\!/ HK$，$G'F\perp AB /\!/ GJ$，

即$G'D$、$G'E$、$G'F$分别垂直于$\triangle BHG$的三中线，而G''是$\triangle BHG$的重心，故其对应点G'是$\triangle DEF$的重心.

77.三角形的陪位中线交外接圆于三点，这三点连成的三角形与原三角形有共同的陪位重心.

证明：G'是$\triangle ABC$的陪位重心，D、E、F是G在BC、CA、AB的射影．由上题知，G'是$\triangle DEF$的重心.



图复三—77

由G'、A、E、F与G'、B、D、F四点共圆，

有 $\angle G'FD+G'FE$

$=\angle G'BD+\angle G'AE$

$=\angle G'C'B'+\angle G'C'A'$.

即 $\angle DEF=\angle A'C'B'$，故有 $\triangle A'B'C'\backsim\triangle DEF$.

设 G 是 $\triangle A'B'C'$ 的重心，则 $\triangle GC'A'\backsim\triangle G'FD$,

故有 $\angle G'C'B'=\angle G'FD=\angle GC'A'$.

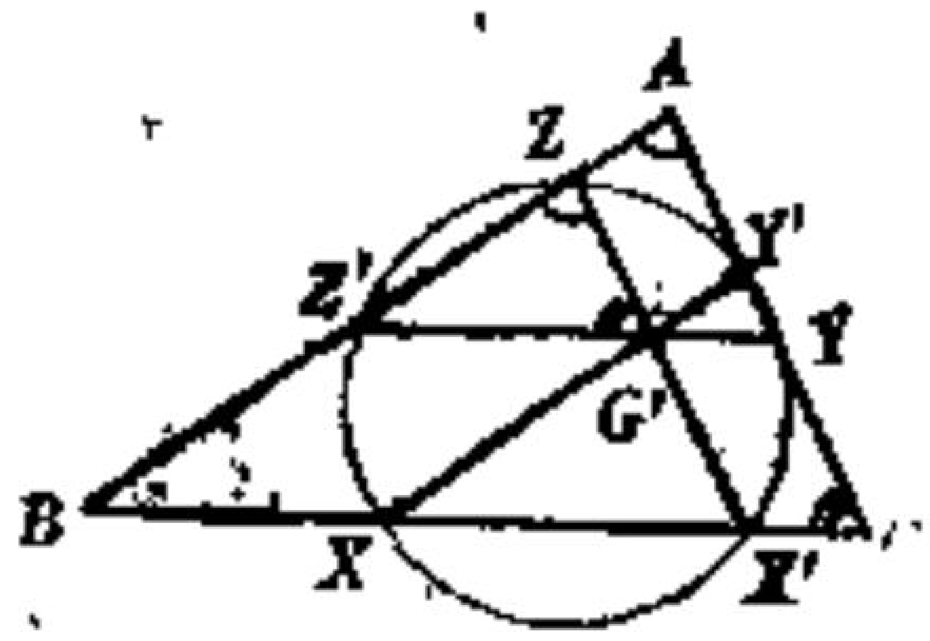
$\therefore$ $C'G'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 关于 $\angle A'C'B'$ 的陪位中线.

同理 $A'G'$、$B'G'$ 也是 $\triangle A'B'C'$ 的陪位中线.

故 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 有共同的陪位重心 G'.

78.三角形的三乘比圆在三边上所截的弦与三边的立方成比例.

证明：由 P 189例题48知，过 $\triangle ABC$ 的陪位重心 G' 所作三边平行线的六交点所共之圆存在本题所述的比例关系，故称此圆为三乘比圆.



图复三—78

令 $\triangle ABC$ 的三边的高为 h_a、h_b、h_c，G' 对三边的高为 h'_a、h'_b、h'_c. 由 $\triangle ZZ'G\backsim\triangle ABC$，故以下等式成立：

$$\frac{ZZ'}{AB}=\frac{h'_c}{h_c},\qquad \frac{YY'}{AC}=\frac{h'_b}{h_b},$$

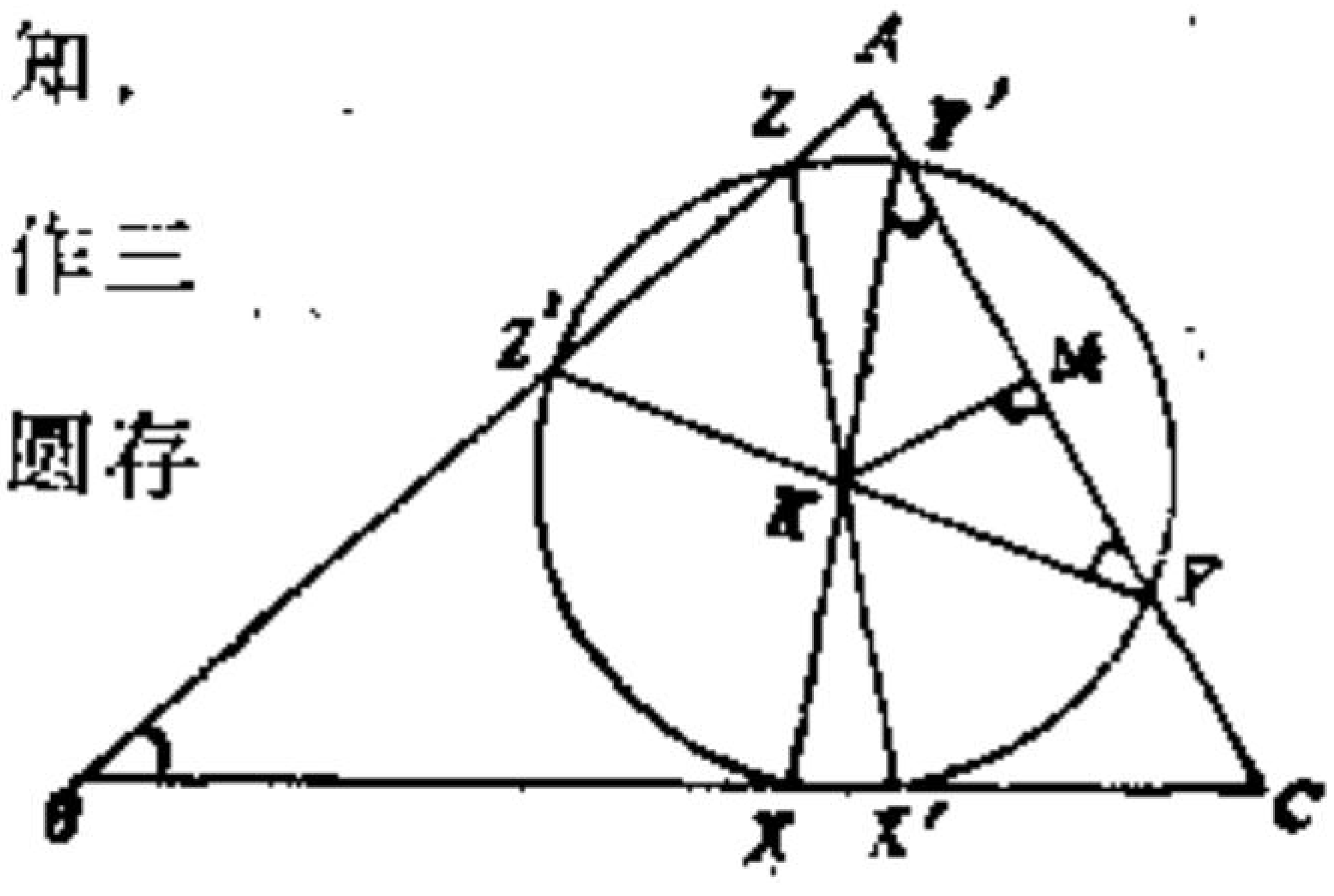
两式相除得 $\dfrac{ZZ'}{YY'}=\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{h_b}{h_c}\cdot\dfrac{h'_c}{h'_b}$.

由74题有 $\dfrac{h'_c}{h'_b}=\dfrac{AB}{AC}$. 又 $\dfrac{h_b}{h_c}=\dfrac{AB}{AC}$,

故有 $\dfrac{YY'}{CA^3}=\dfrac{ZZ'}{AB^3}$. 同理 $\dfrac{XX'}{BC^3}=\dfrac{YY'}{CA^3}$.

79. 三角形的余弦圆在三边上所截的弦与对角的余弦成比例.

证明：由 P 188例题47知，过 $\triangle ABC$ 的陪位重心 K 所作三边逆平行线的六交点所共之圆存在本题所述的比例关系，故称之为余弦圆. 圆心为K.



图复三—79

$\because$ $\triangle KYY'$ 为等腰三角形，有 $KY=\dfrac{YY'}{2\cos B}$

同理，$KX=\dfrac{XX'}{2\cos A}$，　　$KZ=\dfrac{ZZ'}{2\cos C}$，

$\therefore$ $\dfrac{XX'}{\cos A}=\dfrac{YY'}{\cos B}=\dfrac{ZZ'}{\cos C}$.

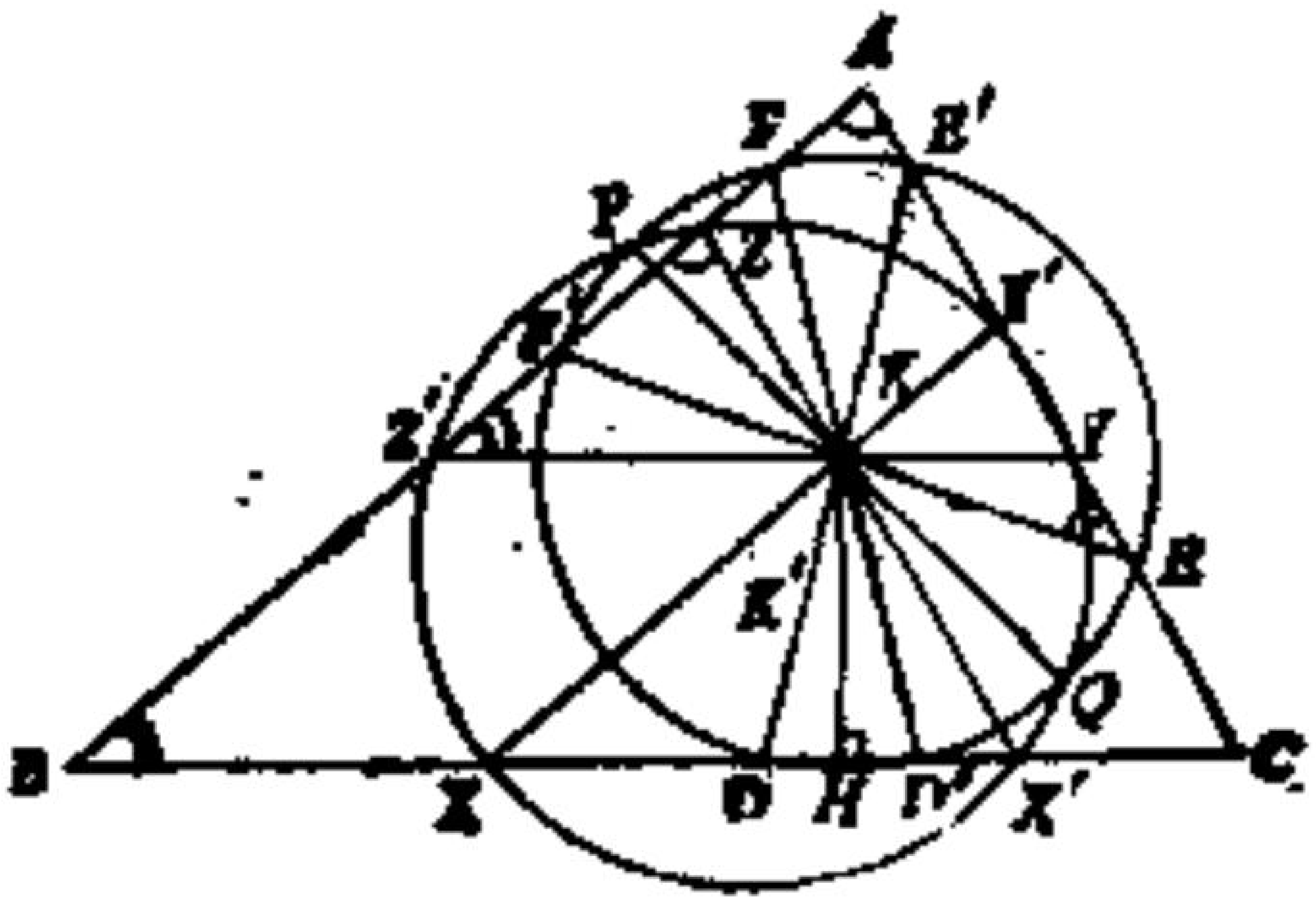
80. 三角形的三乘比圆通过余弦圆一直径的两端.

证明：令K、K'是余弦圆及三乘比圆的圆心.

$\because$ $\triangle KZZ'\backsim\triangle CAB$,

$\triangle KYY'\backsim\triangle BAC$,

$\triangle KXX'\backsim\triangle ABC$,



图复三—80

且令 BC、BA上的高为h_a、h_c. 有$\dfrac{KZ'}{CB}=\dfrac{ZZ'}{AB}$，

$\dfrac{KY}{BC}=\dfrac{YY'}{AC}$，　$\dfrac{KD}{KH}=\dfrac{AC}{h_c}$，　$\dfrac{KH}{h_a}=\dfrac{XX'}{BC}$.

故有 $KZ'\cdot KY=\dfrac{YY'\cdot ZZ'\cdot BC^2}{AB\cdot BC\cdot CA}$，

$$KD=\frac{XX'\cdot CA}{BC}\cdot\frac{h_a}{h_c}=\frac{XX'\cdot AB\cdot BC\cdot CA}{BC^3}$$

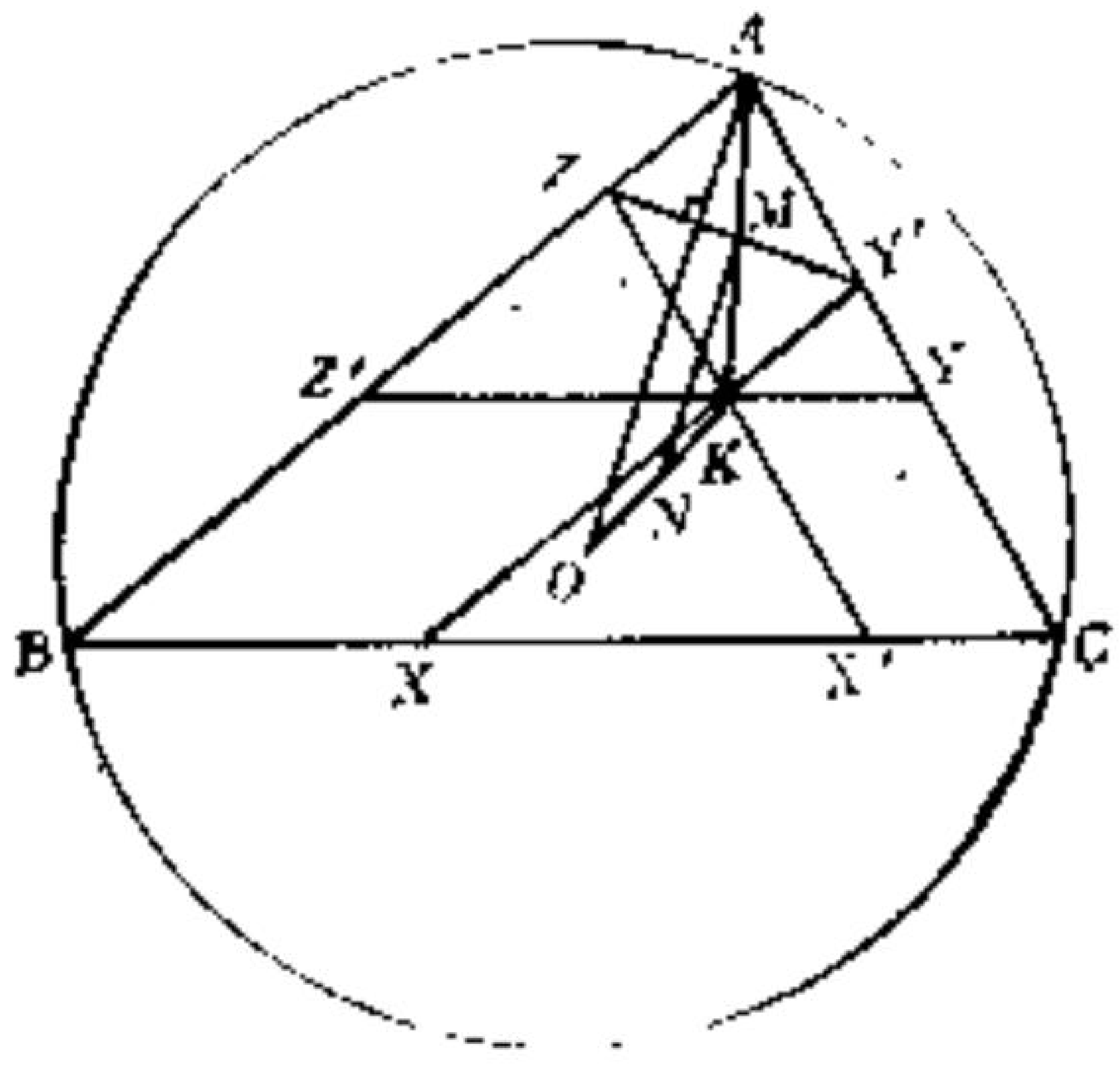
由78题有 $\frac{XX'}{BC^3}=\frac{YY'}{CA^3}=\frac{ZZ'}{AB^3}$,

$\therefore\quad KZ'\cdot KY=KD^2=KP\cdot KQ$.

而 KD 是⊙K 的半径，故⊙K' 过直径 PQ 的两端.

81. 三角形三乘比圆心是外心与陪位重心连结线的中点.

证明：令 K、O 是$\triangle ABC$ 的陪位重心与外心，OK 的中点为 N.



图复三—81

过 K 作三边的平行线其交点为 X、X'、Y、Y'、Z、Z'，有 AK 与 ZY' 互相平分且 $Y'Z$ 为 BC 的逆平行线.

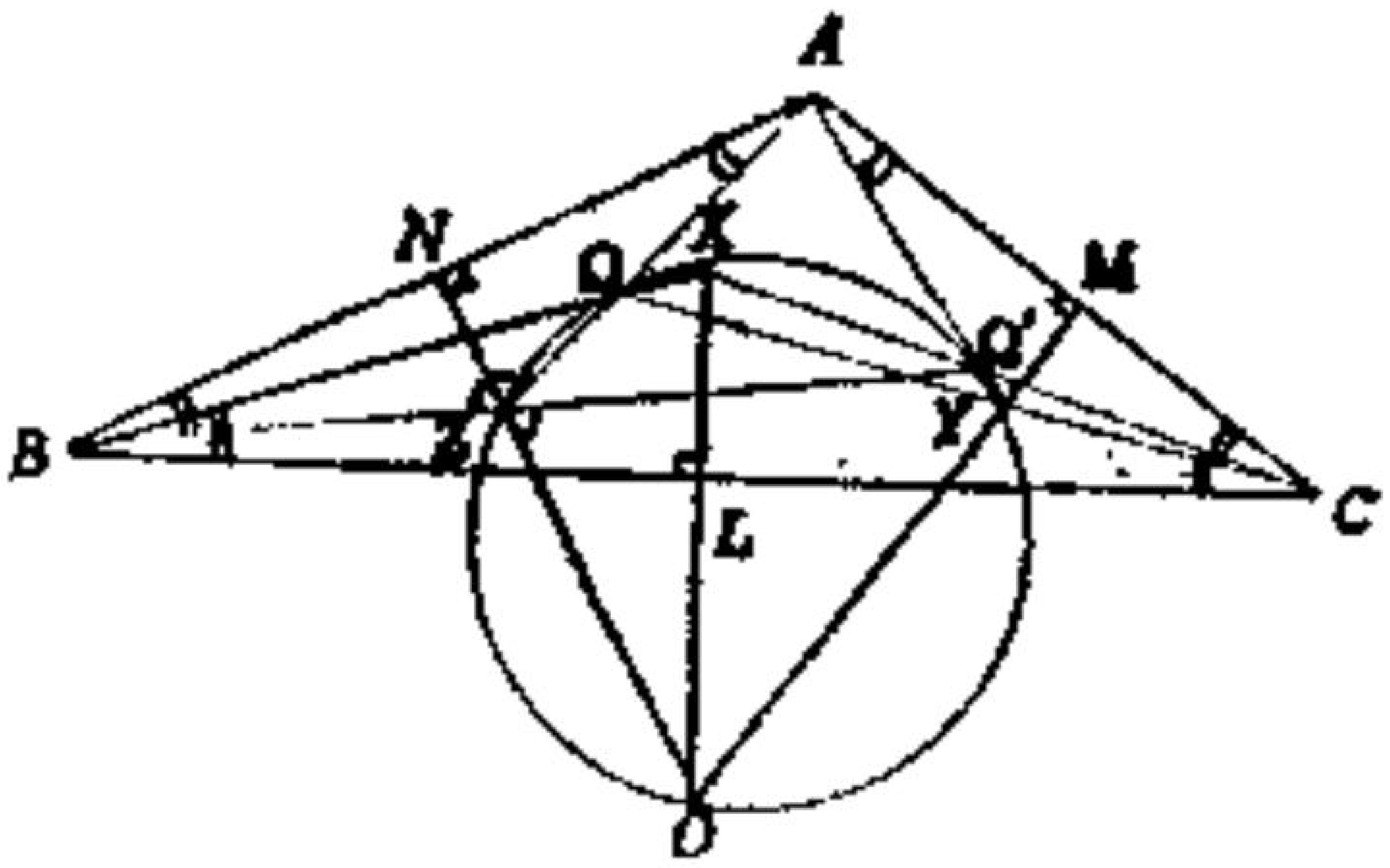
由于$\triangle ABC$的外心与垂心为一对等角共轭点，由例题42知，顶点与外心的连线垂直于垂足三角形的三边，且有垂足三角形的三边亦为$\triangle ABC$ 有关边的逆平行线，由定理 149，在一个三角形中，同边的逆平行线互相平行，故有 ZY' 平行于垂足三角形的一边而有 $ZY'\perp AO$.

$\therefore$ MN 是 ZY' 的中垂线，可得 N 是三乘比圆的圆心.

82. 三角形的正布洛卡点至三顶点的距离之连乘积等于负布洛卡点至三顶点的距离之连乘积.

证明：令 Ω、Ω' 为正、负布洛卡点，则有Ω、Ω' 为等角共轭点且$\angle\Omega AB=\angle\Omega BC=\angle\Omega CA=\angle\Omega' AC=\angle\Omega' CB$ $=\angle\Omega' BA$.

令 X、Y、Z 为 ΩB 与 $\Omega' C$、ΩC 与 $\Omega' A$、ΩA 与 $\Omega' B$ 的交点，则 X、Y、Z 分别在 BC、CA、AB 的中垂线 OL、OM、ON 上．



图复三—82

$\therefore\quad \mathrm{Rt}\triangle XLB \backsim \mathrm{Rt}\triangle YMC \backsim \mathrm{Rt}\triangle ZNA$

故有 $\angle BXL=\angle \Omega YO=\angle AZN$，$\angle OZ\Omega'=\angle OX\Omega'$，

$\therefore$ Ω、Ω'、X、Y、Z、O 六点共圆．

于是 $A\Omega\cdot AZ=A\Omega'\cdot AY$，

$B\Omega\cdot BX=B\Omega'\cdot BZ$，

$C\Omega\cdot CY=C\Omega'\cdot CX$．

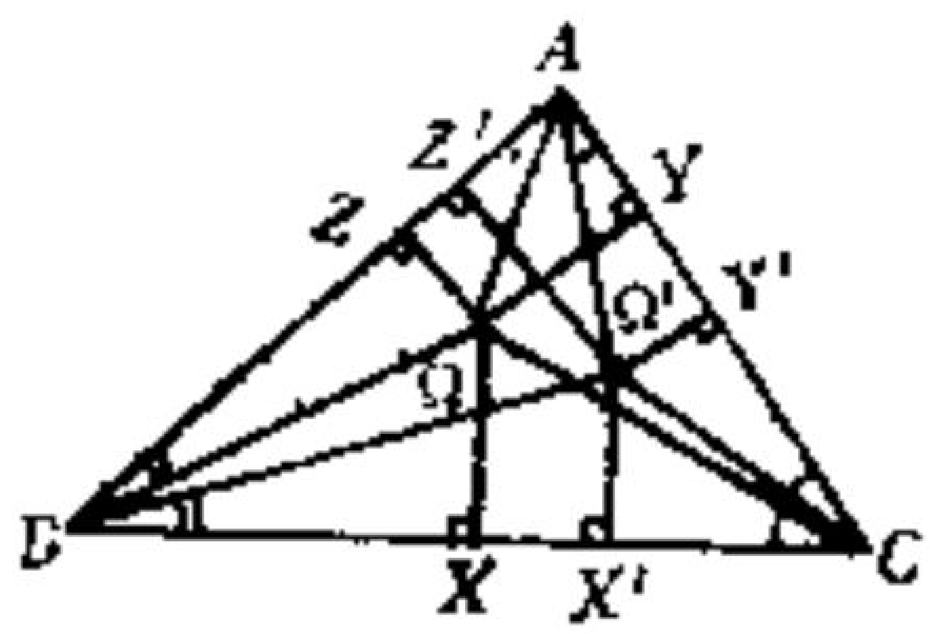
$\therefore\quad A\Omega\cdot B\Omega\cdot C\Omega\cdot AZ\cdot BX\cdot CY$

$=A\Omega'\cdot B\Omega'\cdot C\Omega'\cdot AY\cdot BZ\cdot CX$

故有 $A\Omega\cdot B\Omega\cdot C\Omega=A\Omega'\cdot B\Omega'\cdot C\Omega'$．

83．三角形正布洛卡点至三边的距离之连乘积，等于负布洛卡点至三边的距离之连乘积．

证明：由习题十七第 6 题知，Ω、Ω' 为 $\triangle ABC$ 的等角共轭点．



图复三—83

$\therefore\quad \triangle \Omega AZ \backsim \triangle \Omega' AY'$，

$\triangle \Omega BX \backsim \triangle \Omega' BZ'$，

$\triangle \Omega CY \backsim \triangle \Omega' CX'$．

故有 $\dfrac{\Omega A}{\Omega Z}=\dfrac{\Omega' A}{\Omega' Y'}$，$\dfrac{\Omega B}{\Omega X}=\dfrac{\Omega' B}{\Omega' Z'}$，$\dfrac{\Omega C}{\Omega Y}=\dfrac{\Omega' C}{\Omega' X'}$．

三式相乘有 $\quad\dfrac{\Omega A\cdot\Omega B\cdot\Omega C}{\Omega X\cdot\Omega Y\cdot\Omega Z}=\dfrac{\Omega' A\cdot\Omega' B\cdot\Omega' C}{\Omega' X'\cdot\Omega' Y'\cdot\Omega' Z'}$

由82题有 $\Omega X\cdot\Omega Y\cdot\Omega Z=\Omega' X'\cdot\Omega' Y'\cdot\Omega' Z'$.

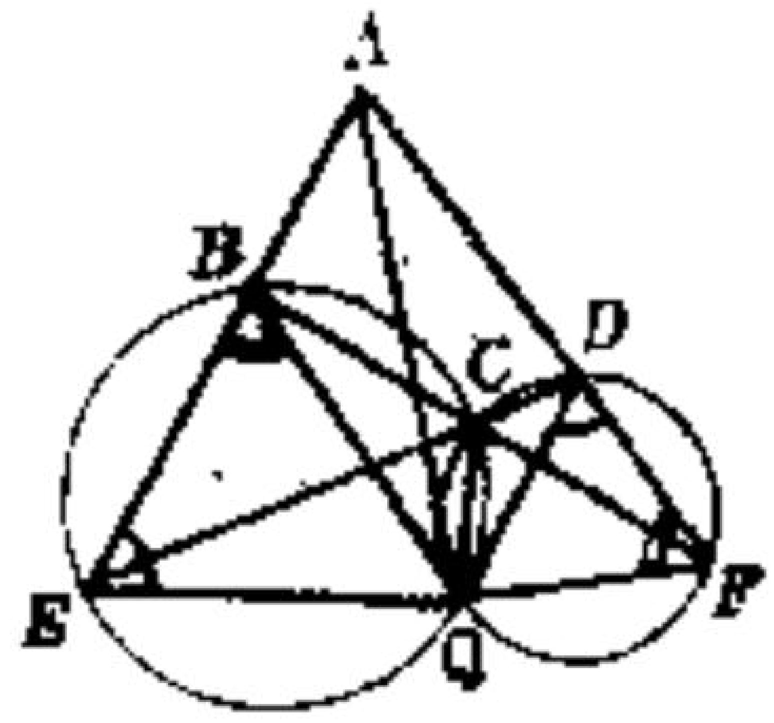
84. 完全四边形的密克点至每双对顶点的距离之乘积彼此相等.

$\because$ $\triangle QBE\backsim\triangle QFD$.

有 $\dfrac{QB}{QE}=\dfrac{QF}{QD}$,

$\therefore$ $QB\cdot QD=QE\cdot QF$.

同理 $QE\cdot QF=QA\cdot QC$.



图复三—84

85. 设 X、Y、Z 是$\triangle ABC$的外接圆上一点 P 在 BC、CA、AB 上的射影. 求证:

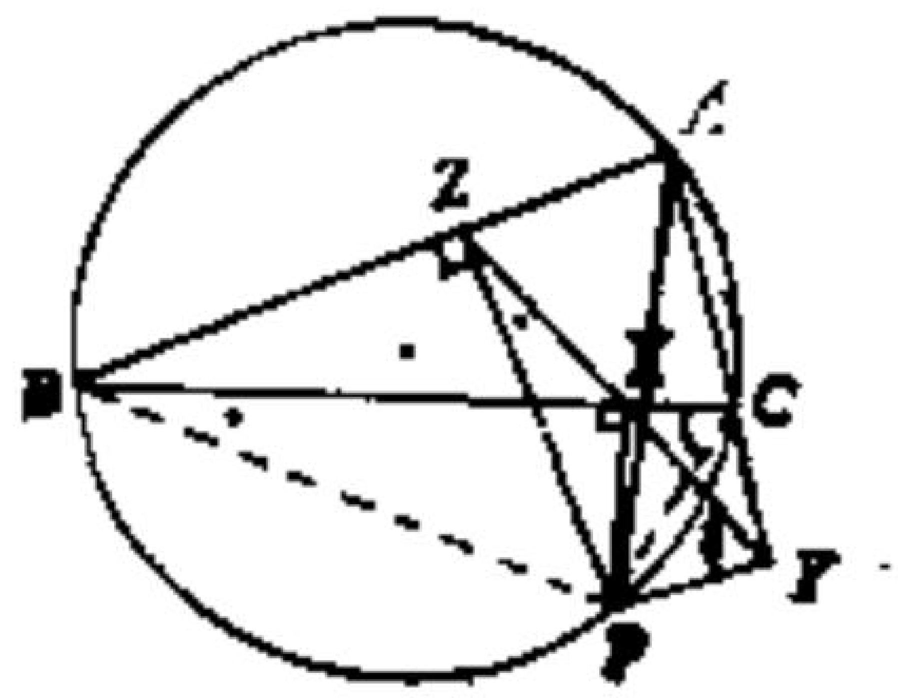
$$\frac{PX\cdot YZ}{BC}=\frac{PY\cdot ZX}{CA}=\frac{PZ\cdot XY}{AB}.$$

证明: $\because$ XYZ 是 P 在$\triangle ABC$上的西摩松线, 故 $AZXCBY$ 是完全四边形且P为其密克点. 由上题知,

$PA\cdot PX=PB\cdot PY=PC\cdot PZ$. ①

又$\triangle PAC\backsim\triangle PZX$,

$\triangle PBC\backsim\triangle PZY$.



图复三—85

有 $\dfrac{PA}{AC}=\dfrac{PZ}{ZX}$ ② $\dfrac{PB}{BC}=\dfrac{PZ}{ZY}$ ③

②、③两边分别乘以 PX、PY并由①得

$$\frac{PX\cdot YZ}{BC}=\frac{PY\cdot ZX}{CA}. \quad 同理\frac{PY\cdot ZX}{CA}=\frac{PZ\cdot XY}{AB}$$

86. 正三角形外接圆上任一点至三边（所在直线）的距离之平方和是一常数.

证明: 令正三角形的边长为 a, 参考上题图有

$$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}-S_{\triangle PBC}=S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$\therefore\quad PZ+PY-PX=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 两边平方得

$$PX^2+PY^2+PZ^2+2(PY\cdot PZ-PZ\cdot PX-PX\cdot PY)$$
$$=\frac{3}{4}a^2.$$

由上题 $PX\cdot YZ=PY\cdot ZX=PZ\cdot XY$

于是 $PY\cdot PZ-PZ\cdot PX-PX\cdot PY=PY(PZ-PX)-PZ\cdot PX$

$$=\frac{1}{ZX}[PY\cdot ZX(PZ-PX)-ZX\cdot PZ\cdot PX]$$

$$=\frac{PX}{ZX}[YZ(PZ-PX)-ZX\cdot PZ]$$

$$=\frac{PX}{ZX}[PZ(YZ-XZ)-YZ\cdot PX]$$

$$=\frac{PX}{ZX}(PZ\cdot XY-YZ\cdot PX)=0$$

$\therefore\quad PX^2+PY^2+PZ^2=\frac{3}{4}a^2.$

87. 设 P 是正三角形$\triangle ABC$的外接圆上一点。求证：
$PA^4+PB^4+PC^4=2(PB^2\cdot PC^2+PC^2\cdot PA^2+PA^2\cdot PB^2)$
$=2\cdot AB^4$

证明（1）：令P在劣弧$\overset{\frown}{BC}$上，由P.130例题16知，

$PA=PB+PC$，$\therefore\quad PA^2=(PB+PC)^2$

于是 $PA^2-PB^2-PC^2=2PB\cdot PC$

平方整理得

$PA^4+PB^4+PC^4=2(PB^2\cdot PC^2+PC^2\cdot PA^2+PA^2\cdot PB^2)$

（2）：由习题十一第30题，$AB^2=PA^2-PB\cdot PC$

$\therefore\quad 2AB^4-2\cdot PA^4+2\cdot PB^2\cdot PC^2-4PA^2\cdot PB\cdot PC$

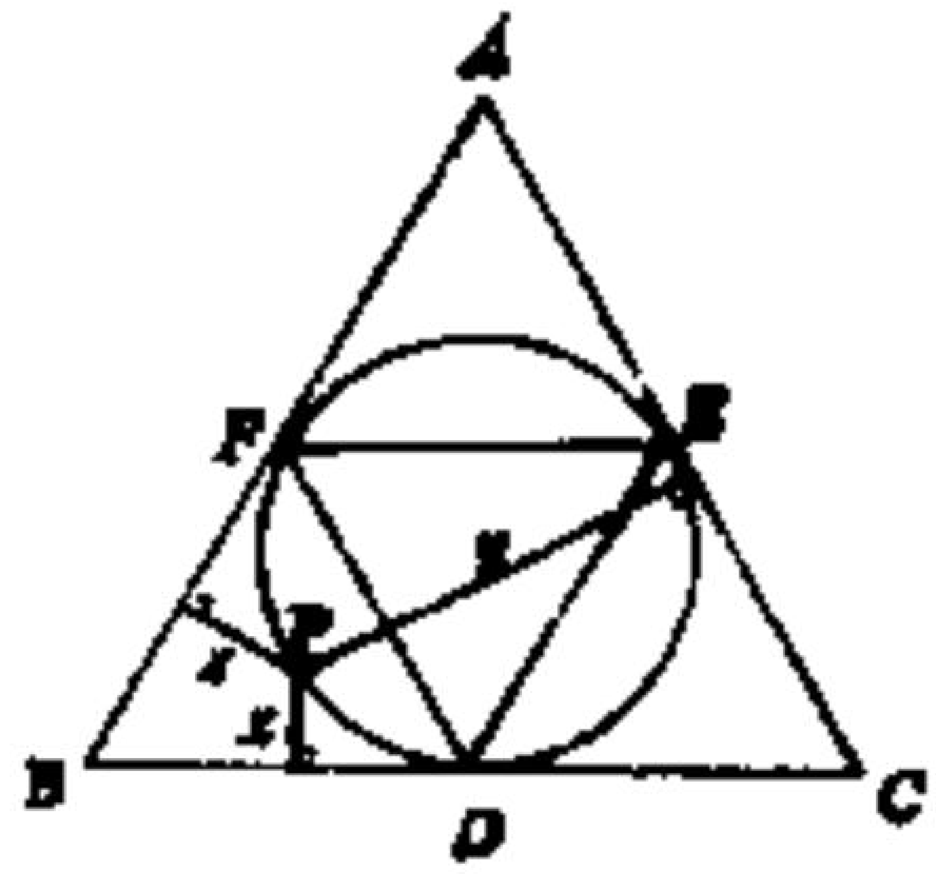
$=PA^4+(PB+PC)^4+2\cdot PB^2\cdot PC^2-4(PB+PC)^2\,PB\cdot PC$

$=PA^4+PB^4+PC^4$

88. 设正三角形的内切圆上任一点至三边的距离为 x、y、z．正三角形的边长为 a，求证：

$$x^2+y^2+z^2=2(yz+zx+xy)=\frac{3}{8}a^2$$

证明（1）：D、E、F 为内切圆的切点，则$\triangle DEF$亦为正三角形，其边长为$\frac{1}{2}a$，其高为$\frac{\sqrt{3}}{4}a$．



图复三—88

$\because\quad P$ 是正三角形$\triangle DEF$上的点，由86题得

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a-x\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a-z\right)^2$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$\therefore\quad x^2+y^2+z^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a(x+y+z)-\frac{3}{8}a^2$

由习题十一第 6 题，$x+y+z=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

故　$x^2+y^2+z^2=\frac{3}{8}a^2$．

(2)：∵ $(x+y+z)^2=\frac{3}{4}a^2$，

∴ $2(yz+zx+xy)=\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{8}a^2=\frac{3}{8}a^2$.

89．以等腰三角形△ABC底边BC的中点为心作圆使切于两腰，设这圆的任一条切线交AB、AC于E、F．求证：$BE\cdot CF=\frac{1}{4}BC^2$．

证明：∵ $\angle POQ=180°-2\angle POB$

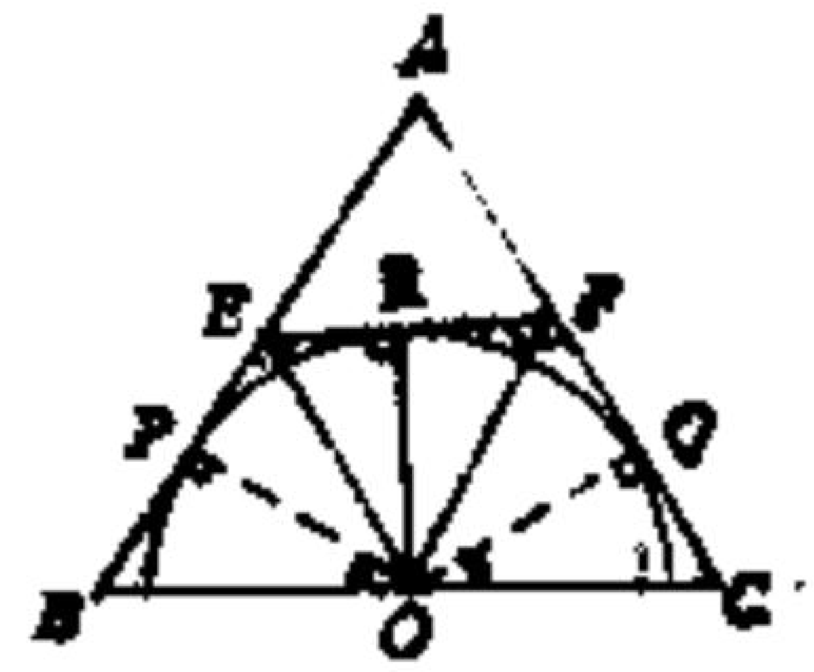
$=2(90°-\angle POB)=2\angle B$，

∴ $\angle EOF=\frac{1}{2}\angle POQ=\angle B=\angle C$，

又$\angle EOF+\angle EOB=\angle C+\angle OFC$，

∴ $\angle EOB=\angle OFC$．

于是$\triangle EOB\backsim\triangle OFC$，



图复三—39

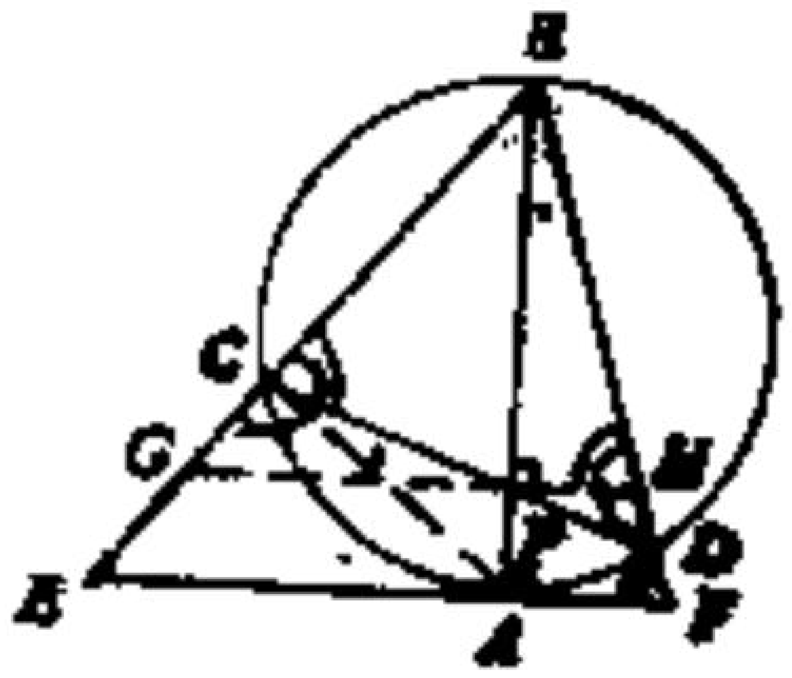
∴ $\frac{BE}{BO}=\frac{CO}{CF}$．

故 $BE\cdot CF=BO\cdot CO=\frac{1}{4}BC$．

90．定圆内定直径 AB 上有定点 P，过 P 任作一弦 CD，连 BC、BD 交在 A 点的切线于 E、F．

求证：$AE \cdot AF$ 是一常数．

证明：过 P 作 $GH /\!/ EF$，有 C、D、G、H 四点共圆．



图复三—90

$\therefore \quad PG \cdot PH = PC \cdot PD = PA \cdot PB$

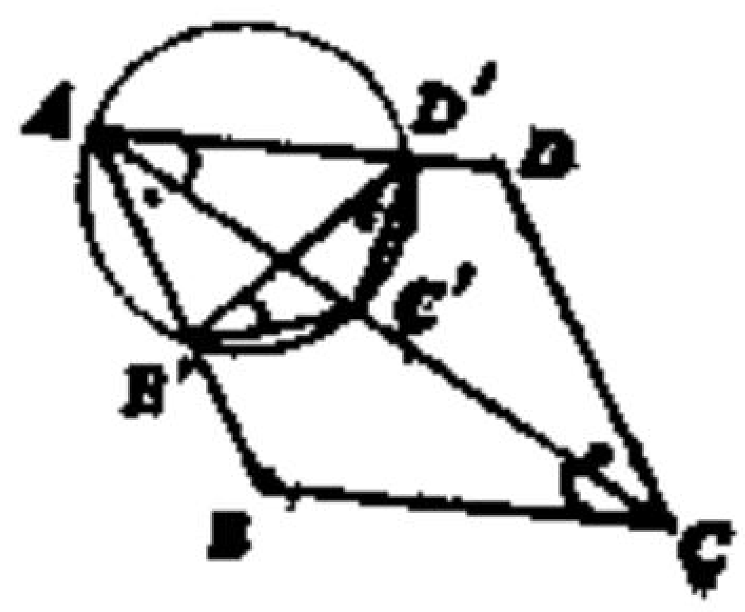
又 $\quad \dfrac{AE}{PG} = \dfrac{AB}{PB}$，$\dfrac{AF}{PH} = \dfrac{AB}{PB}$，

$\therefore \quad AE \cdot AF = \dfrac{AB^2}{PB^2} \cdot PG \cdot PH = \dfrac{AB^2 \cdot PA}{PB} =$ 常数．

91．过▱$ABCD$ 的顶点 A 任作一圆，设这圆交直线 AB、AC、AD 于 B'、C'、D'．求证：

$AB \cdot AB' + AD \cdot AD' = AC \cdot AC'$

证明：$\because \quad \triangle ABC \backsim \triangle D'C'B'$，



图复三—91

有 $AB = D'C' \cdot \dfrac{AC}{D'B'}$，①

$AD = BC = C'B' \cdot \dfrac{AC}{D'B'}$ ②

①$\cdot AB'$ + ②$\cdot AD'$ 得

$$AB \cdot AB' + AD \cdot AD' = \frac{AC}{D'B'}(D'C' \cdot AB' + C'B' \cdot AD')$$

由托列迷定理得

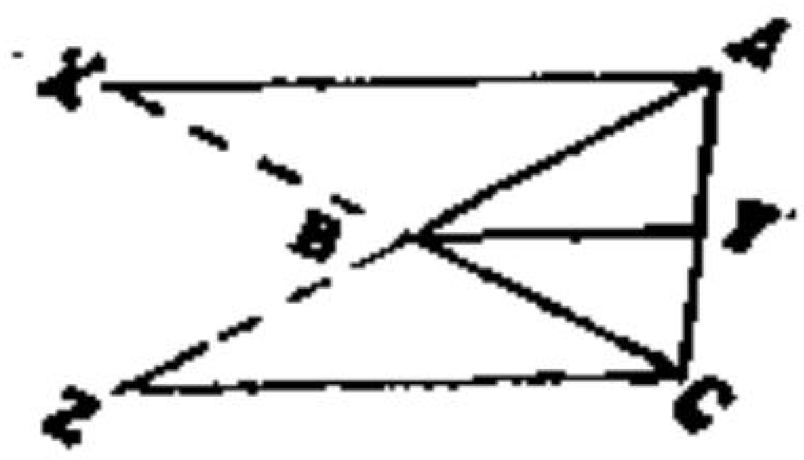
$$AB\cdot AB'+AD\cdot AD'=\frac{AC}{D'B'}\cdot AC'\cdot D'B'=AC\cdot AC'$$

92．自$\triangle ABC$的顶点A、B、C引互相平行的直线各交BC、CA、AB于X、Y、Z，求证：

$$\overline{BY}\cdot\overline{CZ}+\overline{CZ}\cdot\overline{AX}+\overline{AX}\cdot\overline{BY}=0$$

证明：$\because \frac{\overline{AY}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BY}}{\overline{ZC}}$　①

$\frac{\overline{YC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{YB}}{\overline{AX}}$　②



图复三—92

①+②得$\overline{AX}\cdot\overline{BY}+\overline{BY}\cdot\overline{CZ}$

$=\overline{ZC}\cdot\overline{AX}$

即　$\overline{BY}\cdot\overline{CZ}+\overline{CZ}\cdot\overline{AX}+\overline{AX}\cdot\overline{BY}=0$

93．自$\triangle ABC$的顶点A引两等角线交BC于X、Y．

求证：$\frac{\overline{BX}\cdot\overline{BY}}{\overline{CX}\cdot\overline{CY}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$．

证明：作$\odot AXY$交AB、AC于D、E则$DE\parallel BC$．

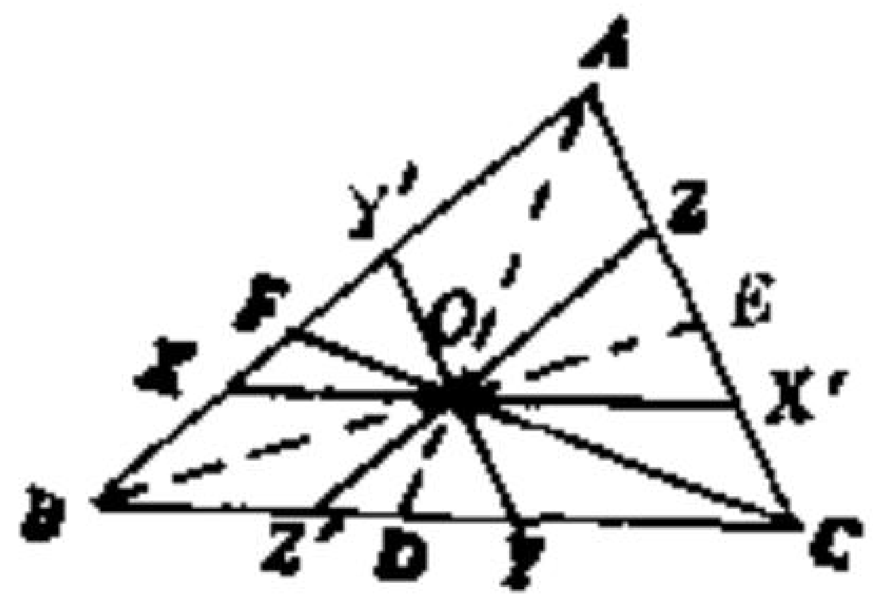


图复三—93

$\therefore\ \frac{\overline{BX}\cdot\overline{BY}}{\overline{CX}\cdot\overline{CY}}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{BA}}{\overline{CE}\cdot\overline{CA}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$

64．已知$\triangle ABC$，通过一点O引直线$x /\!/ BC$，$y /\!/ CA$，$z /\!/ AB$．设x交AB、AC于X、X'，y交BC、BA于Y、Y'，z交CA、CB于Z、Z'．求证：

$$\frac{\overline{XX'}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{YY'}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{ZZ'}}{\overline{AB}}=2$$



复图三—94

证明：$\because \frac{\overline{XX'}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AO}}{\overline{AD}}=1-\frac{\overline{OD}}{\overline{AD}}$

$\frac{\overline{YY'}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{BE}}=1-\frac{\overline{OE}}{\overline{BE}}$，

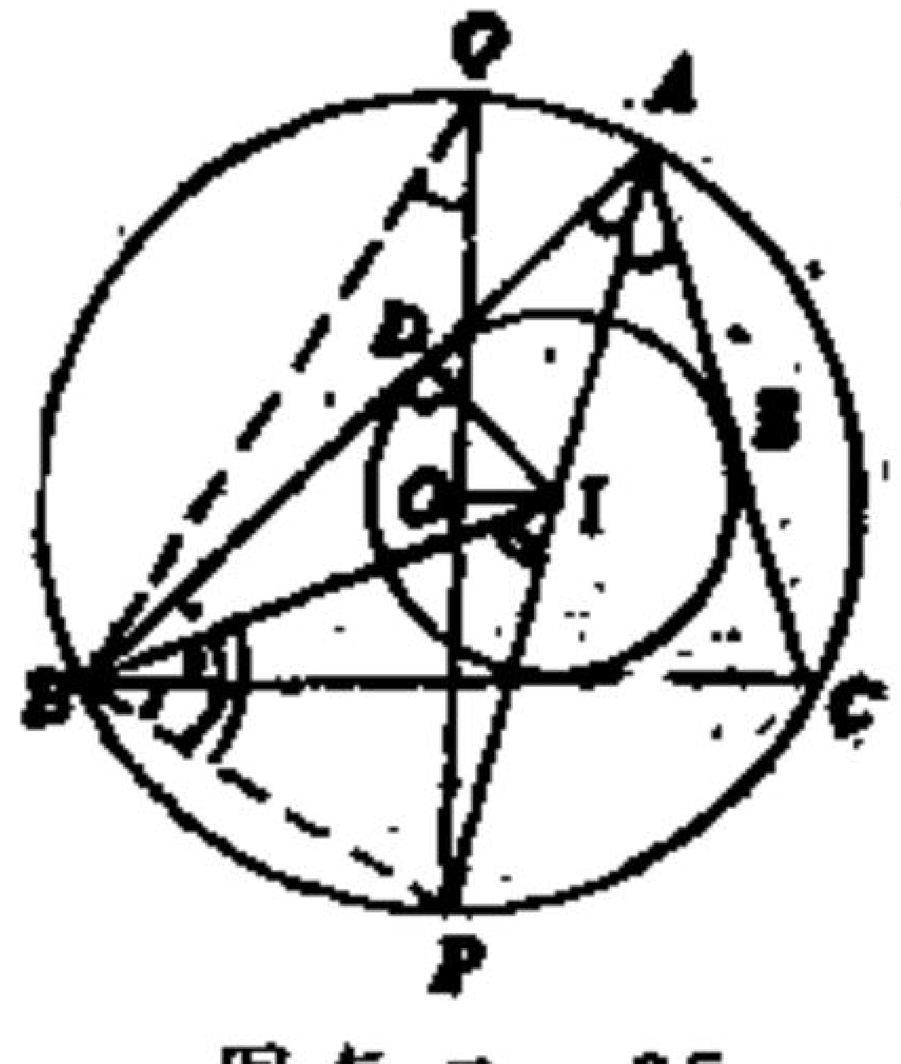
$\frac{\overline{ZZ'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CO}}{\overline{CF}}=1-\frac{\overline{OF}}{\overline{CF}}$，且由复习题一第44题有：

$\frac{\overline{OD}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{OE}}{\overline{BE}}+\frac{\overline{OF}}{\overline{CF}}=1$，$\therefore \frac{\overline{XX'}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{YY'}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{ZZ'}}{\overline{AB}}=2$

95．若$\odot O(R)$与$\odot I(r)$的半径与圆心距适合关系式$OI^2=R^2-2Rr$，则有无限多个三角形以$\odot O$为外接圆而以$\odot I$为内切圆．

证明：取$\odot O$上任一点A，过A作$\odot I$两切线交$\odot O$于B、C，切$\odot I$于D、E，过P作$\odot O$的直径PQ，则$\text{Rt}\triangle AID \backsim \text{Rt}\triangle QPB$．

有$\frac{AI}{QP}=\frac{ID}{PB}$，$\therefore AI\cdot PB=2Rr$



图复三—95

由 I 点对⊙O 的幂有 $AI\cdot PI=R^2-OI^2=2Rr$，故有 $\triangle PIB$ 为等腰三角形．

可得 $\angle IBA=\angle IBC$，故⊙I 为 $\triangle ABC$ 的内切圆．

由于 A 点是⊙O 上任意点，故有无限多个三角形以⊙O 为外接圆而以⊙I 为内切圆．

96．若⊙$O(R)$与⊙$I(r)$的半径与圆心距适合关系式 $OI^2=R^2+2Rr$，而且⊙O 至少有一点在⊙I 的外部，则有无限多个三角形以⊙O 为外接圆而以⊙I 为旁心圆．

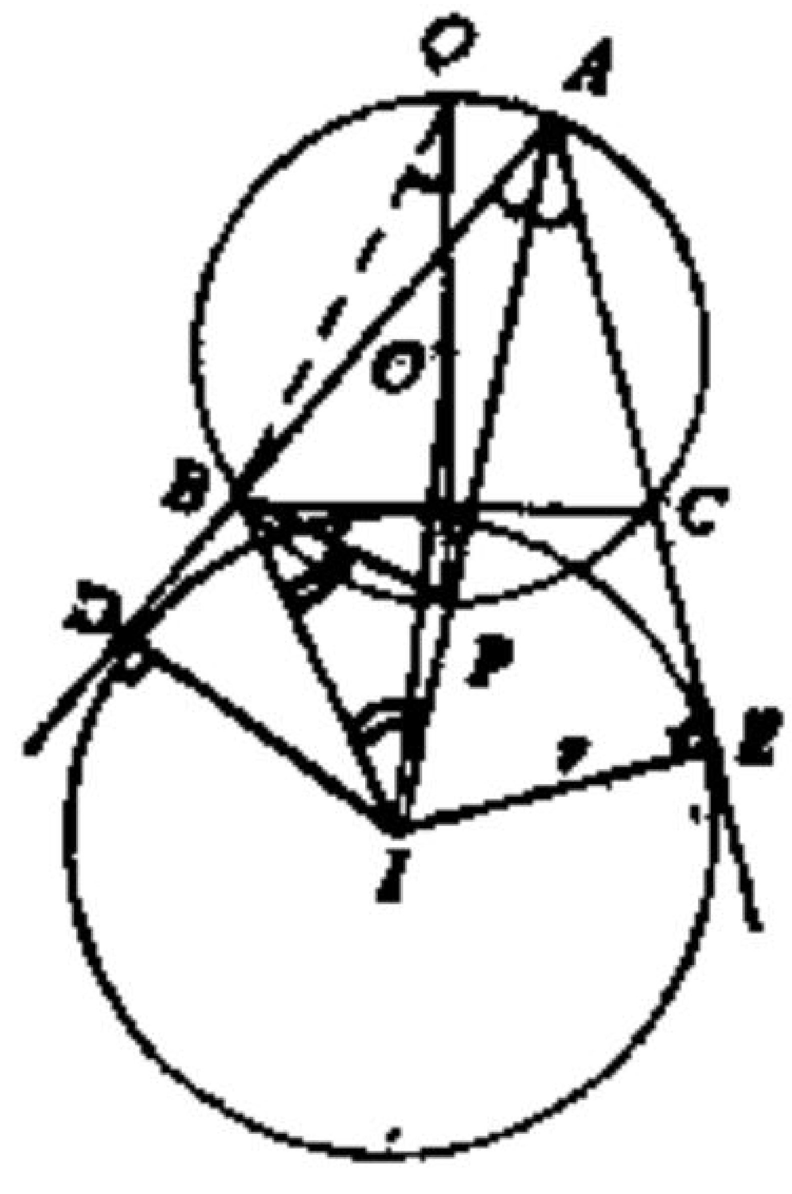
证明：同上题证明，有 $\mathrm{Rt}\triangle AID\backsim\mathrm{Rt}\triangle QPB$，

$\therefore\quad AI\cdot PB=2Rr$．

又 $\quad AI\cdot PI=OI^2-R^2=2Rr$，故有 $\triangle PIB$ 为等腰三角形，

可得 $\angle IBD=\angle IBC$，故⊙I 为 $\triangle ABC$ 的旁切圆．

由于 A 点是⊙O 上且在⊙I 外的任意点，故有无限多个三角形以⊙O 为外接圆而以⊙I 为旁切圆．



图复三—16

97. 有两个正交的等圆$\odot O$和$\odot O'$，其中$\odot O'$交连心线OO'于P、Q，而设P介于O、Q之间．今以P、Q各为心作圆，使同通过O点，试证：

（1）有无限多个三角形，以$\odot O$为外接圆，而以$\odot P$为内切圆；

（2）有无限多个三角形，以$\odot O$为外接圆，而以$\odot Q$为旁切圆；

证明（1）：$OP = OO' - O'P$

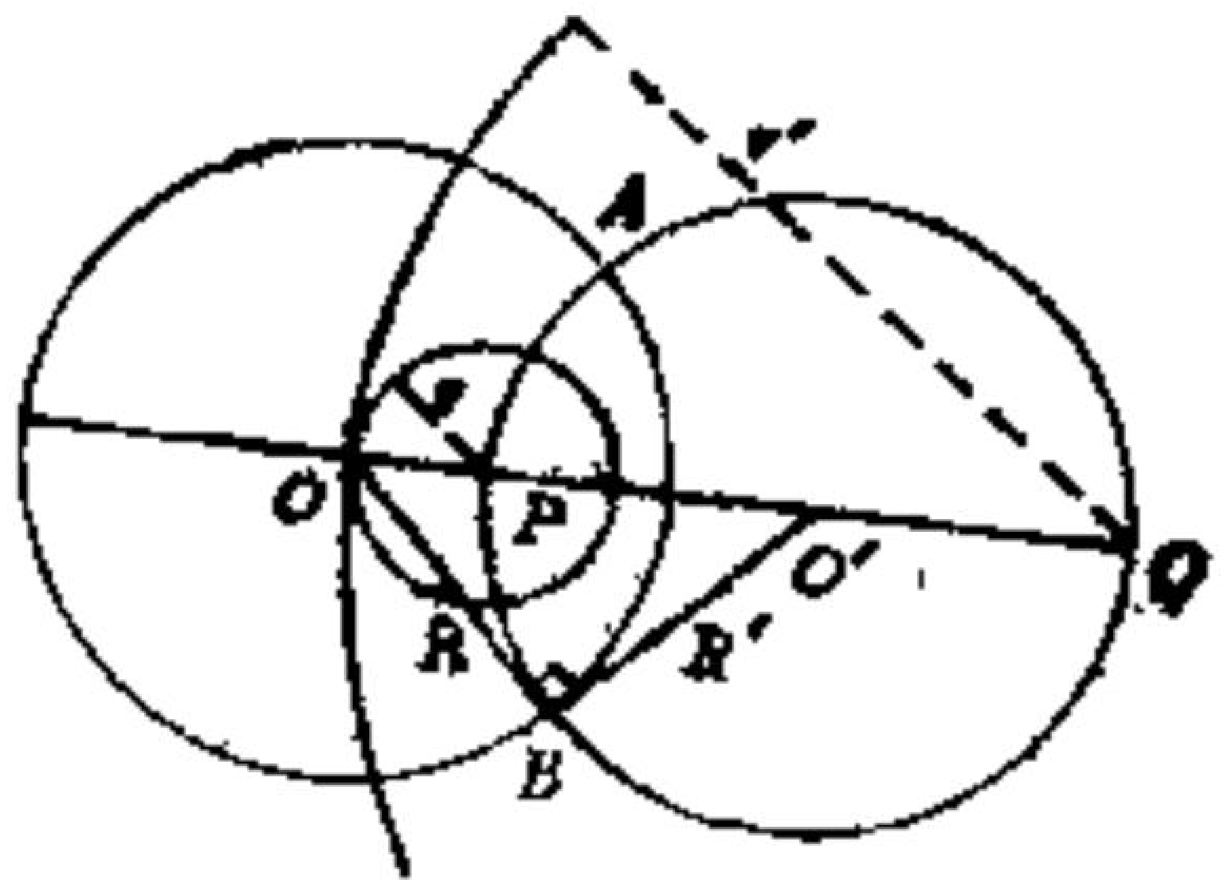
$= (\sqrt{2} - 1)R$，

有 $OP^2 = (3-2\sqrt{2})R^2$

又 $R^2 - 2Rr = R^2 - 2R(\sqrt{2} - 1)R$

$= (3-2\sqrt{2})R^2$

由95题，（1）成立．



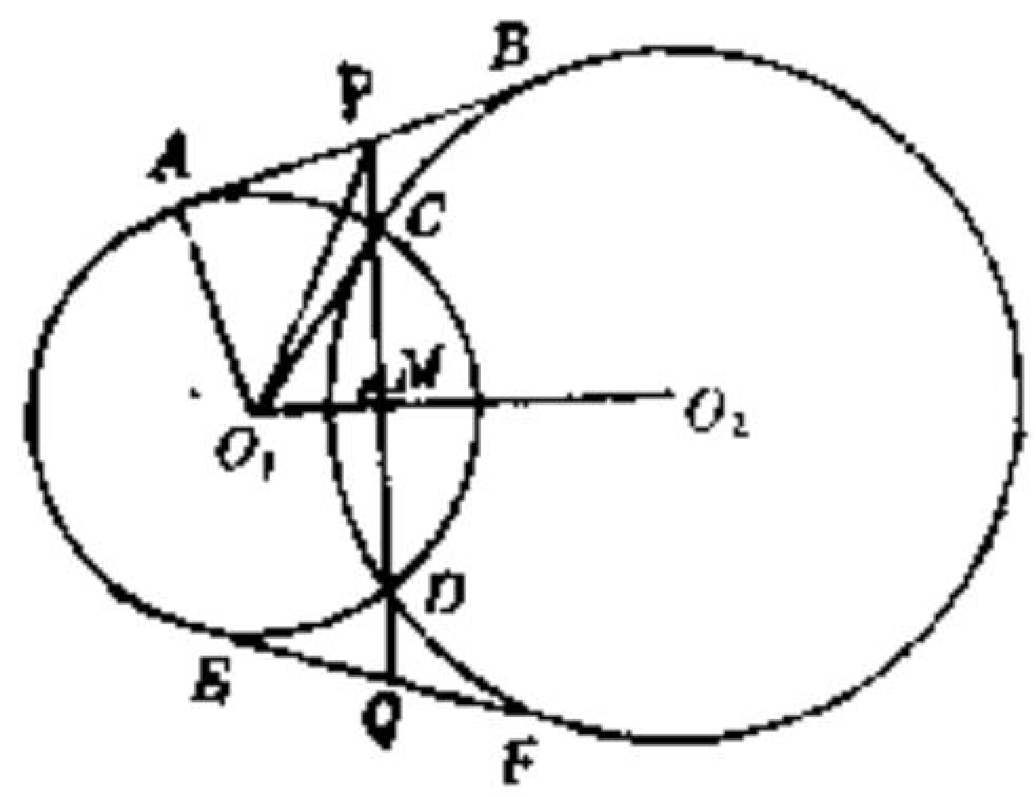
复图三—97

（2）：$\because$ $OQ = OO' + O'Q = (\sqrt{2} + 1)R$，

$OQ^2 = (3+2\sqrt{2})R^2 = R^2 + 2Rr'$．

由96题，（2）成立．

98. 设将相交两圆的公弦双方延长抵于外公切线为止，则所得线段的平方等于公弦与一外公切线的平方和.



图复三—98

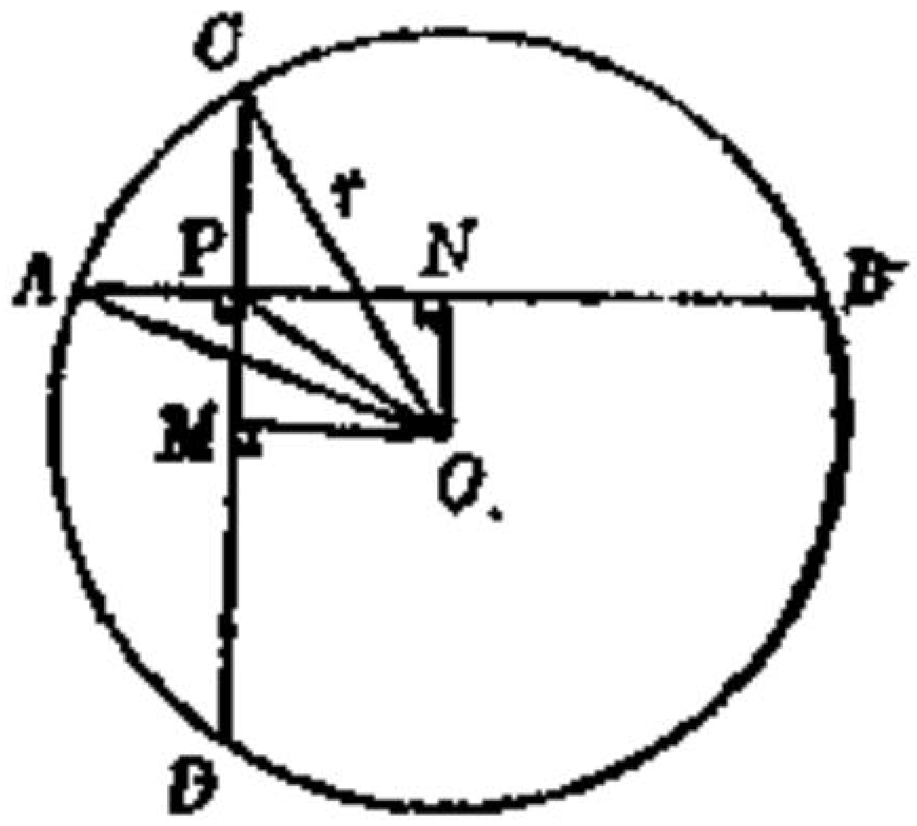
证明：由习题四第21题，P 是 AB 的中点.

$$\because\quad CM^2+PA^2=(O_1C^2-O_1M^2)+(O_1P^2-O_1A^2)$$

$$=O_1P^2-O_1M^2=PM^2,$$

$$\therefore\quad 4PM^2=4CM^2+4PA^2,\ 即\quad PQ^2=CD^2+AB^2.$$

99. 过圆内定点所作互相垂直的两弦，它们的平方和是常数.



图复三—99

证明：AN^2+CM^2

$=(OA^2-ON^2)+(OC^2-OM^2)$

$=2r^2-(OM^2+ON^2)$

$=2r^2-OP^2.$

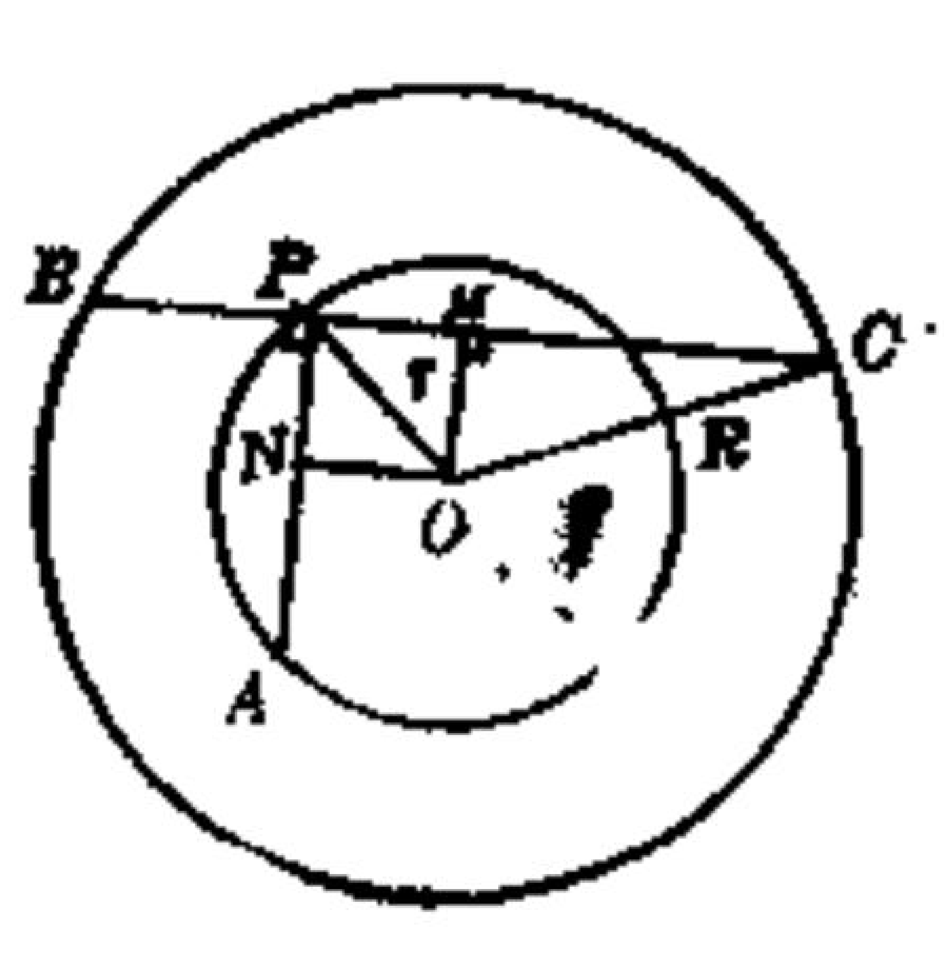
$\therefore\quad 4AN^2+4CM^2=8r^2-4OP^2$

$=$常数,

即 $AB^2+CD^2=$常数.

100. 有两同心圆，设 PA 是内圆的弦，BC 是外圆中过 P 且垂直于 PA 的弦，则

$PA^2+PB^2+PC^2$ 是一个常数.



图复三—100

证明：$PA^2+PB^2+PC^2$

$=4PN^2+(BM-PM)^2$

$+(PM+MC)^2$

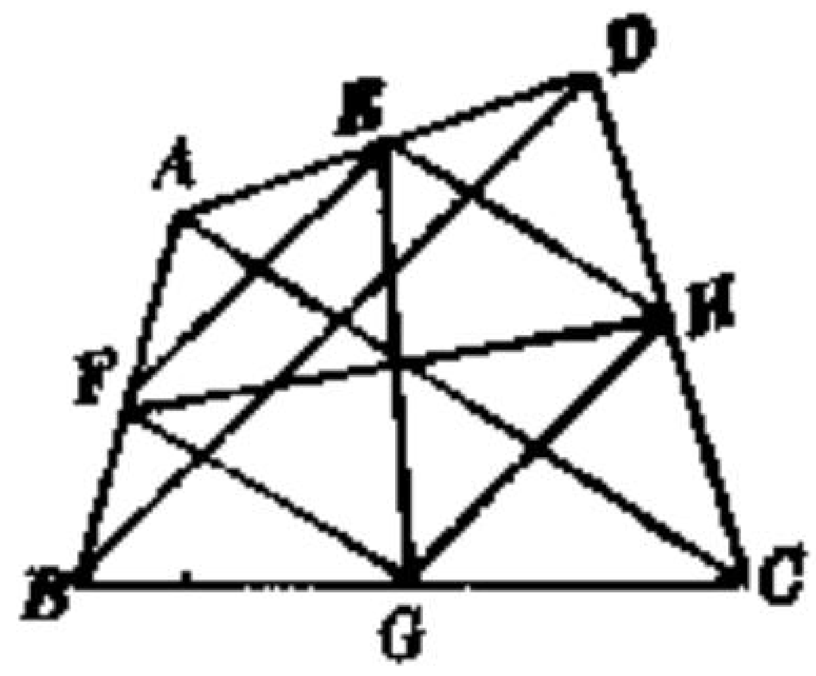
$$=4(OP^2-ON^2)+2(PM^2+MC^2)$$

$$4\cdot OP^2-4\cdot ON^2+2(OP^2-OM^2)+2(OC^2-OM^2)$$

$$=6\cdot OP^2+2\cdot OC^2-4(ON^2+OM^2)$$

$$=2(OP^2+OC^2)=2(R^2+r^2)$$

101．四边形的两对角线的平方和，二倍于两双对边的中点的连结线的平方和．



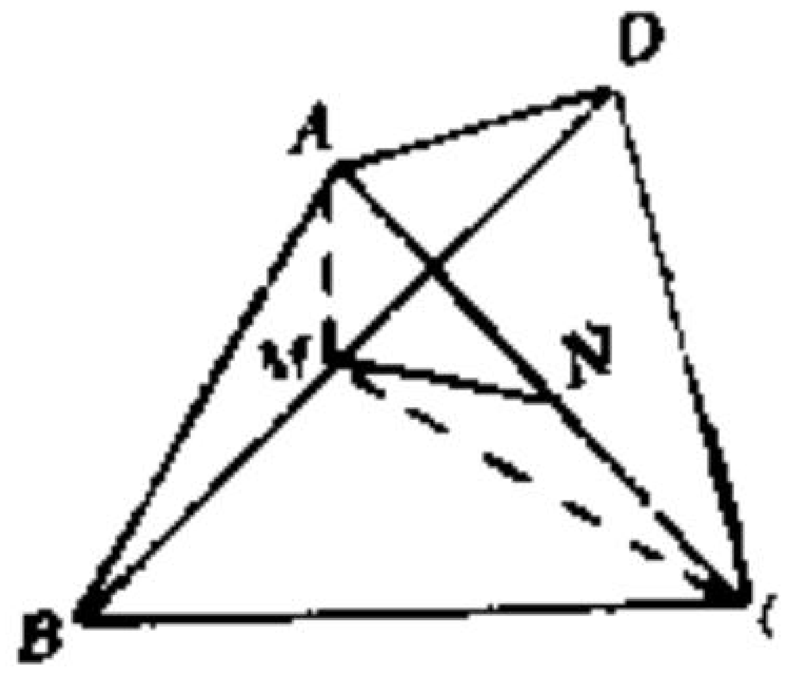
图复三—101

证明：由定理126，

$$AC^2+BD^2=4\cdot FG^2+4\cdot FE^2$$

$$=2(EG^2+FH^2).$$

102．四边形各边的平方和，等于两对角线的平方和加上两对角线的中点连结线的平方之四倍．



图复三—102

证明：由定理131，

$$AB^2+AD^2+BC^2+DC^2$$

$$=\frac{1}{2}BD^2+2\cdot AM^2$$

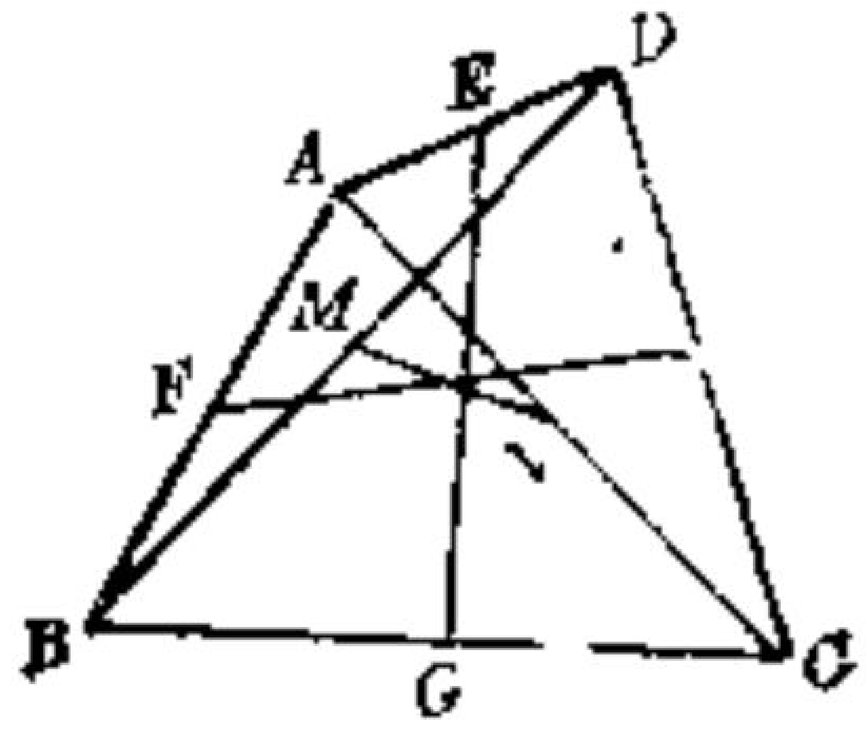
$$+\frac{1}{2}BD^2+2\cdot CM^2=BD^2+2(\frac{1}{2}\cdot AC^2+2\cdot MN^2)$$

$$=BD^2+AC^2+4\cdot MN^2.$$

103．若四边形各边的平方和等于两对角线的平方和，则这四边形必是平行四边形．

证明：由上题知，在此情况下M、N重合，则两对角线互相平分，故此四边形必是平行四边形．

104．完全四角形各边的平方和，四倍于三双对边的中点连结线之平方和．



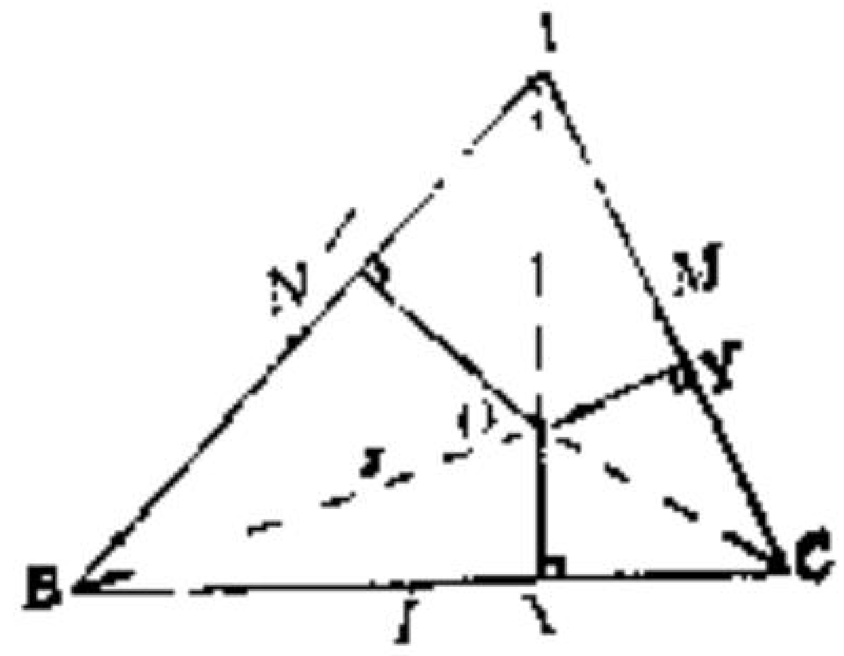
图复三—104

证明：由101、102知，

$AB^2+BC^2+CD^2$
$+DA^2+AC^2+BD^2$
$=BD^2+AC^2+4\cdot MN^2$
$+2(EG^2+FH^2)=4(EG^2+FH^2+MN^2)$．

105．给定$\triangle ABC$，设直线 $x\perp BC$ 于 X，$y\perp AC$ 于 Y，$z\perp AB$ 于 Z．则 x、y、z 三线共点的必要且充分的条件为：

$\overline{XL}\cdot\overline{BC}+\overline{YM}\cdot\overline{CA}$
$+\overline{ZN}\cdot\overline{AB}=0$



图复三—105

式中的 L、M、N 各是三边 BC、CA、AB 的中点．

证明：由定理148，x、y、z 三线共点的必要且充分条件为：

$$XB^2-XC^2+YC^2-YA^2+ZA^2-ZB^2=0.$$

$\therefore(\overline{XB}+\overline{XC})(\overline{XB}-\overline{XC})+(\overline{YC}+\overline{YA})(\overline{YC}-\overline{YA})$
$+(\overline{ZA}+\overline{ZB})+(\overline{ZA}-\overline{ZB})=0$，

左端$=(\overline{XL}+\overline{LB}+\overline{LC}+\overline{XL})\cdot\overline{CB}$
$+(\overline{MC}+\overline{YM}+\overline{YM}+\overline{MA})\cdot\overline{AC}$

$+(\overline{NA}+ZN+ZN+\overline{NB})\cdot\overline{BA}$

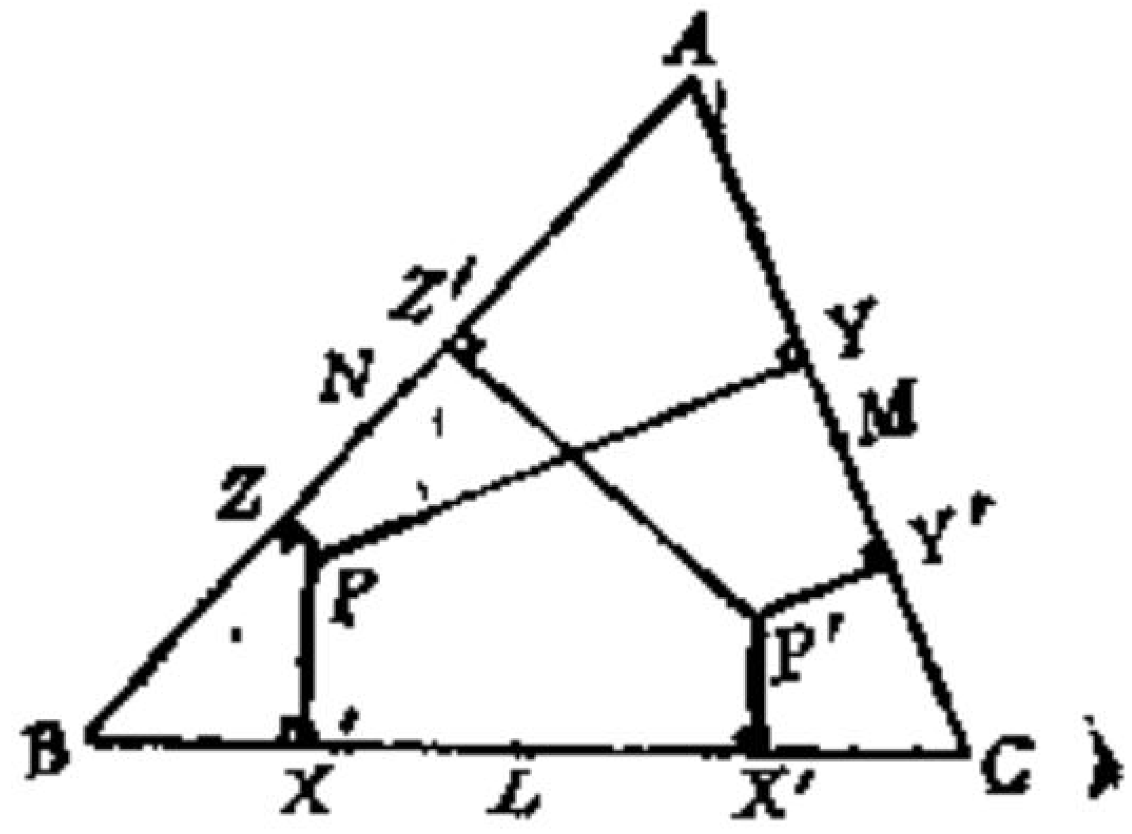
$=2\cdot\overline{XL}\cdot\overline{CB}+2\cdot YM\cdot\overline{AC}+2\cdot ZN\cdot\overline{BA}=0.$

$\therefore\quad XL\cdot\overline{BC}+\overline{YM}\cdot\overline{CA}+ZN\cdot\overline{AB}=0.$

故此式为三线共点的充要条件.

106. 设一线段 PP' 在 $\triangle ABC$ 三边 BC、CA、AB 所在直线上的射影为 XX'、YY'、ZZ'. 求证：

$$\overline{XX'}\cdot\overline{BC}+\overline{YY'}\cdot\overline{CA}+\overline{ZZ'}\cdot\overline{AB}=0$$



图复三—106

证明：由上题有,

$$XL\cdot BC+\overline{YM}\cdot CA+ZN\cdot AB=0,$$

$$X'L\cdot BC+Y'M\cdot CA+\overline{Z'N}\cdot\overline{AB}=0$$

两式相减得 $\overline{XX'}\cdot\overline{BC}+\overline{YY'}\cdot\overline{CA}+\overline{ZZ'}\cdot\overline{AB}=0$

107. 完全四边形任一对角线必被他两对角线调和分割.

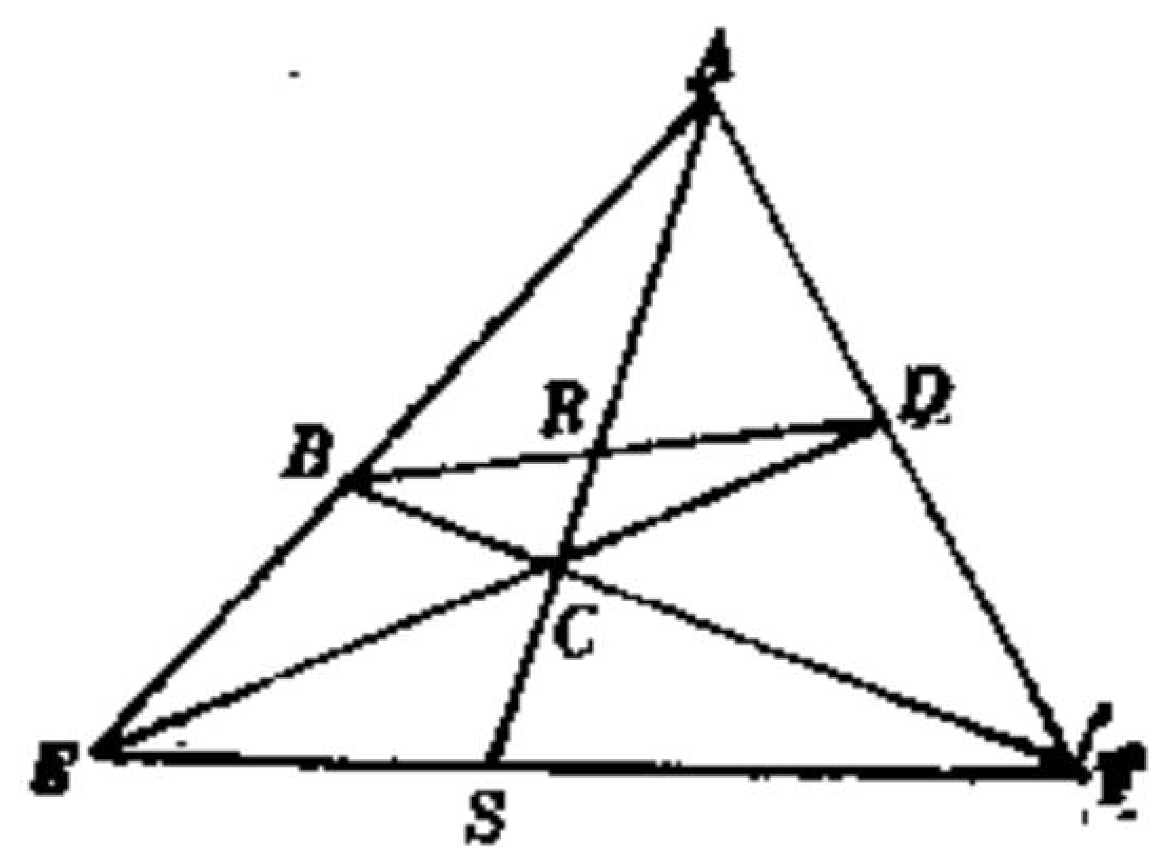
所谓一线段被两线调和分割，意指线段的两端与该两线交线段所在直线所得两交点组成调和点列.

把梅涅劳定理用于 $\triangle ACF$、$\triangle ACD$、$\triangle FCD$，其有关截线为 BRD、ESF、EBA，则有

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RC}}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{BF}}\cdot\frac{\overline{DF}}{\overline{DA}}=1,$$

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FD}}\cdot\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{SC}}{\overline{SA}}=1,$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{ED}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}\cdot\frac{\overline{BF}}{\overline{BC}}=1.$$



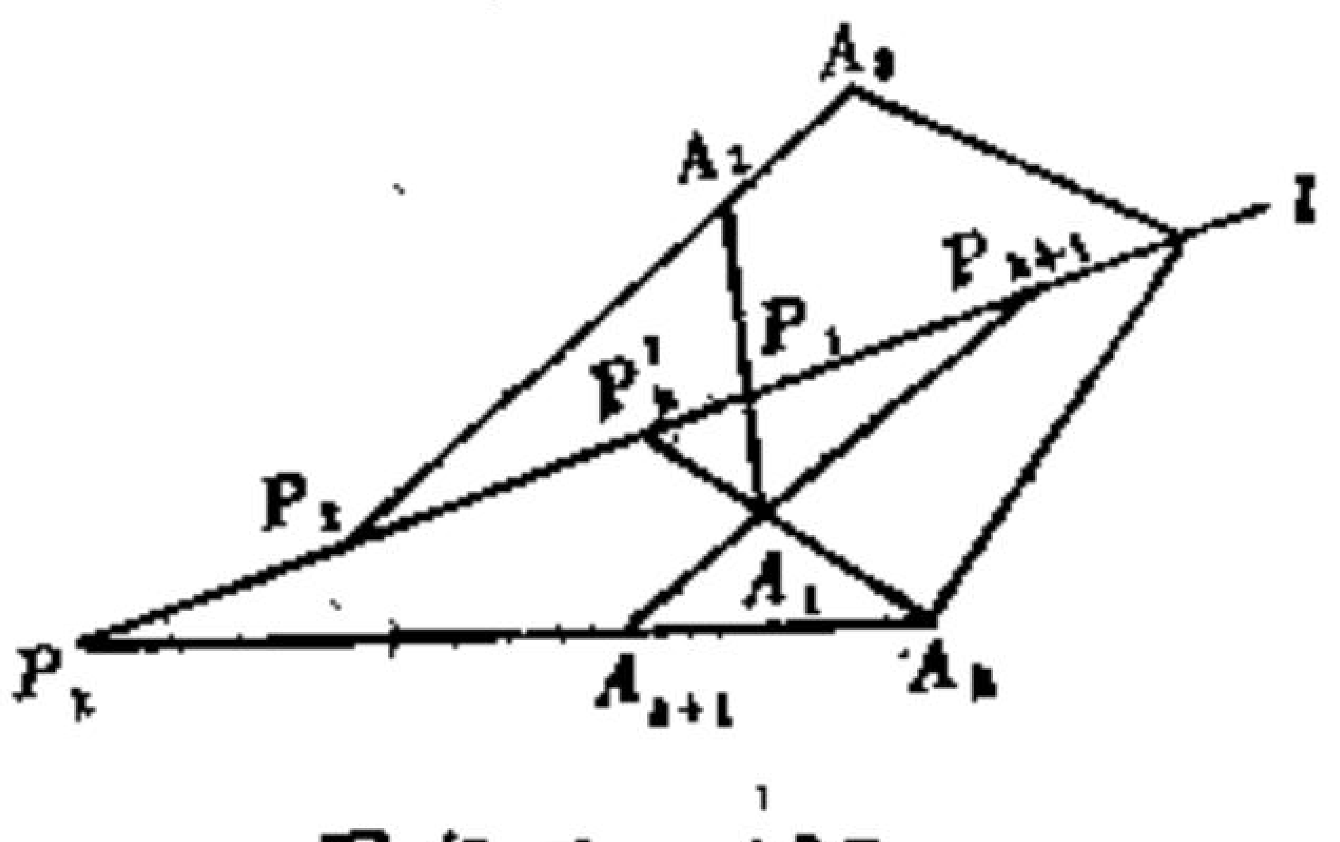
图复三—107

三式相乘并约去公因子得

$\frac{\overline{RA}}{\overline{RC}}=-\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}$. 由习题四第3题知 A、C、R、S 组成调和点列.

108. 设一直线交 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 各边 A_1A_2、A_2A_3、$\cdots A_nA_1$ 或其延长线于 P_1、P_2、P_3、$\cdots$、P_n, 则

$$\frac{\overline{P_1A_1}}{\overline{P_1A_2}}\cdot\frac{\overline{P_2A_2}}{\overline{P_2A_3}}\cdot\frac{\overline{P_3A_3}}{\overline{P_3A_4}}\cdot\cdots\cdot\frac{P_nA_n}{P_nA_1}=1.$$



图复三—108

证明：用数学归纳法

(1) 当 $n=3$ 时就是梅涅劳定理，命题成立.

(2) 假定当 $n=k$ 时命题成立，即有

$$\frac{P_1A_1}{P_1A_2}\cdot\frac{P_2A_2}{P_2A_3}\cdot\frac{P_3A_3}{P_3A_4}\cdot\cdots\cdot\frac{P_k'A_k}{P_k'A_1}=1 \qquad ①$$

为了下一步计算的方便，这里用 P_k' 代替 P_k.

(3) 当 $n=k+1$ 时，关于 $\Delta A_kA_{k+1}A_1$ 截线 $P_kP_{k'}P_{k+1}$ 有

$$\frac{P_k'A_1}{P_k'A_k}\cdot\frac{P_kA_k}{P_kA_{k+1}}\cdot\frac{P_{k+1}A_{k+1}}{P_{k+1}A_1}=1 \qquad ②$$

①·②得 $\frac{P_1A_1}{P_1A_2}\cdot\frac{P_2A_2}{P_2A_3}\cdot\frac{P_3A_3}{P_3A_4}\cdot\cdots\cdot\frac{P_{k+1}A_{k+1}}{P_{k+1}A_1}=1$,

故本题对 n 边形成立.

109. 若四边形有内切圆或旁切圆，则对边的切点连线与两对角线共点或互相平行.

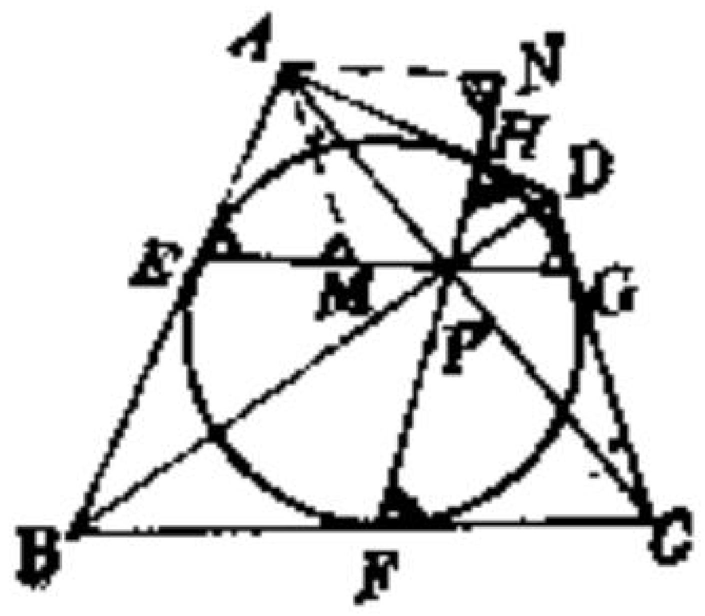
证明：令 E、F、G、H 是 AB、BC、CD、DA 上的切点，作 $AM\parallel DC$，$AN\parallel BC$，各交 EG、FH 于 M、N.

则 $\triangle PAM\backsim\triangle PCG$,

$\triangle P'AN\backsim\triangle P'CF$.

P、P' 是 AC 与 EG、FN 的交点，且

$$AM=AE,\ AN=AH.$$



图复三—109(1)

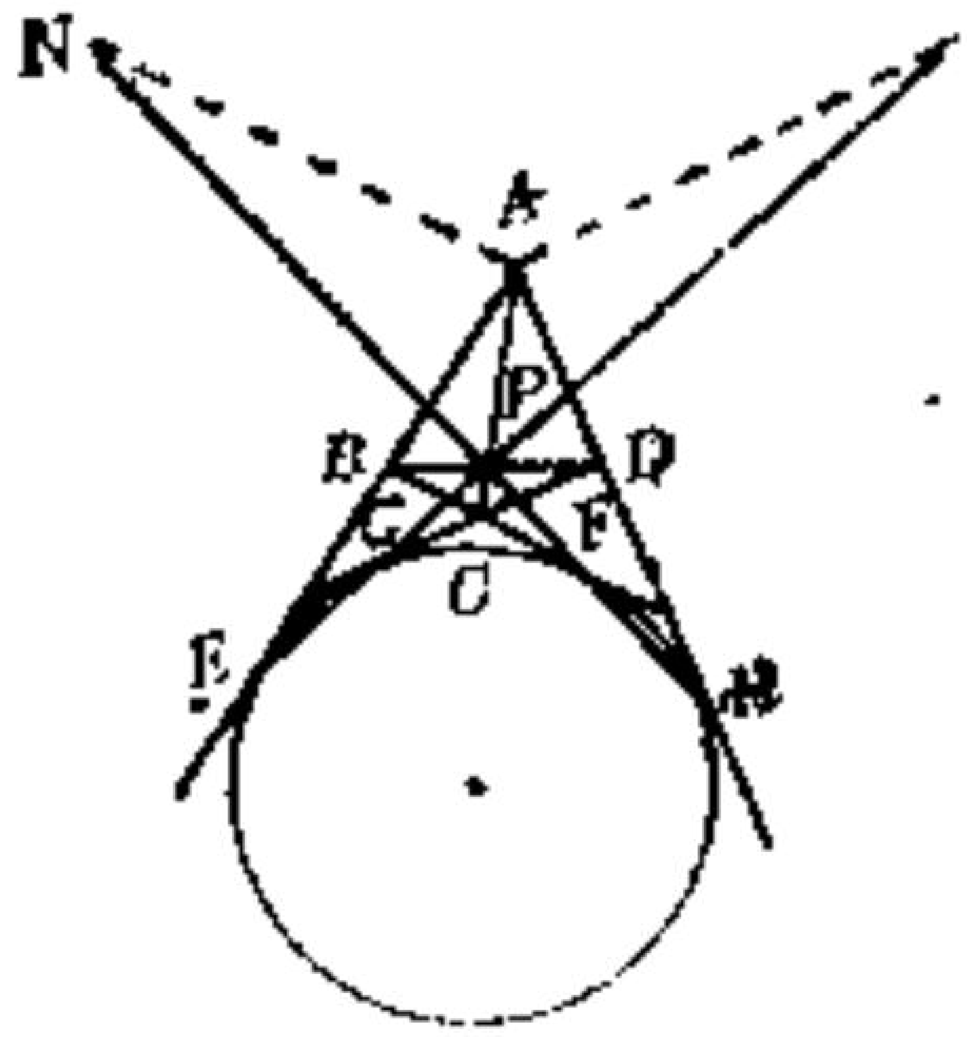
$$\therefore\quad \frac{PA}{PC}=\frac{AM}{CG}=\frac{AE}{CG},\quad \frac{P'A}{P'C}=\frac{AN}{CF}=\frac{AH}{CF}=\frac{AE}{CG}.$$

故 P 与 P' 重合，即 EG、FH、AC 共点于 P.

同理，EG、FH、BD亦共点于P.

（2）关于旁切圆情况下的证明完全是类似的.

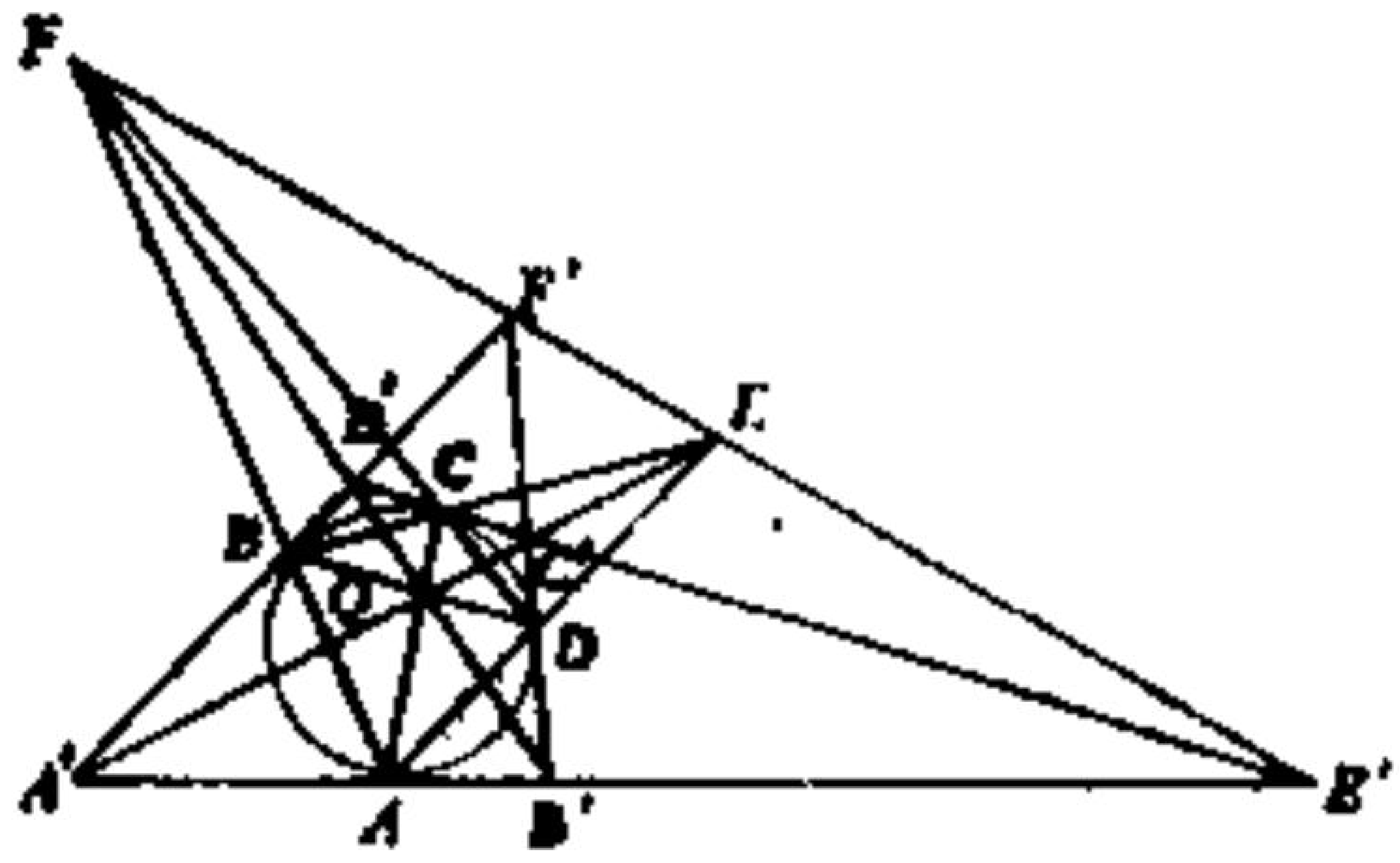
（3）当四边形两对角线平行时，则两平行的对边切点连线亦与两平行的对角线平行.



图复三—109(2)

110. 圆上四点两两相连组成一完全四角形，又过每点作圆的切线交成一完全四边形，这两形必有共同的对角三角形.

本题称马各洛林（Maclaurin，1698—1746年）定理.



图复三—110

证明：由习题十七第19题知，$\triangle QEF$为完全四角形$ABCD$的对角三角形.

在完全四边形$A'B'C'D'E'F'$中，

(1) 凸四边形 $A'B'C'D'$ 有内切圆，故 AC、BD、$A'C'$、$B'D'$ 共点于 Q；

(2) 折四边形 $F'B'E'D'$ 有旁切圆，故 DC、AB、$F'E'$、$B'D'$ 共点于 F；

(3) 凹四边形 $A'F'C'E'$ 有内切圆，故 BC、AD、$A'C'$、$E'F'$ 共点于 E.

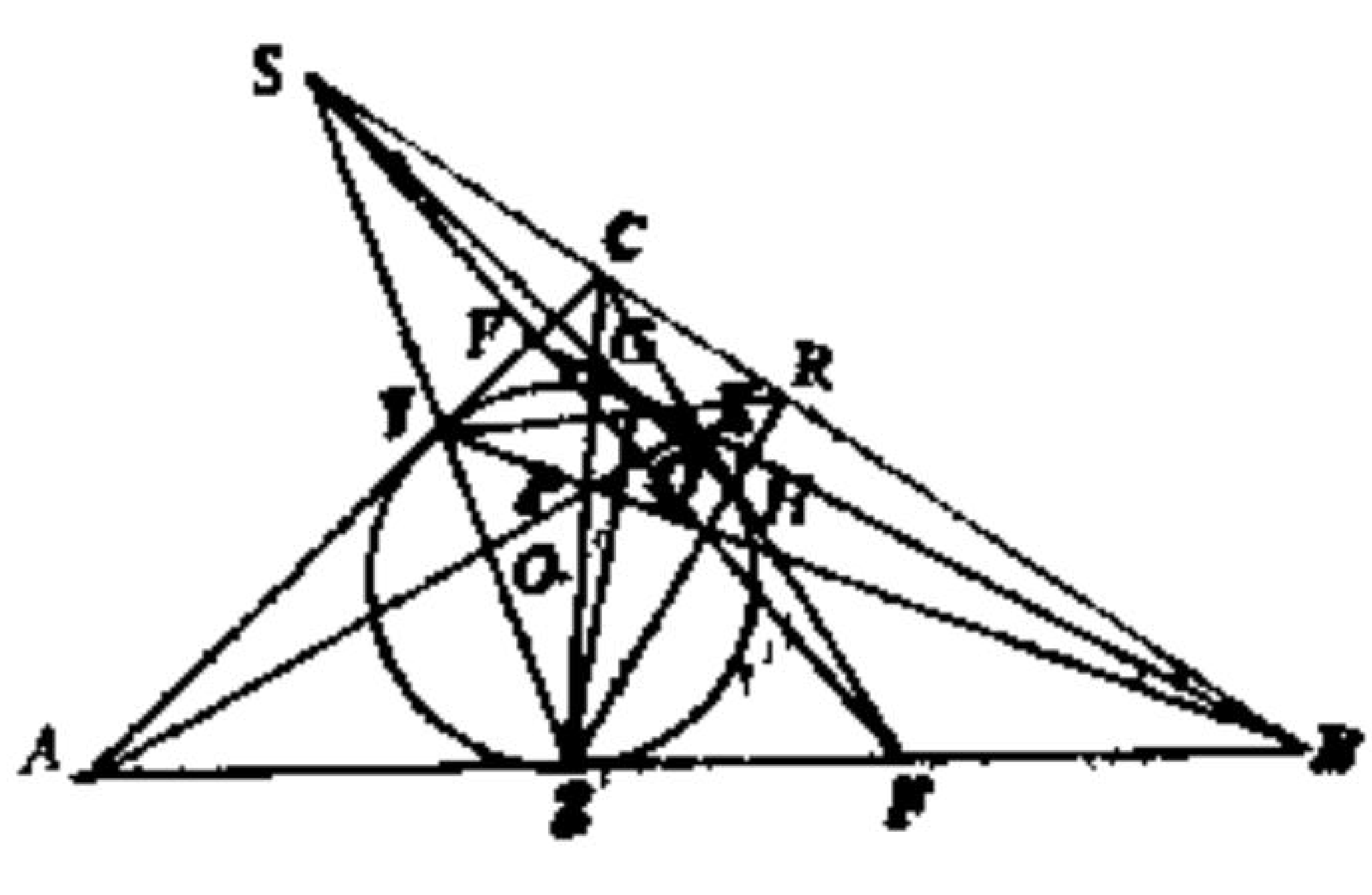
由(1)、(3)，A'、Q、C'、E 四点共线；

由(1)、(2)，B'、Q、D'、F 四点共线；

由(2)、(3)，E'、E、F'、F 四点共线.

∴ Q、E、F 是三对角线 $A'C'$、$B'D'$、$E'F'$ 的交点. 故 $\triangle QEF$ 为完全四边形的对角三角形.

111. 已知 $\triangle ABC$，一圆切 CA、AB 于 Y、Z，自 B、C 另作该圆的切线交于 X，则 AX、BY、CZ 三线共点或平行.



图复三—111

证明：自 B、C 作⊙O 的切线切⊙O 于 G、H，交 AC、AB 于 E、F.

∵ 折四边形 $ECFB$ 有旁切圆，由题 109 知，YZ、GH、BC、EF 共点于 S.

在△AYZ、△XBC 中，其对应边的交点 E、F、S 共线，由 P166 笛沙格定理推论知，其对应顶点连线 AX、BY、CZ 或共点或平行.

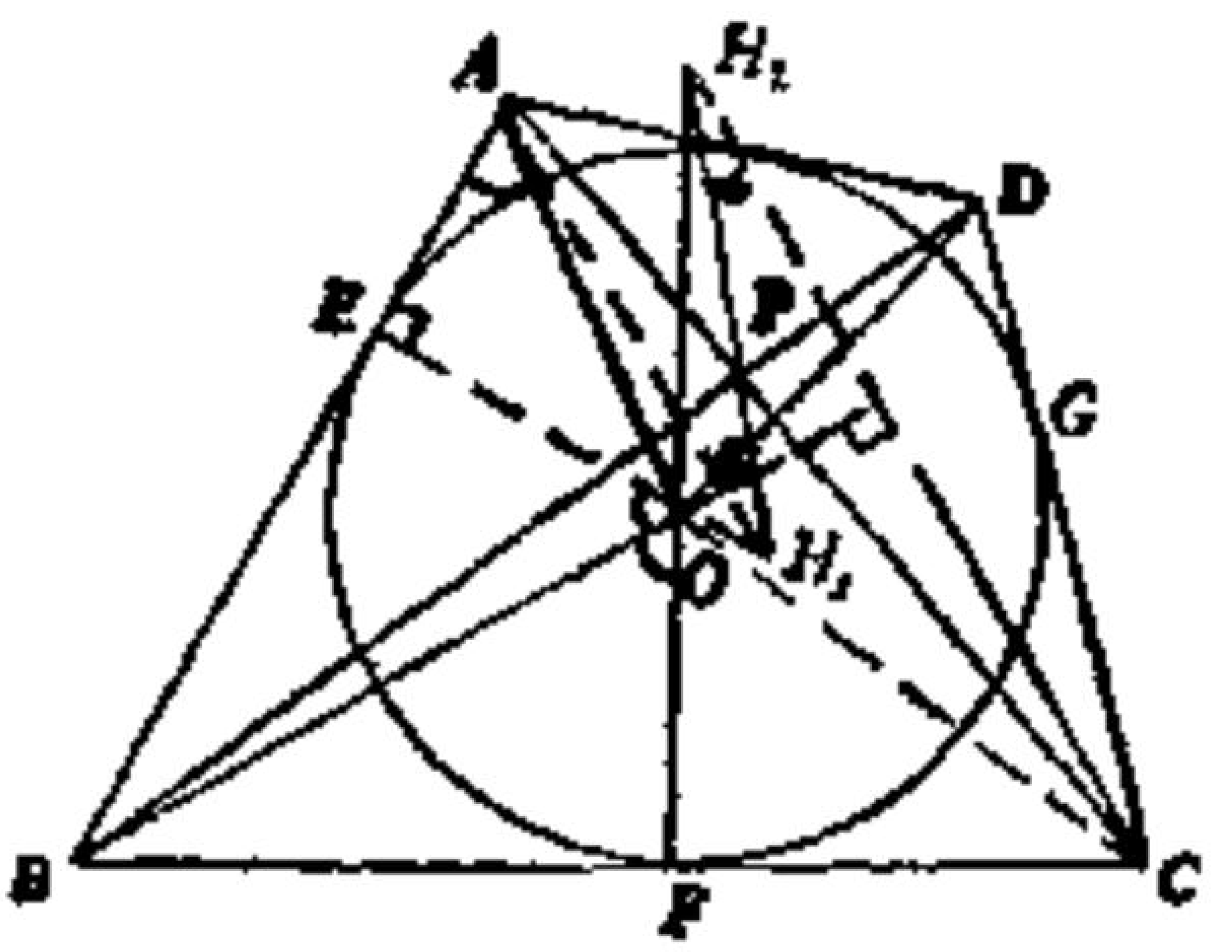
112．设四边形 $ABCD$ 有内切圆或旁切圆⊙O，则△OAB、△OBC、△OCD、△ODA 的垂心共线.

证明：设四个三角形的垂心依次为 H_1、H_2、H_3、H_4. 令 H_1H_2 交 AC 于 P. 因 $AH_1 /\!/ CH_2$，有△AH_1P∽△CH_2P

又 $\angle H_1AE = \angle BOE = \angle BOF$

$= \angle H_2CF$，

∴ 直角△AH_1E∽直角△CH_2F.



图复三—112

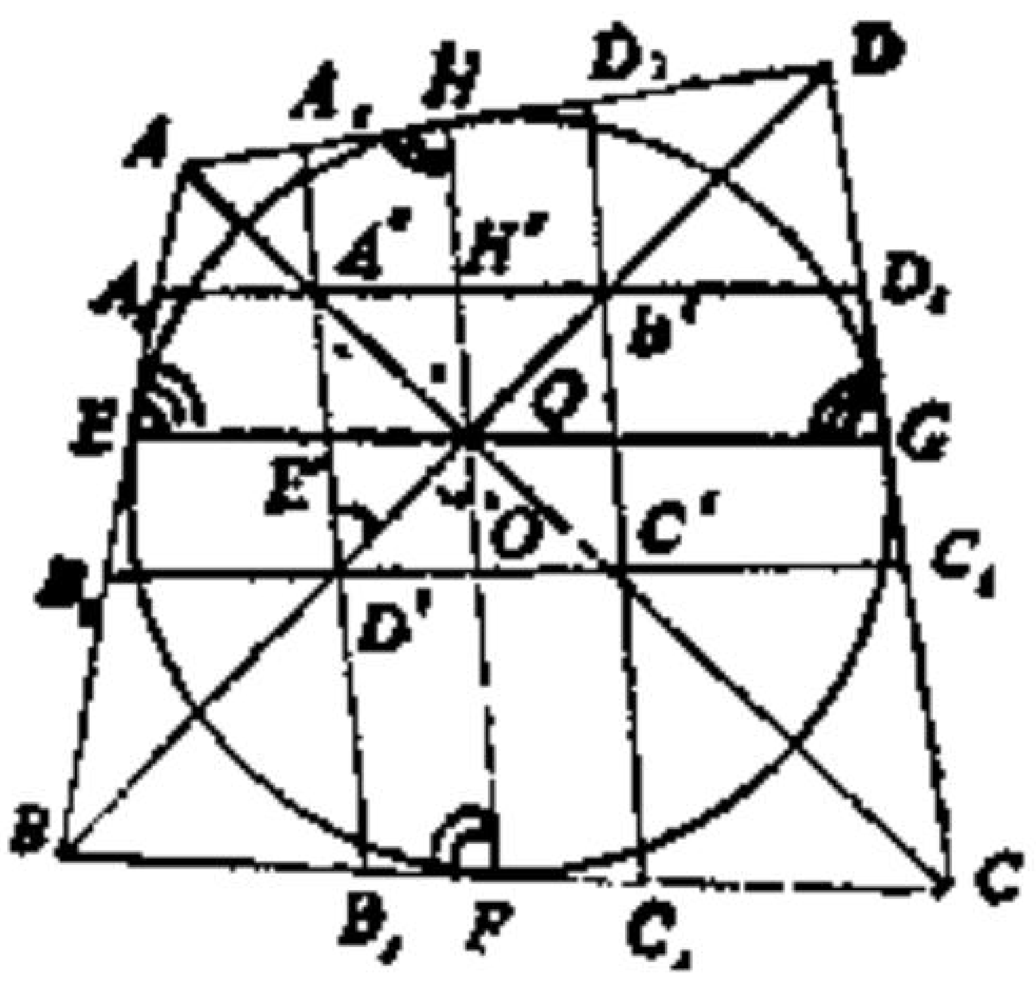
故有 $\dfrac{AH_1}{CH_2} = \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{AE}{CF}$

由第109题知，P 是 AC 与 BD 的交点.

同理有 H_2、H_3 与 H_3、H_4 均过 P 点，故四个垂心共线.

113．设四边形 $ABCD$ 有内切圆或旁切圆，E、F、G、H 各是 AB、BC、CD、DA 上的切点，今在 AC 上取两点 A'、C'，在 BD 上取两点 B'、D'，若 $A'B'\parallel EG\parallel C'D'$ 且 $A'D'\parallel FH$，则 $B'C'\parallel FH$．而 $A'B'$、$C'D'$ 交 AB、CD 所得四交点及 $A'D'$、$B'C'$ 交 AD、BC 所得四交点凡八点共圆．

证明：用正弦定理证明 E' 是 $A'D'$ 的中点，并进而得出 $B'C'\parallel FH$．



图复三—113

$$\frac{A'E'}{\sin\angle A'QE'}=\frac{QE'}{\sin\angle QA'E},$$

$$\frac{QE'}{\sin\angle QD'E'}=\frac{D'E'}{\sin\angle D'QE'},$$

$$\frac{AH}{\sin\angle AQH}=\frac{QA}{\sin\angle QHA},\quad \frac{QA}{\sin\angle QEA}=\frac{AE}{\sin\angle AQE},$$

$$\frac{QB}{\sin\angle QFB}=\frac{BF}{\sin\angle BQF},\quad \frac{BE}{\sin\angle BQE}=\frac{QB}{\sin\angle QEB}.$$

以上六式相乘，有分母的左端与右端相等；故其分子的六个乘积亦相等，在约去公因子 QA、QB、QE' 后并注意到 $AE=AH$、$BE=BF$．

$\therefore\quad A'E'=D'E'$　　即 E' 是 $A'D'$ 的中点．

故有 Q 点是 $A'C'$ 与 $B'D'$ 的中点，因而有四边形

$A'B'C'D'$为平行四边形．∴ $B'C' \parallel FH$．

于是 $A_1B_1C_1D_1$、$A_2B_2C_2D_2$ 均为等腰梯形，故均各四点共圆．由于 EG、FH 为等腰梯形的中横线，故两圆有共同的中心 O 点．

又 $\frac{A'A_1}{QE}=\frac{AA'}{AQ}=\frac{A'A_2}{QH}$，$\frac{A'D_1}{QG}=\frac{CA'}{CQ}=\frac{A'B_2}{QF}$，

有 $\frac{A'A_1 \cdot A'D_1}{QE \cdot QG}=\frac{A'A_2 \cdot A'B_2}{QH \cdot QF}$．

∴ $A'A_1 \cdot A'D_1=A'A_2 \cdot A'B_2$

故 A_1、A_2、D_1、B_2 四点共圆，且圆心亦在 O 点，

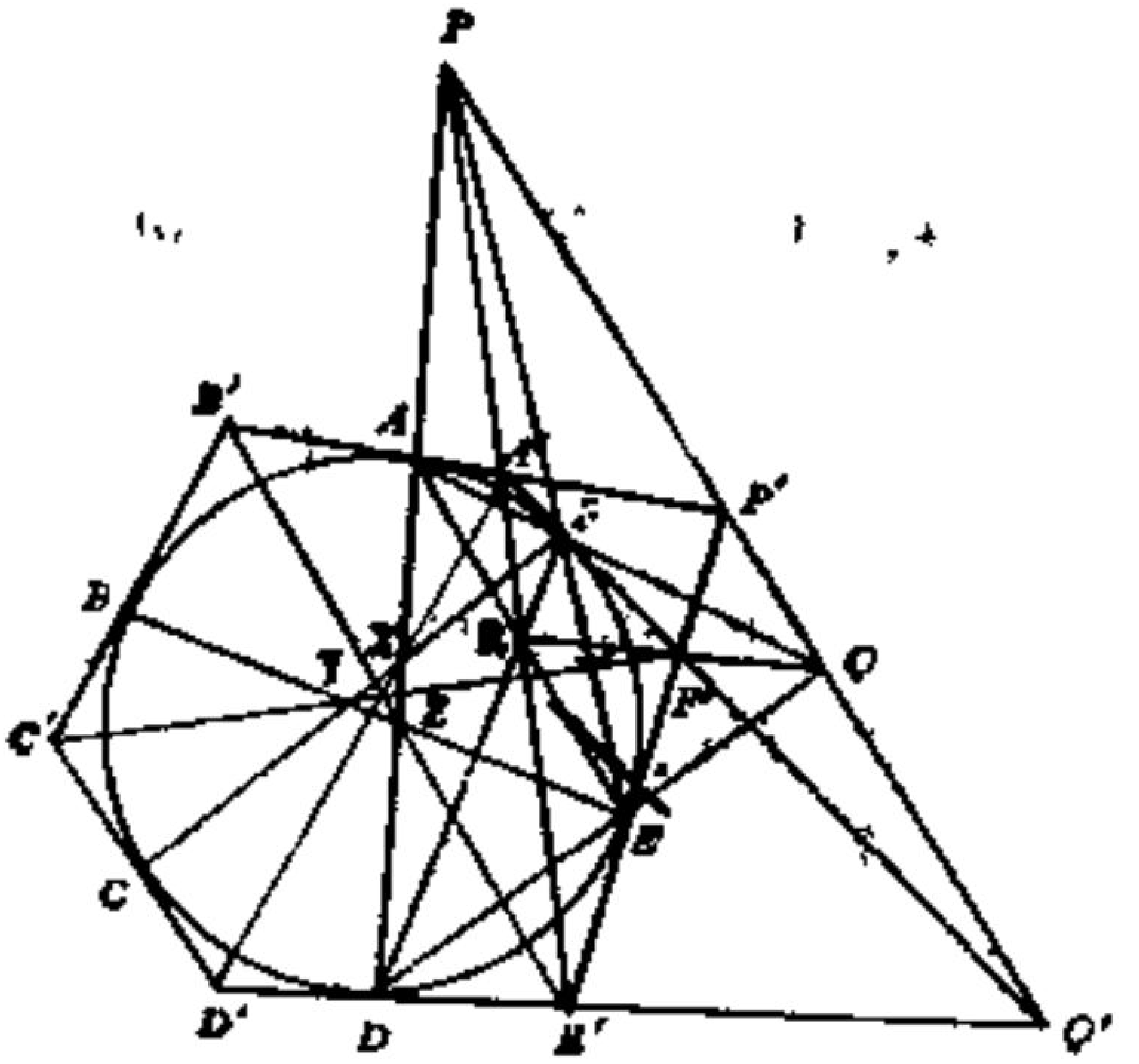
∴ A_1、A_2、B_1、B_2、C_1、C_2、D_1、D_2 八点共圆．

114．设六边形各边（所在直线）同切于一圆，则三双对顶点的连线共点或互相平行．

本题称布利安桑定理，与巴斯开定理（习题十四第18题）是有名的"对偶"命题．

证明：设 A、B、C、D、E、F 是六边形在圆上的切点，由109题知，

过切点 A、D、C、F 的四边形有 AD、CF、$A'D'$ 共点于 X；



图复三—114

过切点 B、E、C、F 的四边形有 BE、CF、$C'F'$ 共点于 Y；

过切点 B、E、A、D 的四边形有 BE、AD、$B'E'$ 共点于 Z；

过切点 A、E、D、F 的四边形有 AE、DF、$A'E'$ 共点于 R.

又四边形 $A'Q'E'P'$ 有旁切圆，故 EF、AD、$A'E'$、$P'Q'$ 共点于 P.

∵ $\triangle XYZ$ 与 $\triangle A'F'E'$ 对应边的交点 F、E、P 共线，由笛沙格定理推论知，其对应顶点连线 XA、YF、ZE 三线共点或互相平行，即 $A'D'$、$B'E'$、$C'F'$ 共点或互相平行.

第四章 轨 迹

习 题 二 十

1．切于一定直线上一定点的圆，其中心的轨迹是一条垂直定线于该定点的直线。

提要(1)：完备性，∵ ⊙O 切 l 于 P，∴ $OP\perp l$ 于 P，$a\perp l$ 于 P，故 O 点必须在 a 上。

(2)：纯粹性：取 a 上任一点 O，以 O 为圆心，OP 长为半径画圆，

∵ ⊙O 的半径 $OP\perp l$ 于 P，

∴ ⊙O 切 l 于 P．当 O 点重合于 P 时，⊙O 退缩为点圆。

∴ O 点的轨迹为直线 a，P 为极限点。

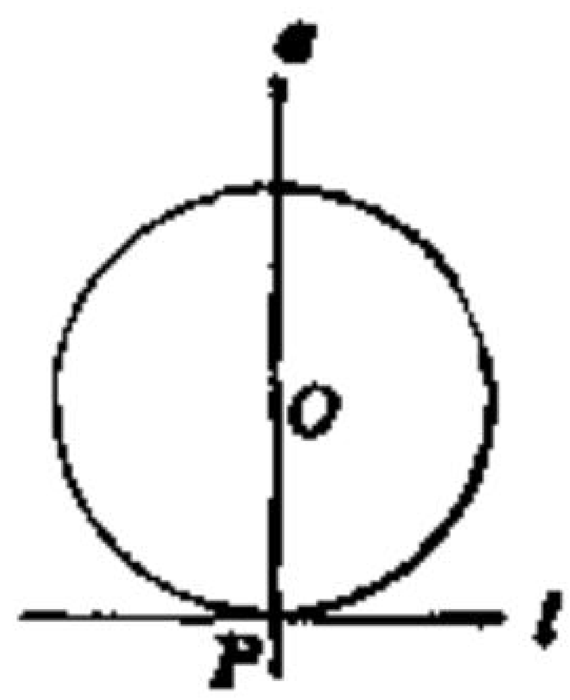


图20—1

2．共底定高的诸三角形，其重心的轨迹是平行于公底的两条直线，它们与公底的距离都等于定高的三分之一。

提要：令定高为 h，则 $GK=h/3$，G、G' 为△CAB 与△$C'AB$ 的重心，其轨迹为 l、l'．

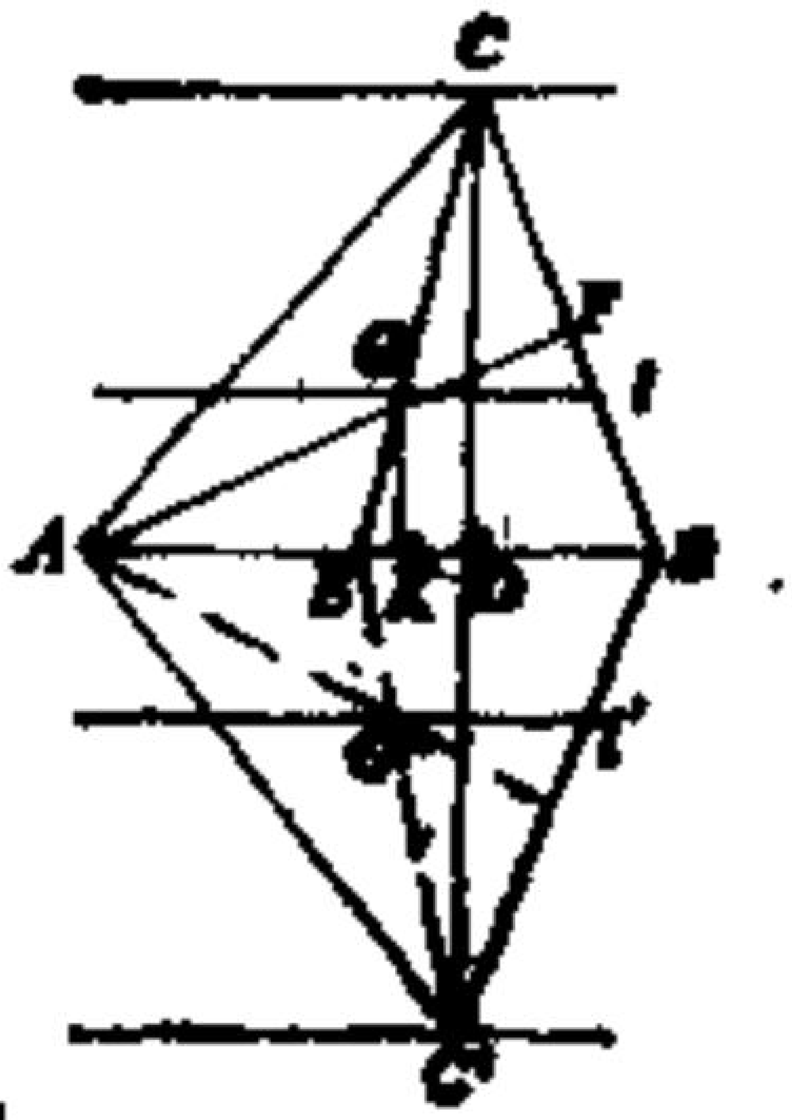


图20—2

3．切于一定圆上一定点的圆，其中心的轨迹是定圆中心与该定点的连线。

提要：A是$\odot O$上的定切点，

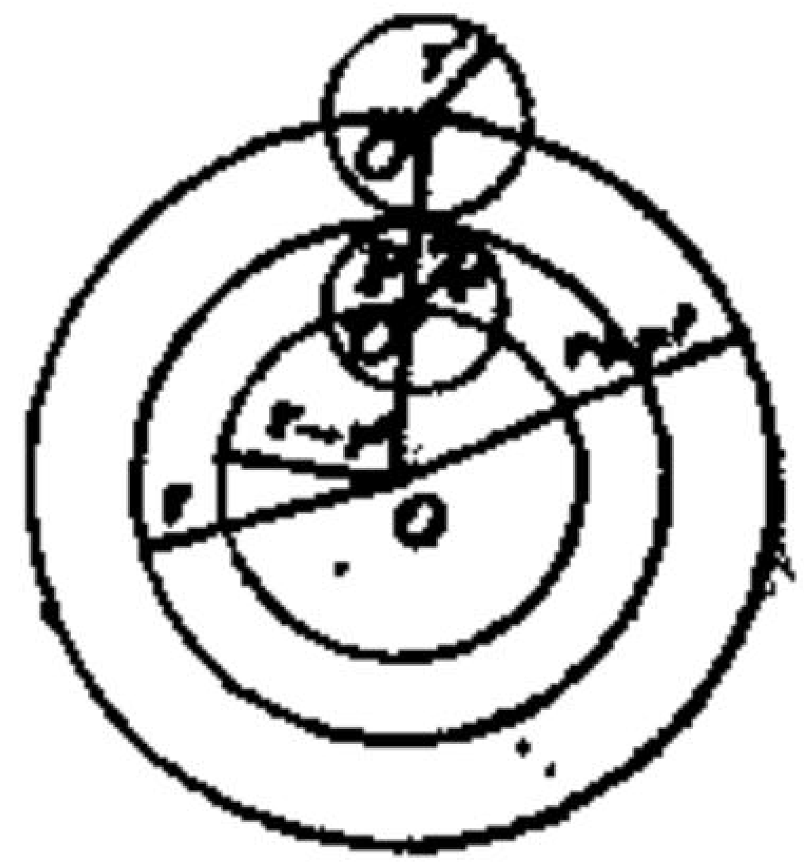
$\therefore$ O、A、O'共线，轨迹为直线 l．



图20—3

4．设有定半径的动圆切于一个不等于它的定圆，则动圆的中心的轨迹是与定圆同心的两圆，它们的半径分别等于定圆与动圆的半径和及差。

提要：动圆$\odot O'$的半径为r'，定圆$\odot O$的半径为r，当$\odot O'(r')$外切于$\odot O(r)$时，其圆心轨迹为$\odot O(r+r')$；当$\odot O'(r')$内切于$\odot O(r)$时，其圆心轨迹为$\odot O(|r-r'|)$．


图20—4

5. 设一点与一定圆的距离等于定长，但此定长小于定圆的半径，则该点的轨迹是与定圆同心的两圆，它们的半径分别等于定圆半径与定长的和及差。

提要：令点$P(P')$与定圆$\odot O(r)$的距离为定长d，则点$P(P')$的轨迹为$\odot O(r-d)$与$\odot O(r+d)$。

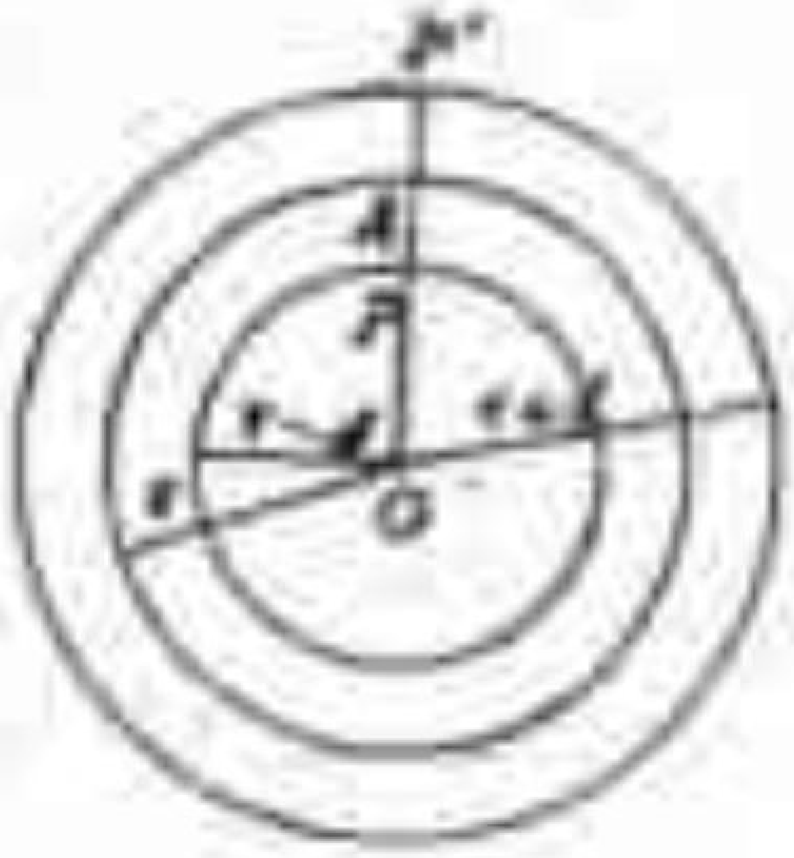


图20—5

6. 设一点与一定圆的距离等于定长，且此定长大于定圆的半径，则该点的轨迹是与定圆同心的一圆，其半径等于定圆半径与定长的和。

提要：令定长$d>r$，r为定圆$\odot O$的半径，则动点P只能在$\odot O(r)$的外部，故P点的轨迹为$\odot O(r+d)$。

7. 设一直线恒过一定点，则另一定点关于该直线的对称点的轨迹是一圆，这圆以前一定点为中心而且通过后一定点。

提要：直线l恒过定点O，P'是定点P关于直线l的对称点且有$OP=OP'=r$，P'点的轨迹是$\odot O(r)$。

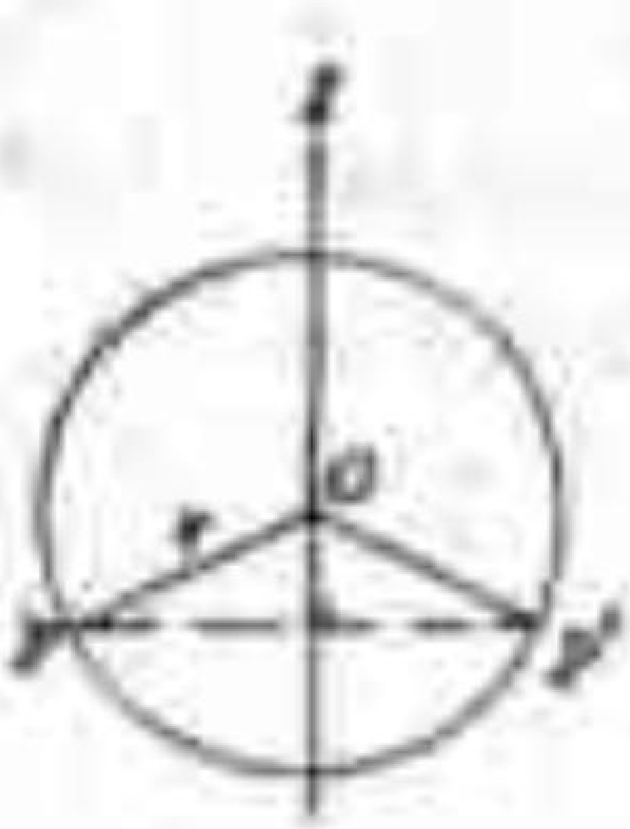


图20—7

8. 直角三角形的斜边固定，求证这三角形的重心的轨迹是一圆，这圆以斜边的中点为中心，而半径等于斜边的六分之一。

提要：C 点的轨迹为$\odot O\left(\frac{1}{2}AB\right)$，故重心$G$的轨迹为$\odot O\left(\frac{1}{6}AB\right)$，$M$、$N$为极限点。

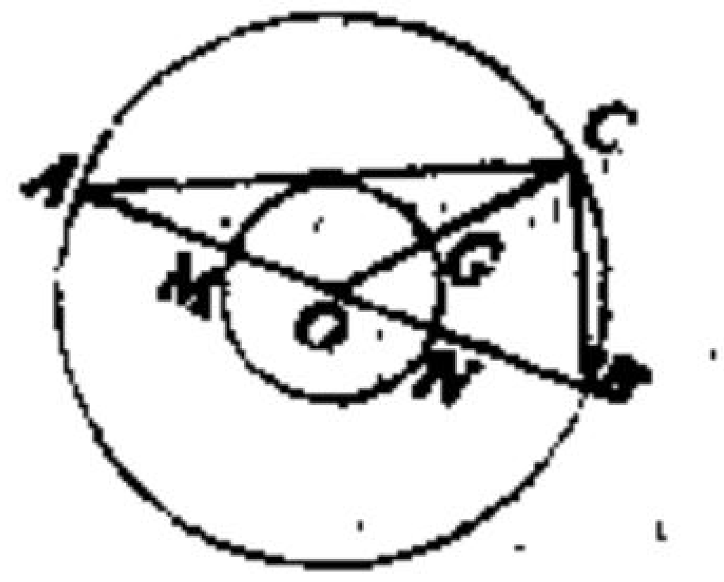


图20—8

9. 设平行四边形的底边固定且侧边有定长，求证这平行四边形的中心的轨迹是一圆，其圆心是定底的中点，半径等于侧边的一半

提要：设侧边定长为 a，

$\because\ OP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$，故$P$点的轨迹为$\odot O\left(\frac{1}{2}a\right)$，$M$、$N$为极限点。

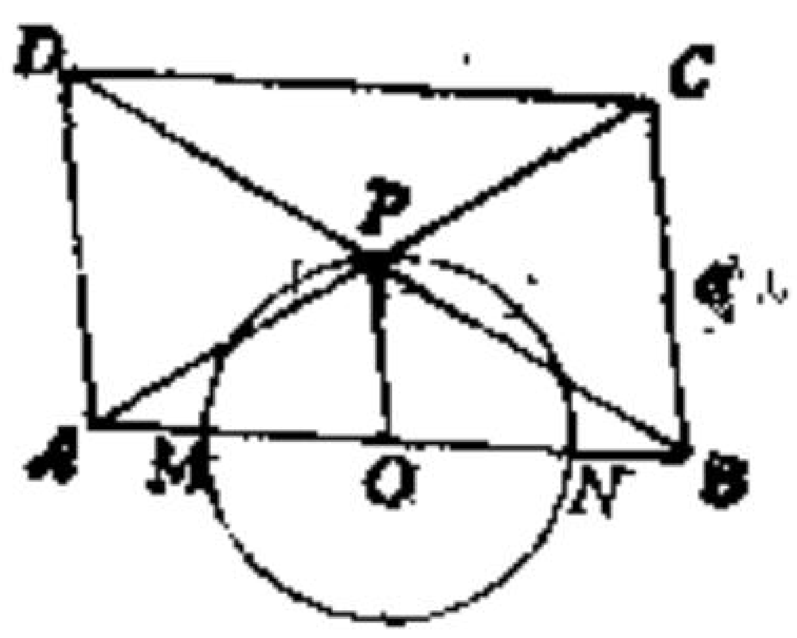


图20—9

10. 嵌于定三角形两边之间而平行于第三边的线段、它的中点的轨迹是第三边的中线。

提要：点P是平行于 BC 的 DE 的中点，故P点在中线 AF 上，$\therefore$ P点的轨迹为 AF，A 为极限点。

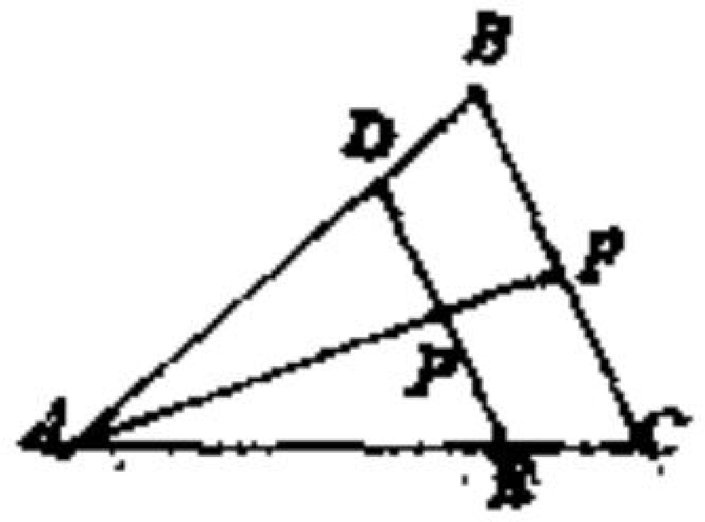


图20—10

11．将三角形的每顶点与对边上的点相连，求证这些连结线的中点的轨迹是三角形的中点三角形。

提要：取D、E、F为BC、CA、AB的中点，D'、E'、F'为BC、CA、AB上的动点，X、Y、Z为AD'、BE'、CF'的中点，则X、Y、Z在中线EF、FD、DE上，∴ X、Y、Z的轨迹是中点三角形$\triangle DEF$.

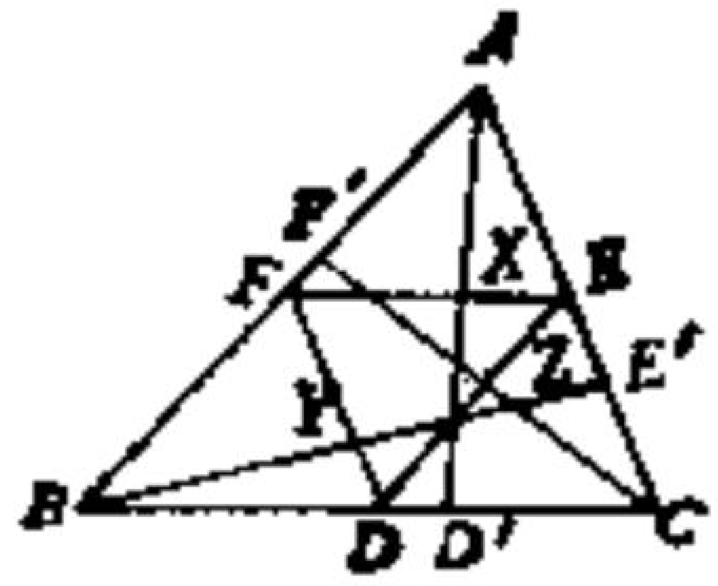


图20—11

12．在$\triangle ABC$中，A'、B'、C'各是三边BC、CA、AB上的点，设$A'B' \parallel AB$，且$A'C' \parallel AC$，则$B'C'$的中点的轨迹是$\triangle ABC$中平行于BC边的中横线。

提要：∵ $AB'A'C'$是平行四边形，故$B'C'$的中点P亦为AA'的中点，故P点的轨迹为BC边的中横线EF.

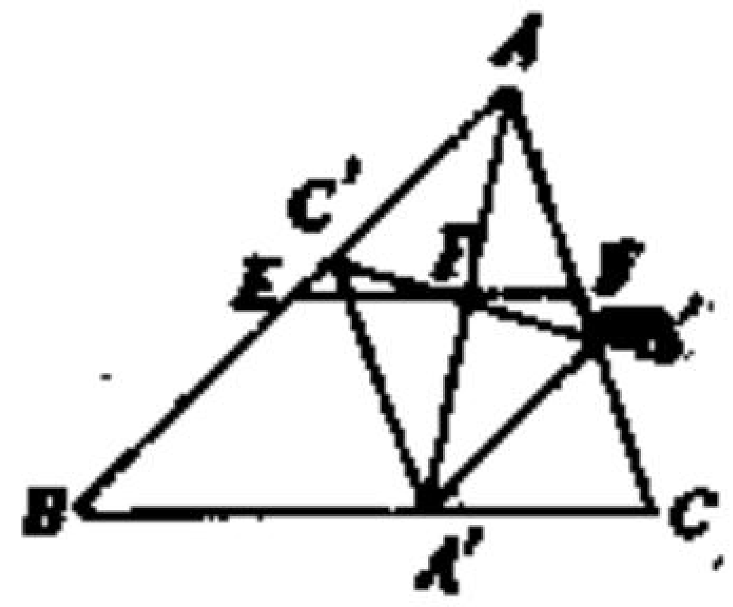


图20—12

13．$\triangle ABC$中，BC边固定，A在过B的一条定直线上，求证$\triangle ABC$的外心的轨迹是BC边的中垂线。

提要：由于BC固定，$\triangle ABC$的外心必在BC边的中垂线上。

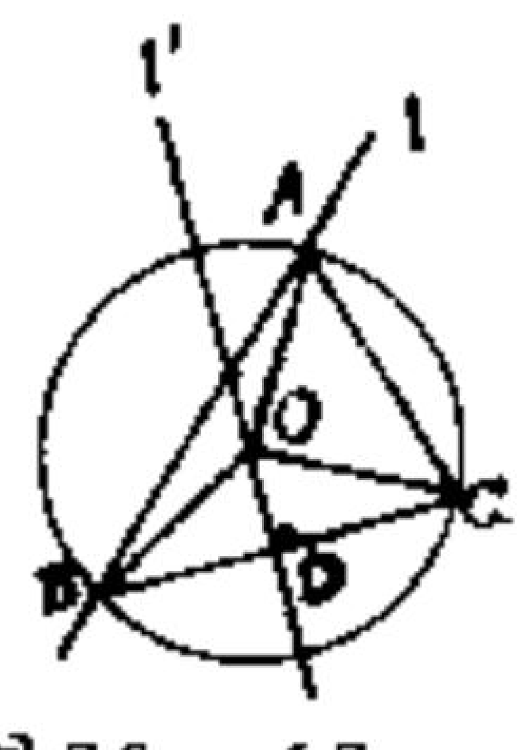


图20—13

14．△ABC 中，BC 边固定，∠A 等于定角θ，求证△ABC 的内心的轨迹是以 BC 为弦的两个弓形弧，它们的内接角都等于 $90°+\frac{1}{2}\theta$.

提要：∵ $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=90°$，

有 $\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90°-\frac{1}{2}\angle A$

∴ $\angle BIC=180°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

$=90°+\frac{1}{2}\angle A=90°+\frac{1}{2}\theta.$

I 点的轨迹为 $\overset{\frown}{BMC}$ 和 $\overset{\frown}{BNC}$.

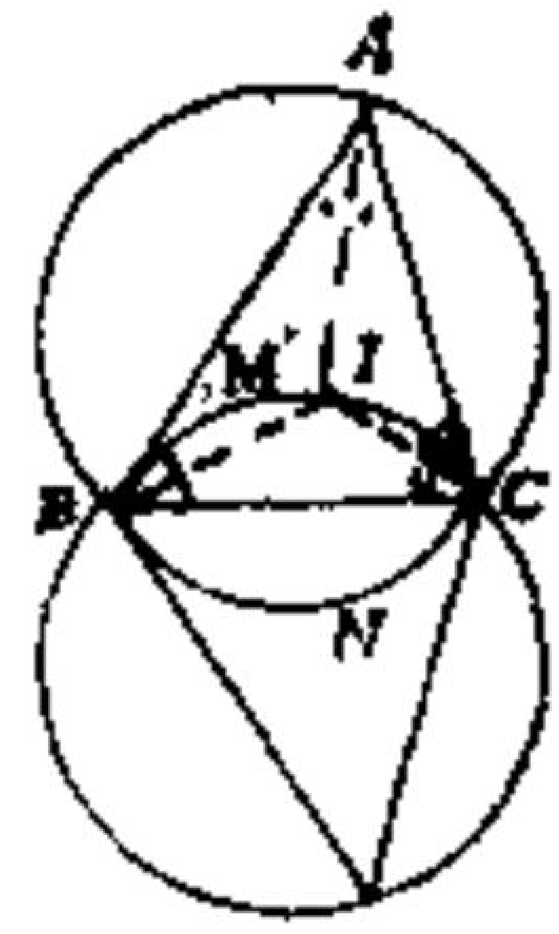


图20—14

15．△ABC 中，BC 边固定，∠A 等于定角θ，E、F 是 BC 边的三等分点，求证△ABC 的重心的轨迹是以 EF 为弦的两个弓形弧，它们的内接角等于θ．

提要：∵ $EG /\!/ BA$，$GF /\!/ AC$，

∴ $\angle EGF=\angle BAC=\theta$.

G 点的轨迹为 $\overset{\frown}{EMF}$、$\overset{\frown}{ENF}$，E、F 为极限点。

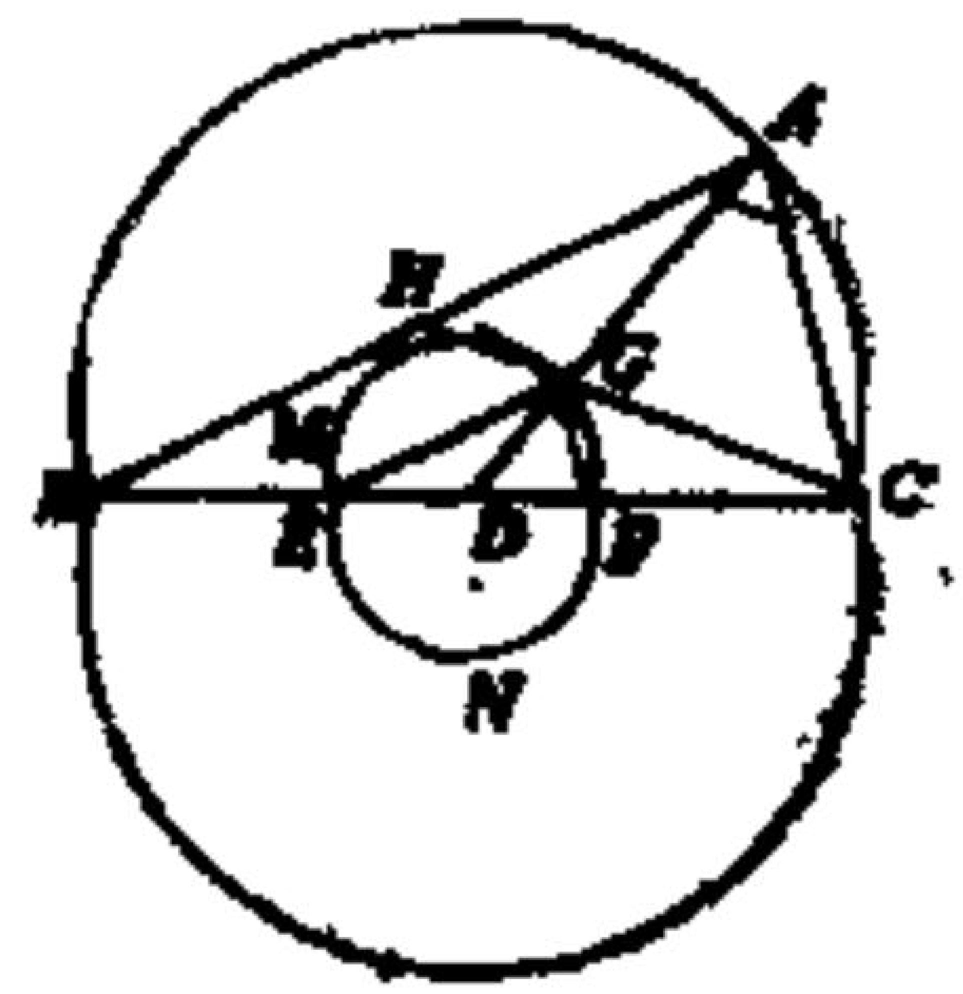


图20—15

16．设一点在已知三角形三边所在直线上的射影共线，则该点的轨迹是已知三角形的外接圆。

提要：P不可能在$\triangle ABC$的内部，因为在这情况下其在三边上的射影不可能共线。



图20—16

当P在$\angle C$的范围内且关于AB在C点的异侧时，P、F、A、E及P、F、D、B均四点共圆。

$$\therefore\ \angle APB+\angle C=\angle APF+\angle FPB+\angle C=\angle AEF+\angle FDC+\angle C=180^\circ,$$

故P点在$\overset{\frown}{AB}$上。

17．设P是定三角形$\triangle ABC$的BC边所在直线上的点。今以BP、CP为弦各作圆，使分别切于AB、AC，求证所作两圆的另一交点Q的轨迹是$\triangle ABC$的外接圆。

提要：当Q关于BC在A点的异侧时，有

$$\angle BQC+\angle A=\angle BQP+\angle PQC+\angle A=\angle ABC+\angle ACB+\angle A=180^\circ$$

$\therefore$ Q点在$\odot O$上，其轨迹为$\odot ABC$，其中A、B、C为极限点。

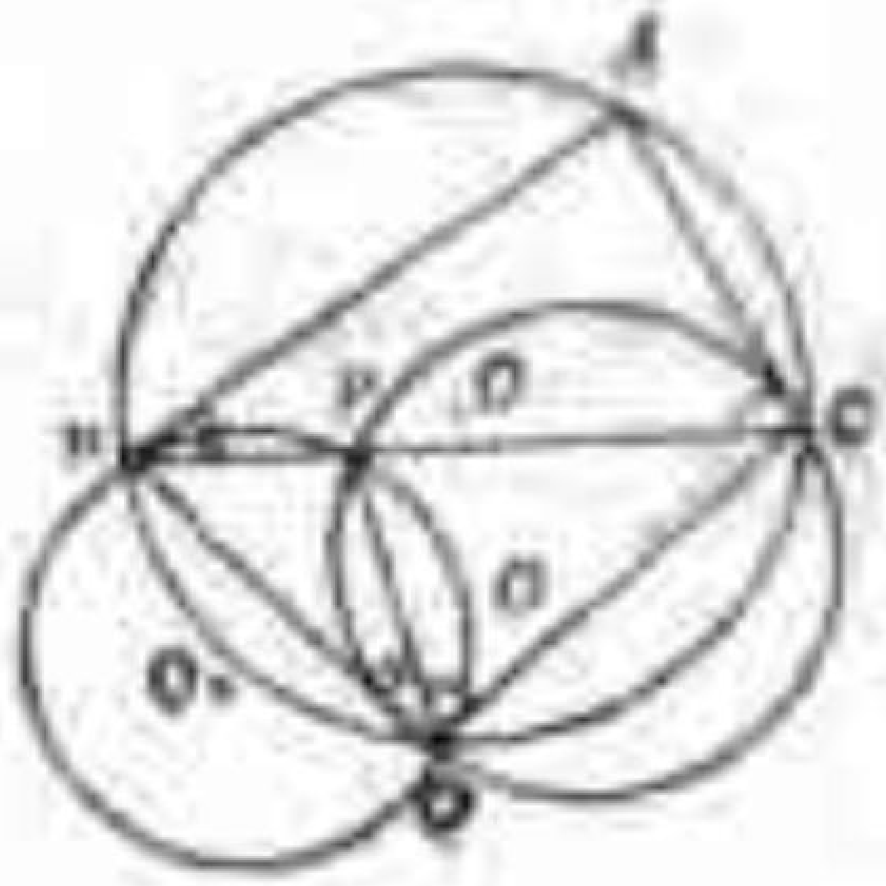


图20—17

18、$\triangle ABC$内接于定圆且BC边固定，今过A作两圆，使分别切BC于B、C，求所作两圆的第三交点的轨迹是以BC为弦且等于原圆的一圆。

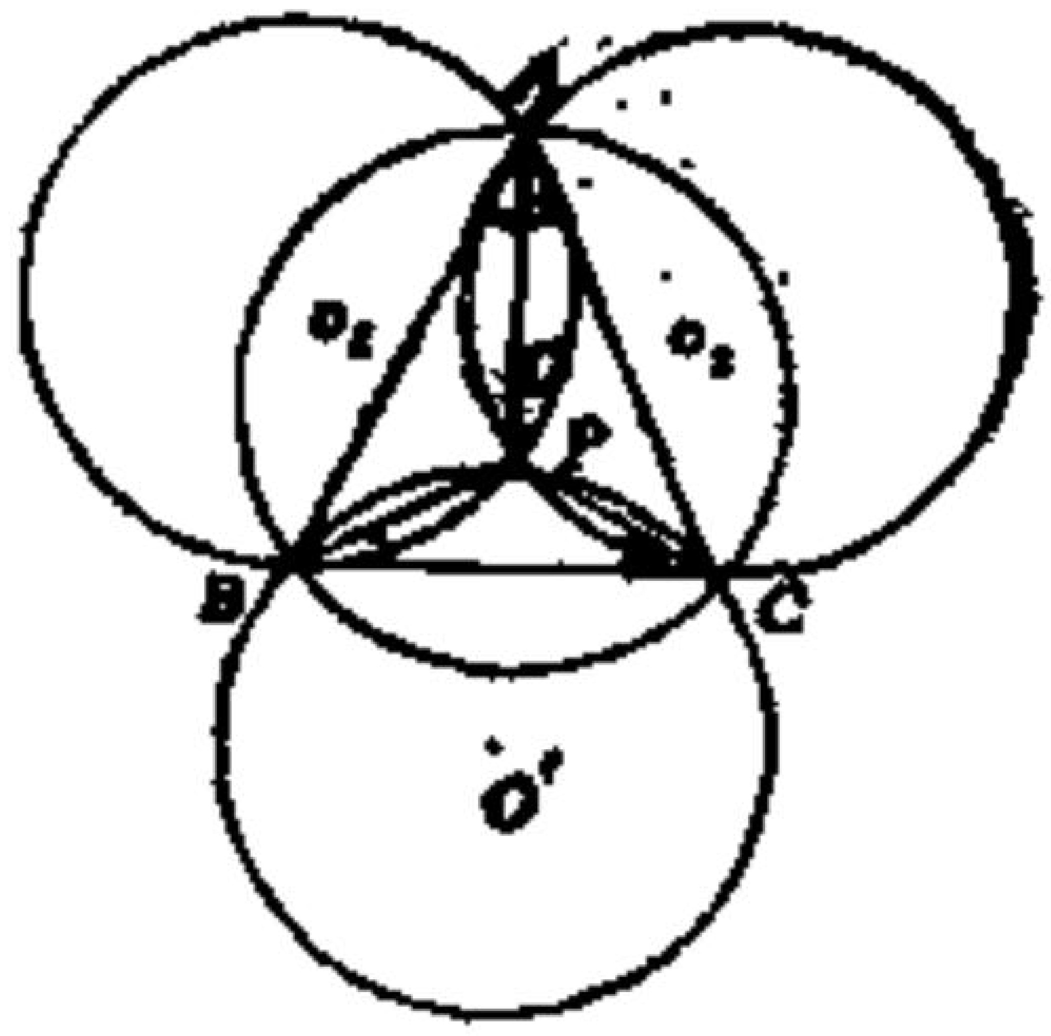


图20—18

提要：$\because$ $\angle BPC+\angle A=180°$，

$\therefore$ P点的轨迹为$\odot O'$且有$\odot O'=\odot O$.

19、一三角形内接于圆且有一边固定，求证：这三角形的垂心的轨迹是以定边为弦且等于原圆的一圆。

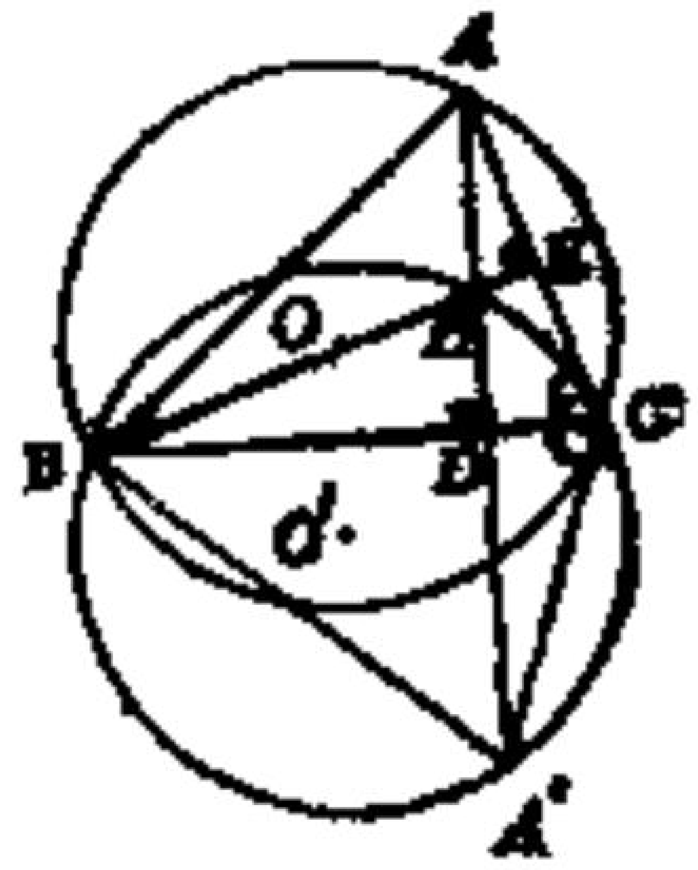


图20—19

提要：作A点关于BC的对称点A'，则$\odot ABC$等于$\odot A'BC$

$\because$ $\angle BHA'=\angle ECB=\angle BCA'$

$\therefore$ H在$\odot A'BC$上，H点的轨迹为$\odot O'$.

20. D是定线段 BC 上的点，在过D而垂直于 BC 的直线上取A点，假定$\overline{AD}^2=\overline{BD}\cdot\overline{DC}$，则$A$点的轨迹是以 BC 为直径的圆。

提要：由 $AD^2=BD\cdot DC$，与$\angle ADB$、$\angle ADC$ 为直角，

得$\triangle DAB\backsim\triangle DCA$，故$\angle BAC$ 为直角

$\therefore$ A点在以 BC 为直径的圆上.

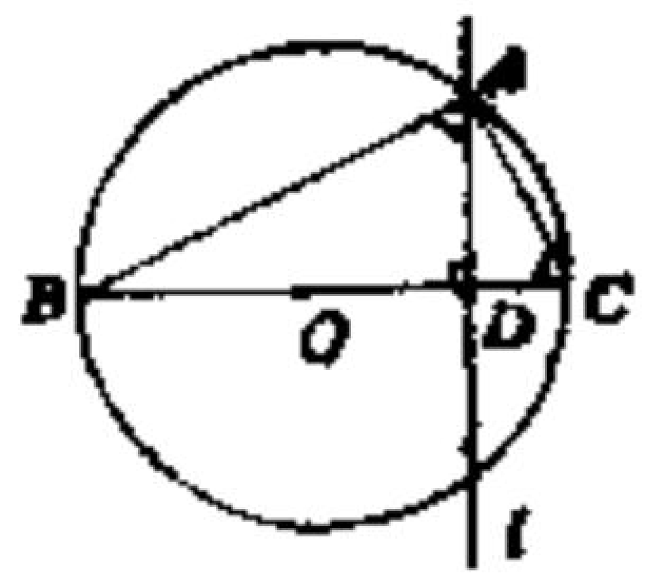


图20—20

21. 以定等腰三角形$\triangle ABC$的顶A为心作圆，自B、C向所作圆引切线，求证这些切线的交点的轨迹是$\triangle ABC$的外接圆和 BC 边的中垂线。

提要(1)：当P点在$\odot O$内部时，

有$\triangle ABE\cong\triangle ACF$，可得$\angle PBC=\angle PCB$

即P在 BC 边的中垂线 l 上。

(2)：当 P_1 在 l 的右侧时，

有$\triangle ABE\cong\triangle ACM$，

可得$\angle ABP_1=\angle ACP_1$，

$\therefore$ A、B、C、P_1四点共圆，P_1在$\odot O$上.

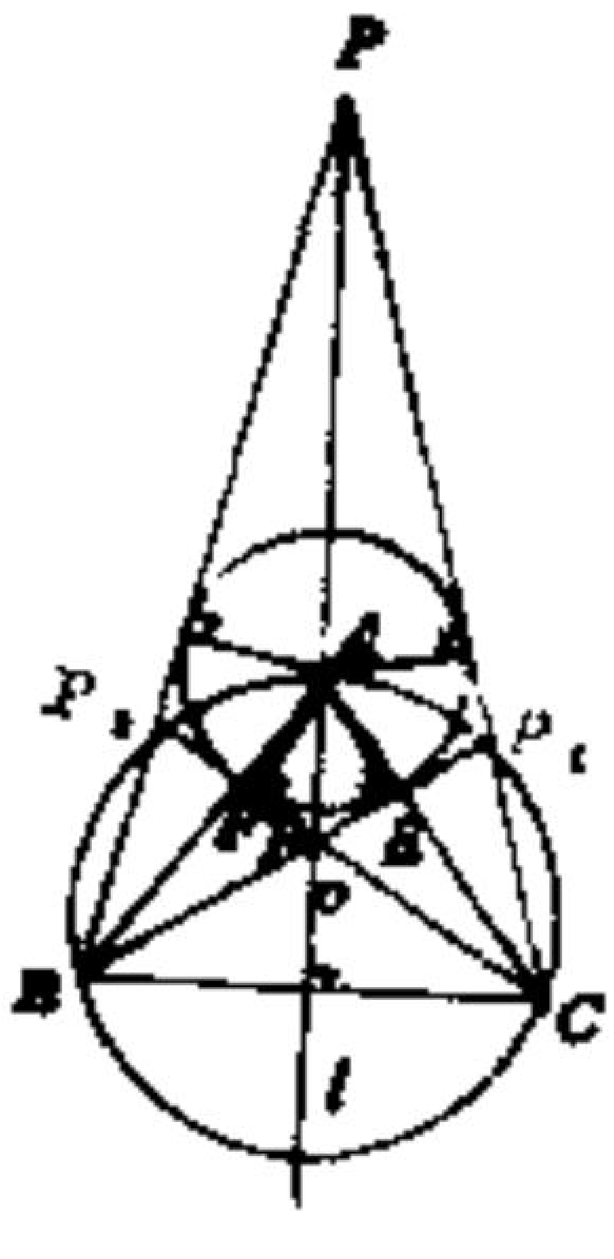


图20—21

习题二十一

1．定圆内等于定长的弦，其中点的轨迹是一同心圆。

探求：令弦的定长为$2a$，

则P点的轨迹为$\odot O(\sqrt{R^2-a^2})$．

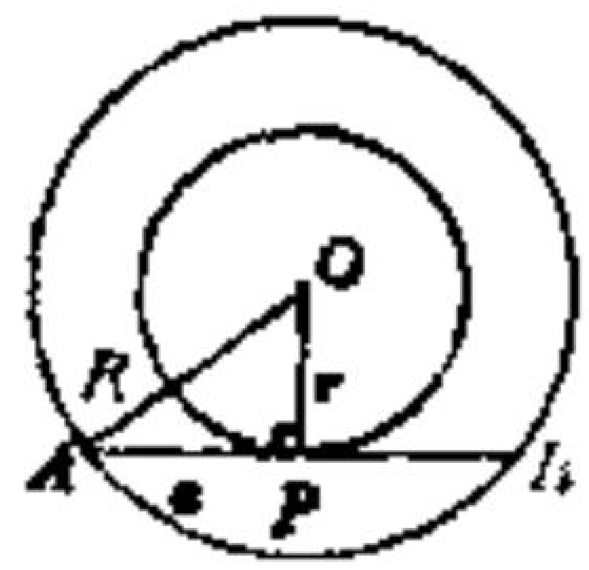


图21—1

2．定圆内有定向的弦，其中点的轨迹是一直径。

探求：令AB的方向为弦的定向，则其中点的轨迹为垂直于AB的直径CD，C、D为临界点。

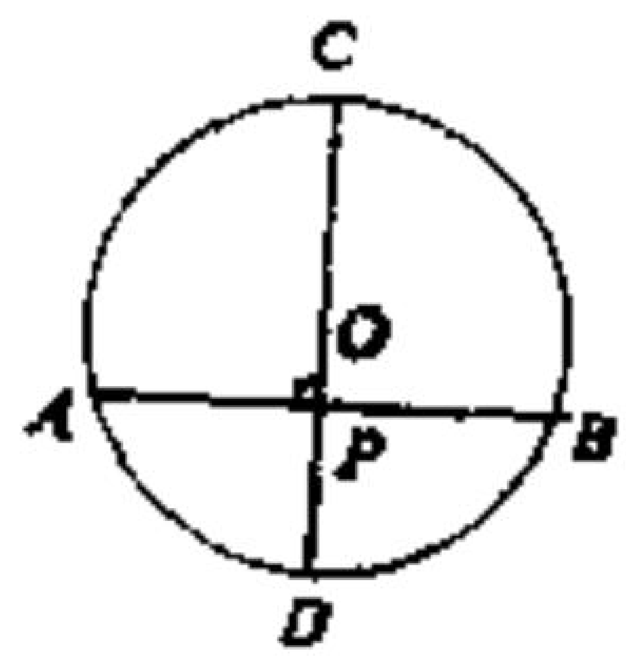


图21—2

3．通过定圆内一定点的弦，其中点的轨迹是一圆。

探求：过定点Q作$\odot O$的直径，则其中点O是轨迹上的点；过Q作垂直于MN的弦CD，则其中点Q是轨迹上的点，再过Q作任意弦AP，其中点P是轨迹上的点，可知所求轨迹为直径是QO的圆。

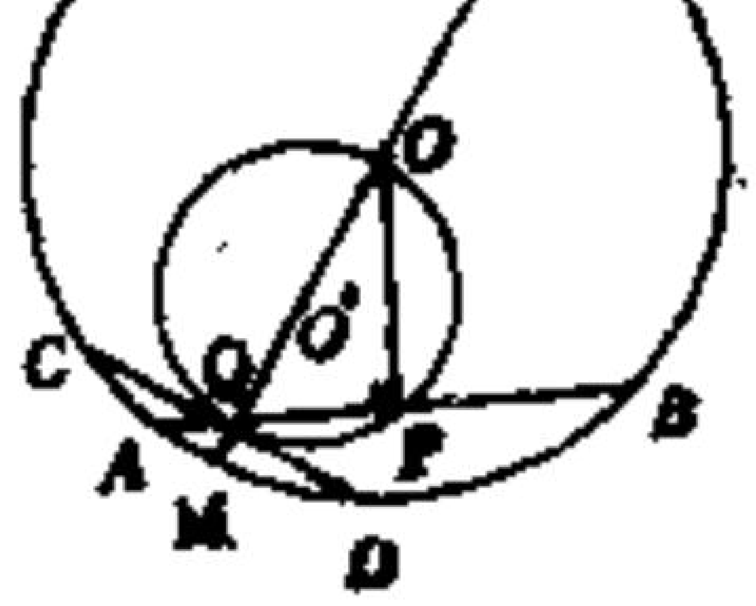


图21—3

4．以一定点与定多边形周界引线段，求证诸线段中点的轨迹是一个多边形。

证明：设 A_1'，A_2'，…A_n' 依次是 OA_1，OA_2，…OA_n 的中点，则 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 与 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 位似相似。取 A_1A_2 上任一点 B，由习题20节可知，OB 的中点 P 的轨迹为 $\triangle OA_1A_2$ 中，平行于 A_1A_2 的中位线 $A_1'A_2'$，可知 P 点的轨迹当为 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$。

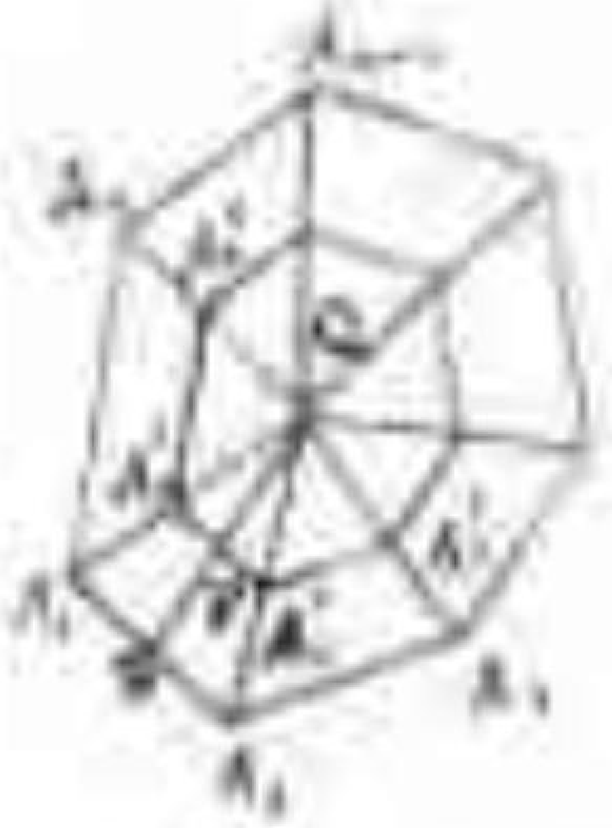


图21—4

5．在已知的凸多边形内，作定向的线段使其端点在周界上，求证诸线段的中点轨迹是一条折线。

提示：设 BC 为定向线段，过 A_2，A_3，…A_n 作平行于 BC 的线段 A_2A_2'，A_3A_3'，…，A_nA_n'，且其中点依次为 P_2，P_3，…P_n。所作平行线段将原凸多边形或者分成三角形，或者分成梯形，故其中点的轨迹为折线 $A_1PP_2P_3\cdots P_{n-1}A_n$。

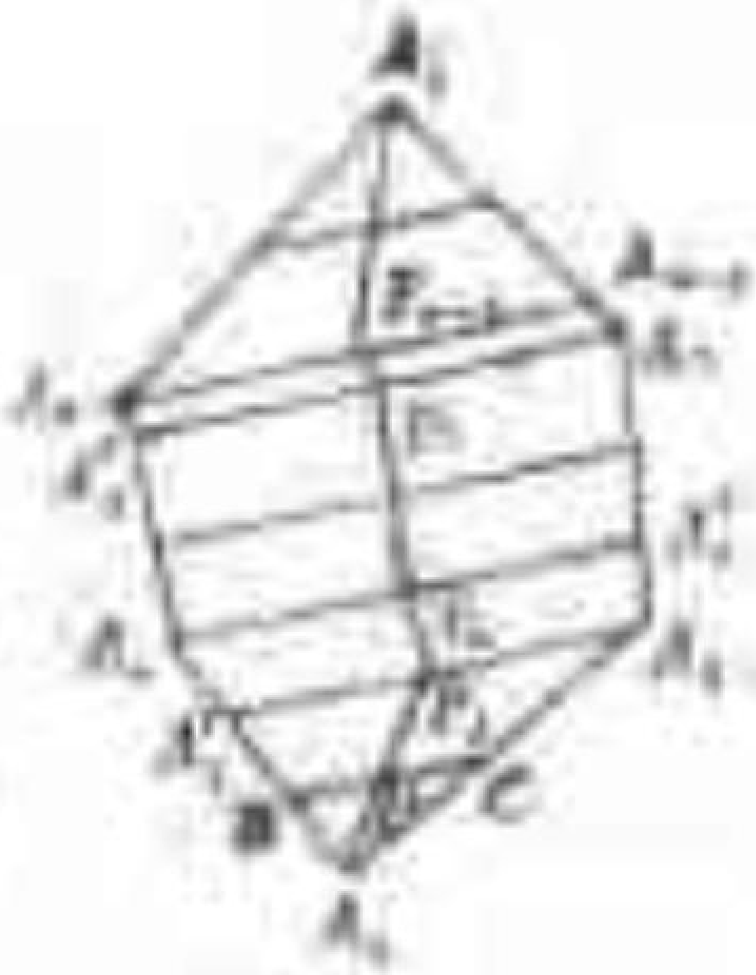


图21—5

6．共底定积的诸三角形，其顶角顶点的轨迹是两条直线。

探求：由于三角形的底与面积固定，故其高 h 为定值，其顶点 A 的轨迹为平行于 BC 的两条直线 l、l'，与 BC 的距离皆为定值 h．

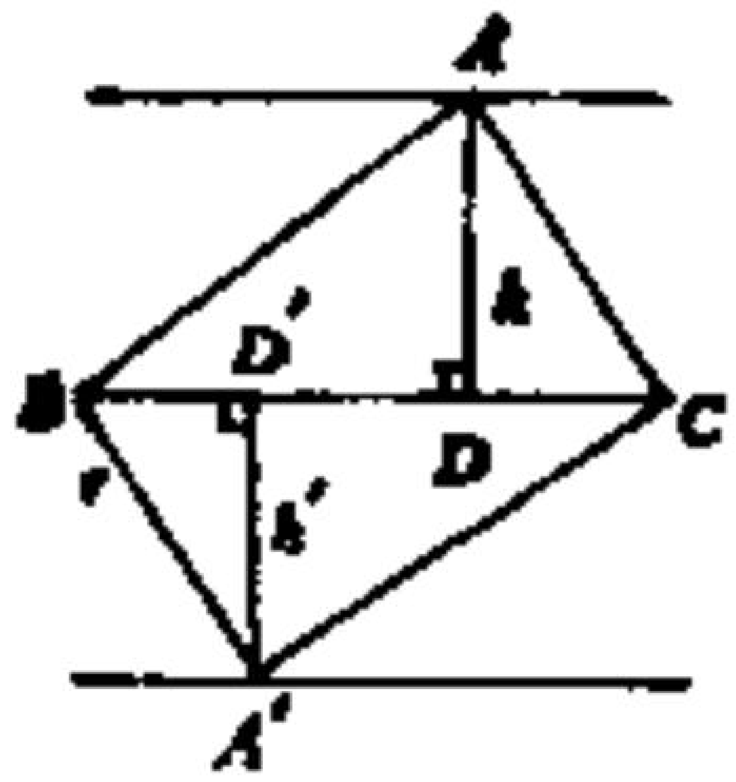


图 21—6

7．设一点至相交两条直线的距离之比为常数，则该点的轨迹是两条直线。

探求：设 P 点至相交于 O 点的两直线 a、b 之比为常数 k，则 P 点关于 O 点的对称点 P' 也是轨迹上的点，即该轨迹过 O 点，为了确定轨迹 l 的位置，只要再确定轨迹上的另一点即可。

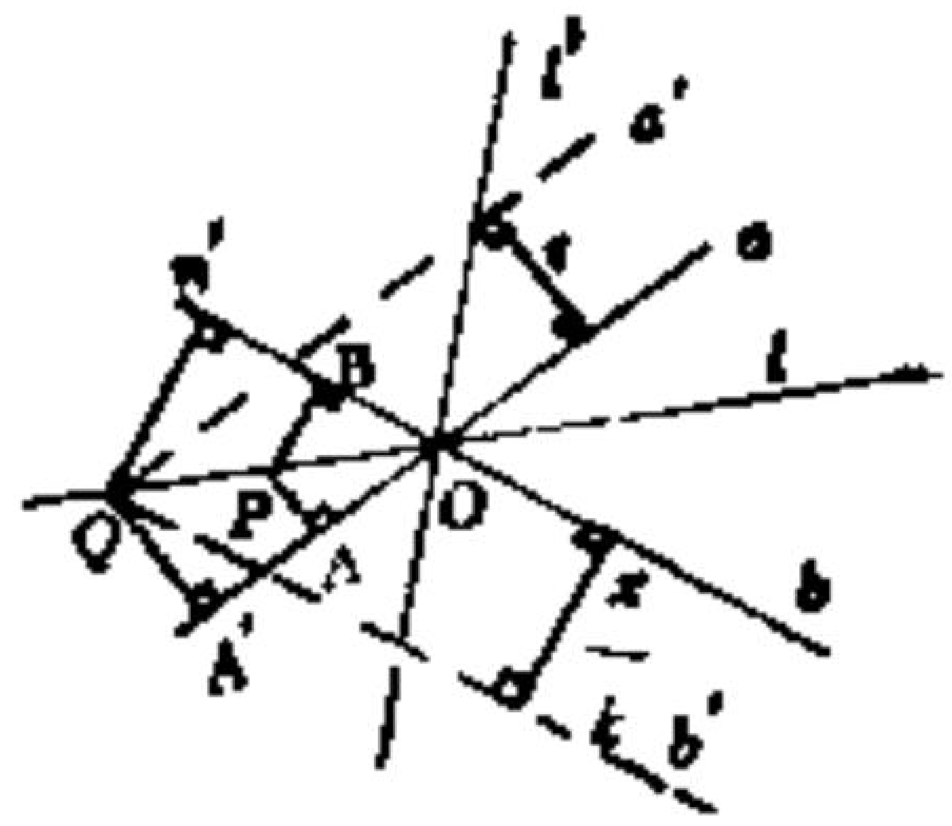


图 21—7

取适当的 x，使 x 与 x/k 在作图时都比较方便为宜，作直线 a'、b'，使与 a、b 的距离为 x、x/k，则 a' 与 b' 的交点 Q 满足条件 $QA:QB=k$，故 l 的位置由 Q、O 确定；类似地可确定 l' 的位置，使 l、l' 为所求轨迹。

证明：完备性，设 P、Q 为合乎条件的点，且 QP 交直

线 a、b 于 O_1、O_2，

∵ $PA\parallel QA'$，$PB\parallel QB'$

∴ $O_1P:O_1Q=PA:QA'$，$O_2P:O_2Q=PB:QB'$

于是 $O_1P:O_1Q=O_2P:O_2Q$，由分比可得

$O_1P:QP=O_2P:QP$，故 O_1、O_2 重合于 O 点，

∴ P 点在直线 l 或 l' 上。

纯粹性略。

8. 设一点至相交两定直线的距离有一定的和，则该点的轨迹是一个矩形。

探求：若 P 点满足条件，则它关于 O 点的对称点 P' 也满足条件，故 O 点为矩形的中心。

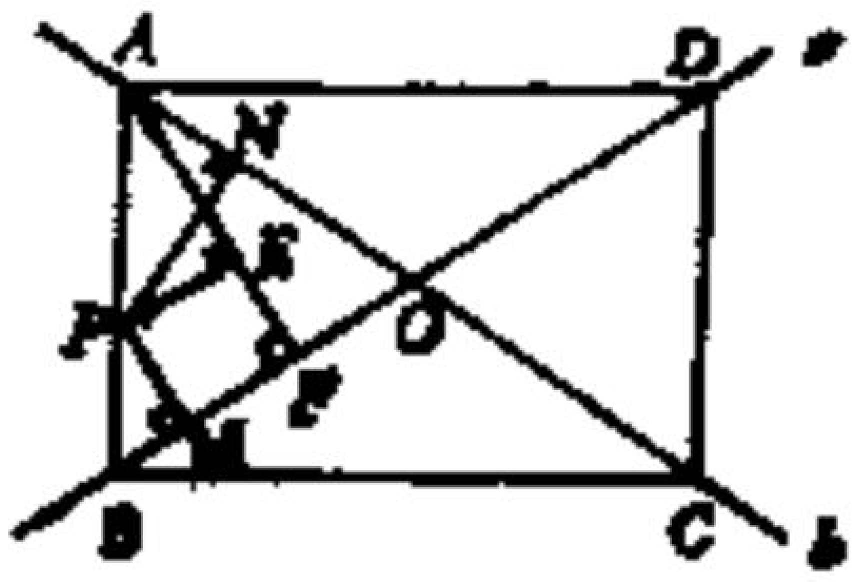


图21—8

设 P 点至相交两定直线 a、b 的距离的定和为 k，当 P 点在 b 上时，其与 a 的距离为 k，故作 a 的两平行线，使与 a 的距离为 k，其与 b 的交点即为 A、C；同理可得 a 上的 B、D 两点，故矩形位置可定。

当 P 点合乎条件时，可得 $\triangle PAN\cong\triangle APE$，

有 $\angle APE=\angle PAN=\angle PBD$，得 P 点在 AB 上。

证明略。

9．设定圆中互相垂直的两弦的平方和为常数，则两弦所在直线的交点的轨迹是一圆。

探求：若点P符合条件，则其关于O点的对称点P'也符合条件，故所求圆的圆心为O，为确定半径的长，考虑当两弦之一为直径，例如$A'B'$时，设$\odot O$的半径为γ，则$A'B'^2=4r^2$，

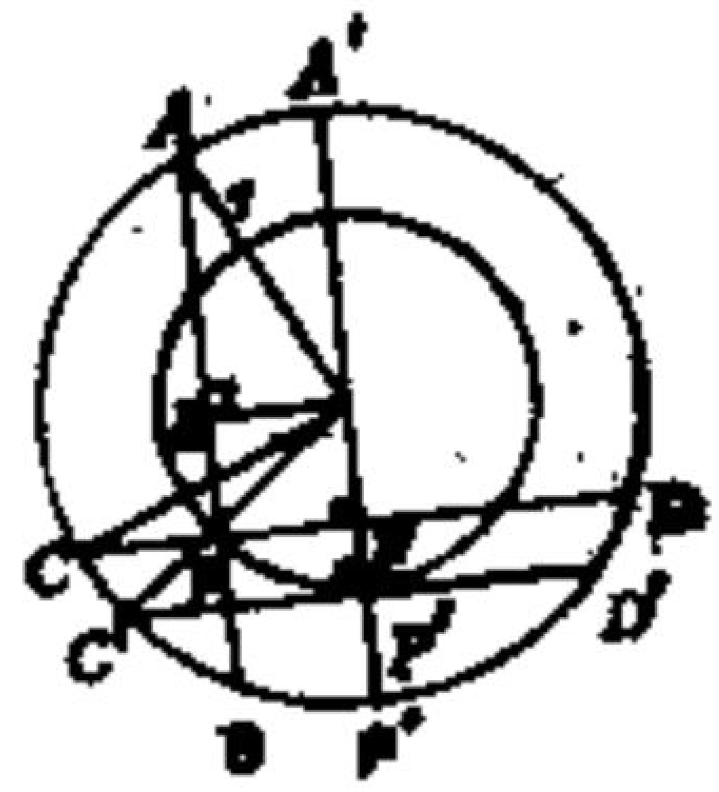


图21—9

且$C'D'^2=4C'P'^2$，若两弦的平方和为常数k，

则$A'B'^2+C'D'^2=4r^2+4P'C'^2=k$，

$$\therefore \quad P'C'^2=\frac{k}{4}-r^2$$

于是$OP'^2=r^2-C'P'^2=r^2-\frac{k}{4}+r^2=2r^2-\frac{k}{4}$

即　$OP'=\frac{1}{2}\sqrt{8r^2-k}$为定值。

证明：完备性，设P是互相垂直的两弦AB、CD的交点且合乎条件。

$$\because \quad AB^2+CD^2=4(AE^2+CF^2)=k$$

有　$4[(r^2-OE^2)+(r^2-OF^2)]=k$，即　$8r^2-4\cdot OP^2=k$，

$\therefore \quad OP=\frac{1}{2}\sqrt{8r^2-k}$，故$P$点在$\odot O\left(\frac{1}{2}\sqrt{8r^2-k}\right)$上。

纯粹性略。

10．已知两同心圆，自外圆上任一点向内圆作切线，求证所作切线（线段）的中点的轨迹是一圆。

探求：延长 AB 交$\odot O(r_1)$于 A'，有 $AB=A'B$，设 P' 为 $A'B$ 的中点，则 $PB=P'B$，可得 O 为 P 点所在圆的圆心，设其半径为 r'，

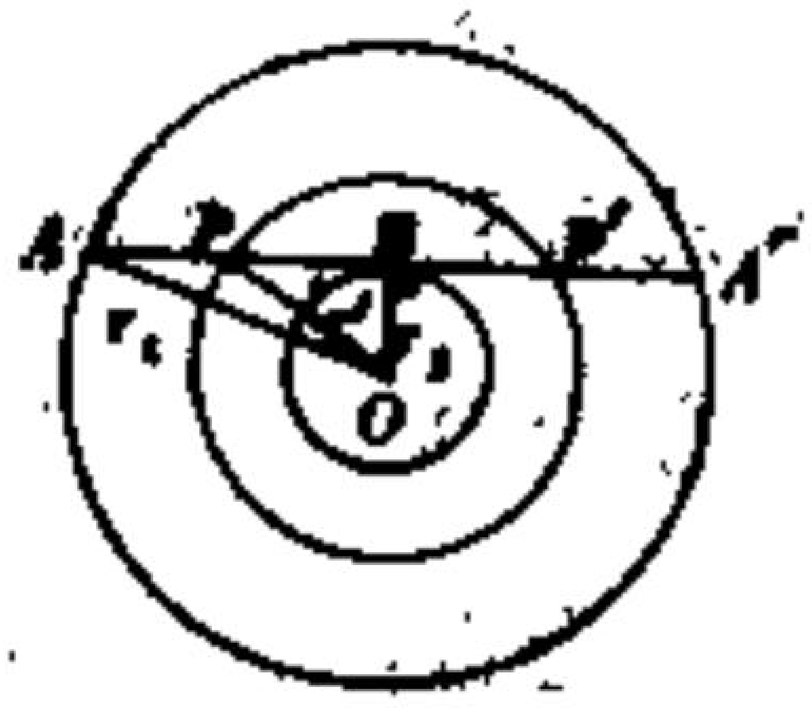


图21—10

则$r'=\sqrt{r_2^2+PB^2}=\sqrt{r_2^2+(\frac{1}{2}AB)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2+3r_2^2}$

证明略

11．与一定圆正交且通过一定点的圆，其圆心的轨迹是一条直线。

探求：由定点 P 向定圆$\odot O$作两切线 PA、PB，O_1、O_2为 PA、PB 的中点，则 O_1、O_2是符合条件的点，故所求直线由 O_1、O_2可定。

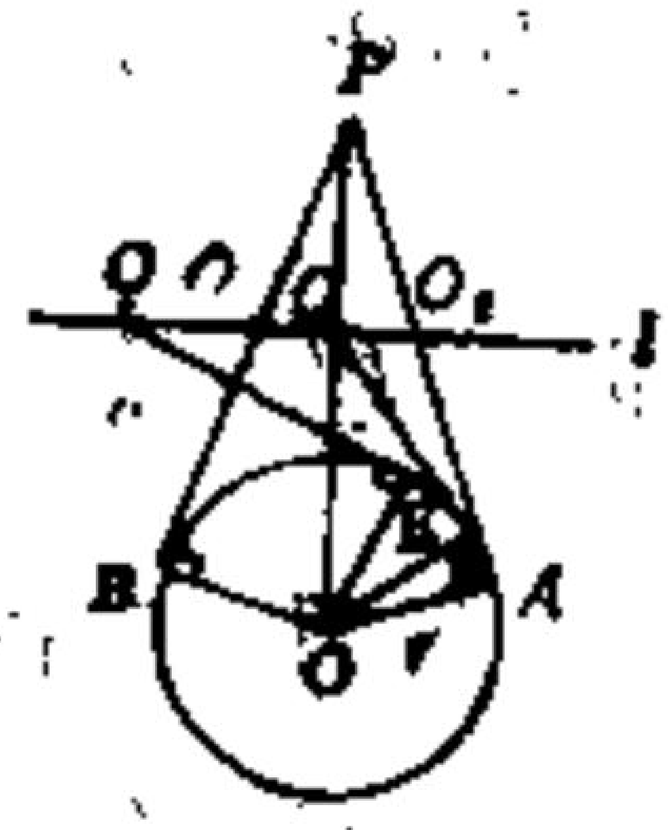


图21—11

证明：完备性。

设 Q 是 OP 上且合条件的点，有 $QO^2-QP^2=r^2$，故 Q 点唯一确定。

设 O' 是合条件而不在 OP 上的点，因$\odot O'$与$\odot O$ 正交，有 $O'P^2=O'E^2=O'O^2-r^2$，

$\therefore\ O'O^2-O'P^2=r^2=QO^2-QP^2$，由复习题二第12题

知，$O'Q \perp PO$，即 O' 在垂直 OP 于 Q 点的直线 l 上。

纯粹性略。

12．设一圆同时径割不同心的两定圆，则该圆的中心的轨迹是一条直线。

若甲圆通过乙圆某直径的两端，便说甲圆径割乙圆。

探求：∵ $OO_1 \perp AB$，

$OO_2 \perp CD$，

∴ $OA^2 = OO_1^2 + AO_1^2$，

$OC^2 = OO_2^2 + CO_2^2$，

可得 $OO_1^2 - OO_2^2 = CO_2^2 - AO_1^2$

$= r_2^2 - r_1^2 = k$，

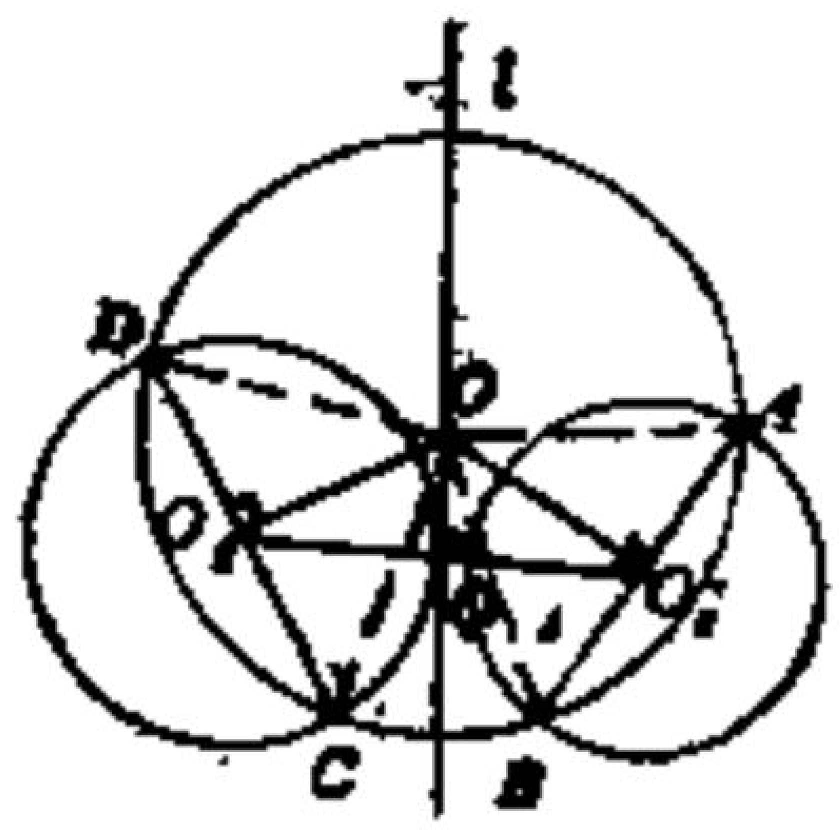


图21—12

由例题65知，O 点是轨迹是垂直于 O_1O_2 的一条直线。

证明略

13．设一点对于不同心的两定圆的幂之差（绝对值）为常数，则该点的轨迹是两条直线。

探求：设 l 为$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的等幂轴，$PA \perp l$ 于 A，由 P248 定理153 知，

$|p_1 - p_2| = 2 \cdot \overline{O_1O_2} \cdot \overline{AP} = k$.

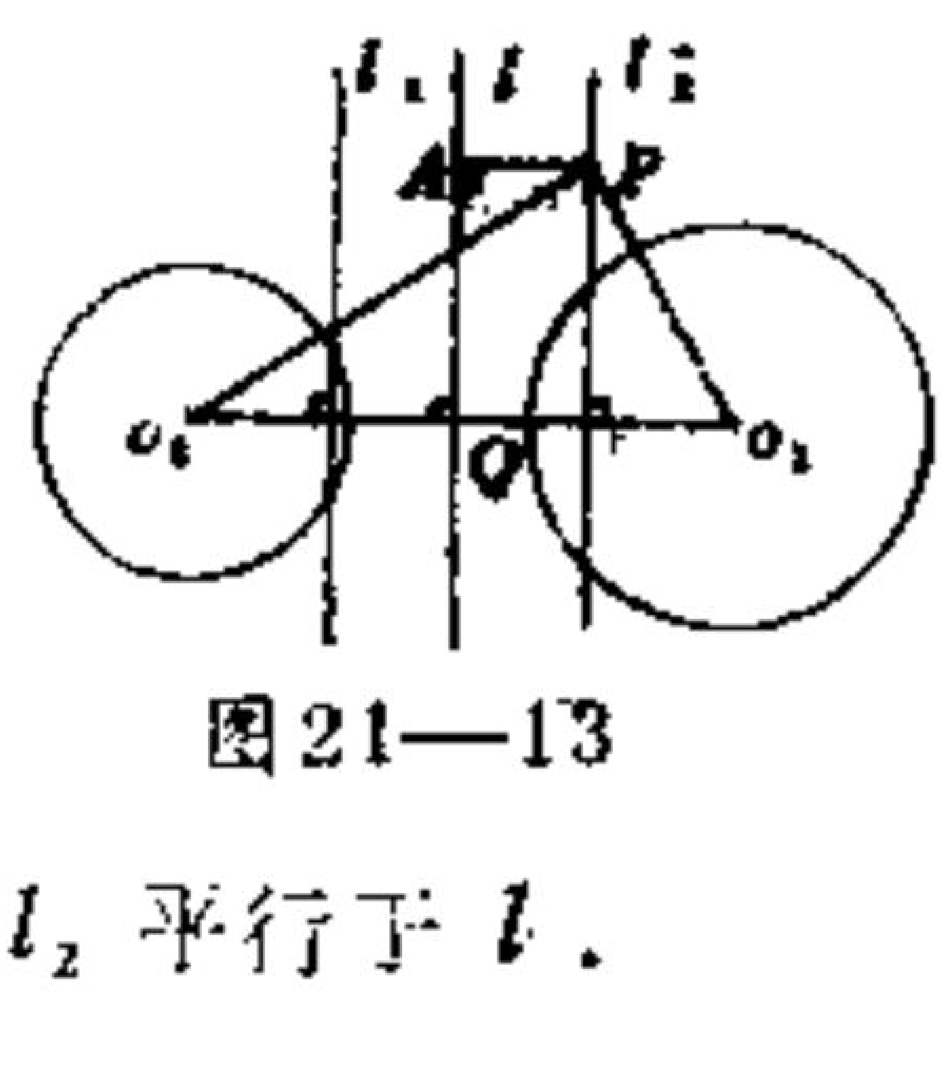


图21—13

故 $\overline{AP} = \dfrac{k}{2|\overline{O_1O_2}|}$，知两直线 l_1、l_2 平行于 l.

证明略。

14．设一点对于同心的两定圆的幂之比为不等于1的常数，则该点的轨迹是与两定圆同心的一圆。

探求：设 PA、PC 分别切$\odot O_1(r_1)$、$\odot O_2(r_2)$于 A、C，

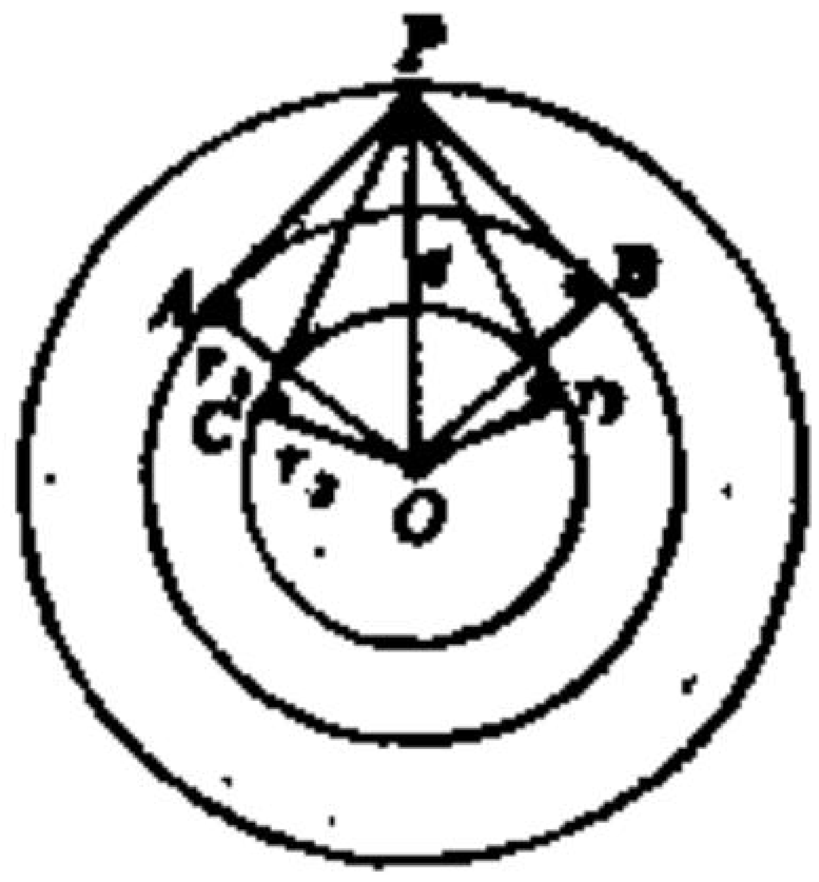


图21—14

则 $p_1=PO^2-r_1^2$，$p_2=PO^2-r_2^2$

$$\therefore \quad \frac{p_1}{p_2}=\frac{PO^2-r_1^2}{PO^2-r_2^2}=k,$$

故有 $PO^2=\dfrac{r_1^2-kr_2^2}{1-k}$．

由于 $k\neq 1$，故 OP 的长唯一确定，其半径可定。

证明略。

15．设一点至不同心两定圆的中心的距离之比等于两圆半径之比，则该点的轨迹是与两定圆共轴的一圆。

所得轨迹（圆）叫做两定圆的相似圆。

探求：由共轴圆性质知，所求轨迹的圆心 O 应在 O_1O_2 上，作 $PA\perp l$ 于 A，由定理153得

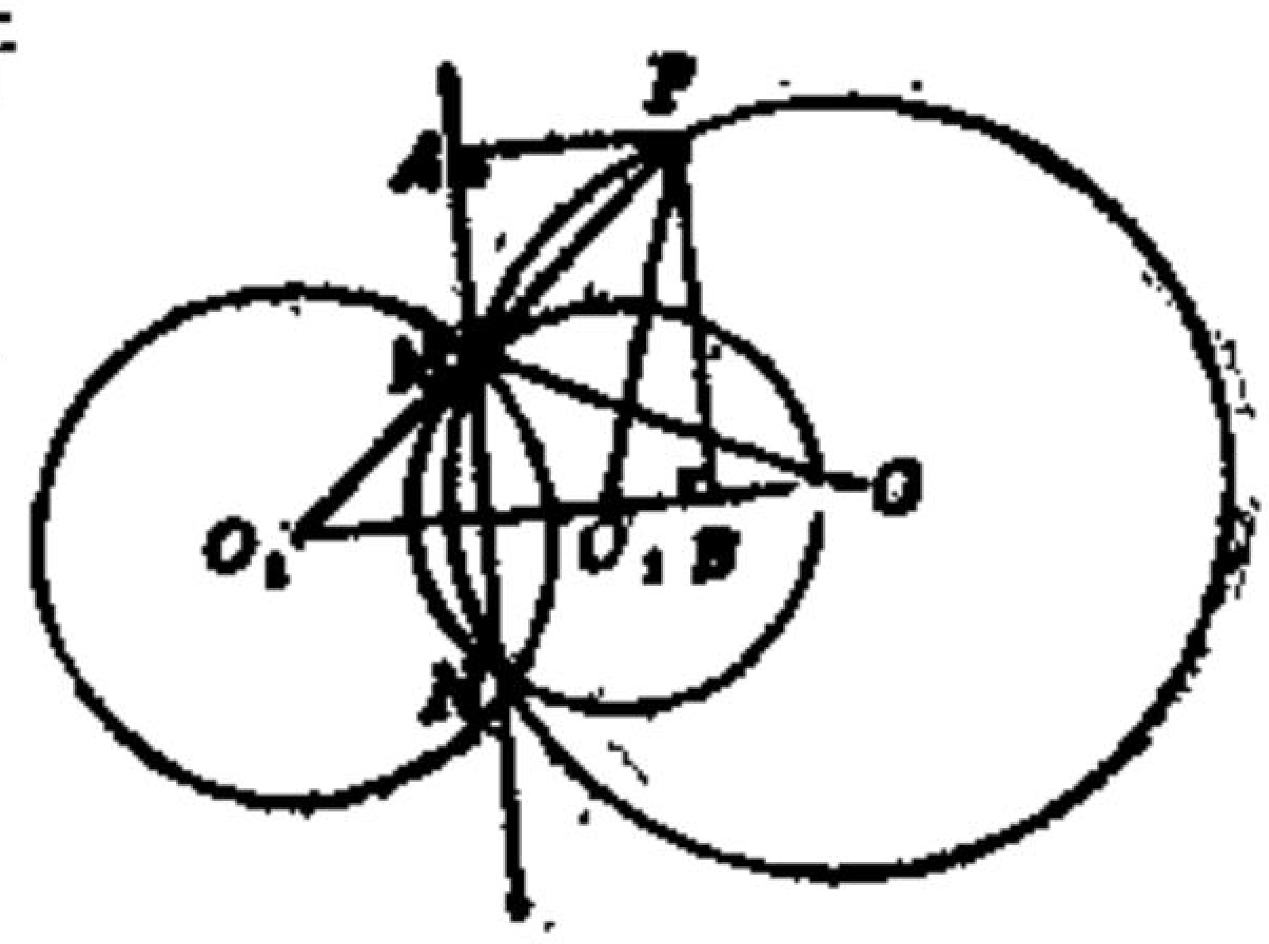


图21—15

$p_1=2\cdot\overline{PA}\cdot\overline{OO_1}$，

$p_2=2\cdot\overline{PA}\cdot\overline{OO_2}$．

$\therefore\quad \dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}}$，又由题设$\dfrac{PO_1}{PO_2}=\dfrac{r_1}{r_2}=k$.

有 $\dfrac{PO_1^2}{r_1^2}=\dfrac{PO_2^2}{r_2^2}$，可得$\dfrac{PO_1^2-r_1^2}{r_1^2}=\dfrac{PO_2^2-r_2^2}{r_2^2}$，

$\therefore\quad \dfrac{p_1}{p_2}=\dfrac{r_1^2}{r_2^2}=k^2$，故$\dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}}=k^2$，$O$点位置可唯一确定。

证明：完备性。

设O是两定圆连心线上合于$\dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}}=k^2$的点，以$O$为圆心，作$\odot O$使与$\odot O_1$、$\odot O_2$共轴。

设P是符合条件的点，作$PA\perp l$于A，则有

$p-p_1=2\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OO_1}$，$p-p_2=2\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OO_2}$这里$p$是$P$点对于$\odot O$的幂。

$\therefore\quad \dfrac{p-p_1}{p-p_2}=\dfrac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}}=k^2$，故有$p-p_1=k^2(p-p_2)$，

$\because\quad p_1/p_2=k^2$，将$p_1=p_2k^2$代入上式得

$p(1-k^2)=0$，当$k^2\neq1$时，$p=0$，即合乎条件的点在$\odot O$上。

纯粹性略。

讨论：1°当$k=\dfrac{r_1}{r_2}\neq1$时，其轨迹为$\odot O$；

2°当$k=\dfrac{r_1}{r_2}=1$时，则P点的轨迹就是等幂轴l。

可以看成圆心在无穷远点的圆。

16．设一点对外离的两定圆有相等的视角，则该点的轨迹是一圆。

探求：两定圆的内、外公切线的交点M、N是符合条件的点；又若P点符合条件，则P点关于MN的对称点P'也符合条件，故该轨迹圆应以MN为直径，令其中点为O．

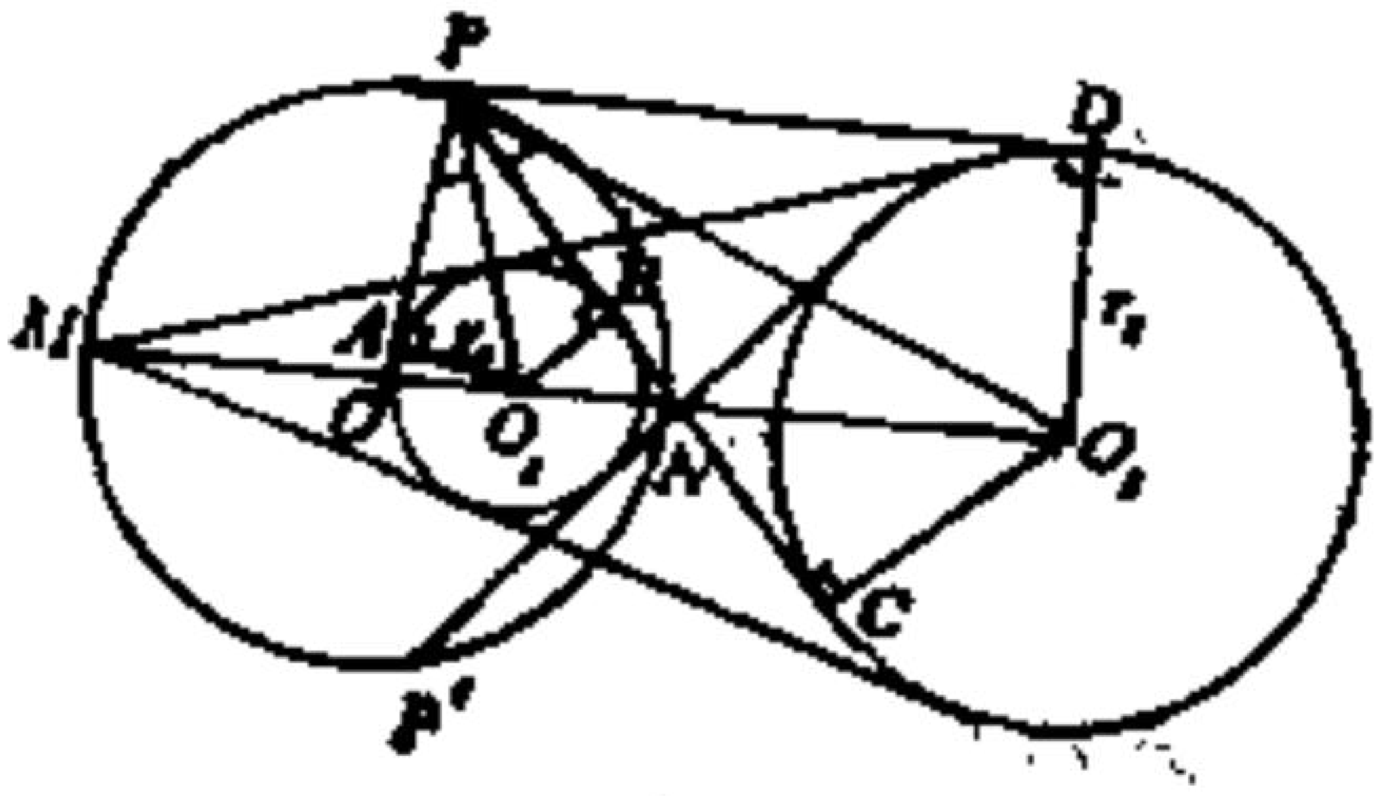


图21—16

证明：完备性。

设P是MN外符条合件的点，则有

$\triangle APO_1 \backsim \triangle CPO_2$，∴　$PO_1 : PO_2 = r_1 : r_2$

这正好是上题中关于两圆外离的情形，故P点在$\odot O$上。

纯粹性略。

17．过相交两定圆的一交点P任作直线交两圆于A、B，求证AB的中点的轨迹是一圆。

探求：设O_1O_2的中点为O，由习题十第9题知$QP = QM$，故此圆应以Q为圆心，QP之长为半径。

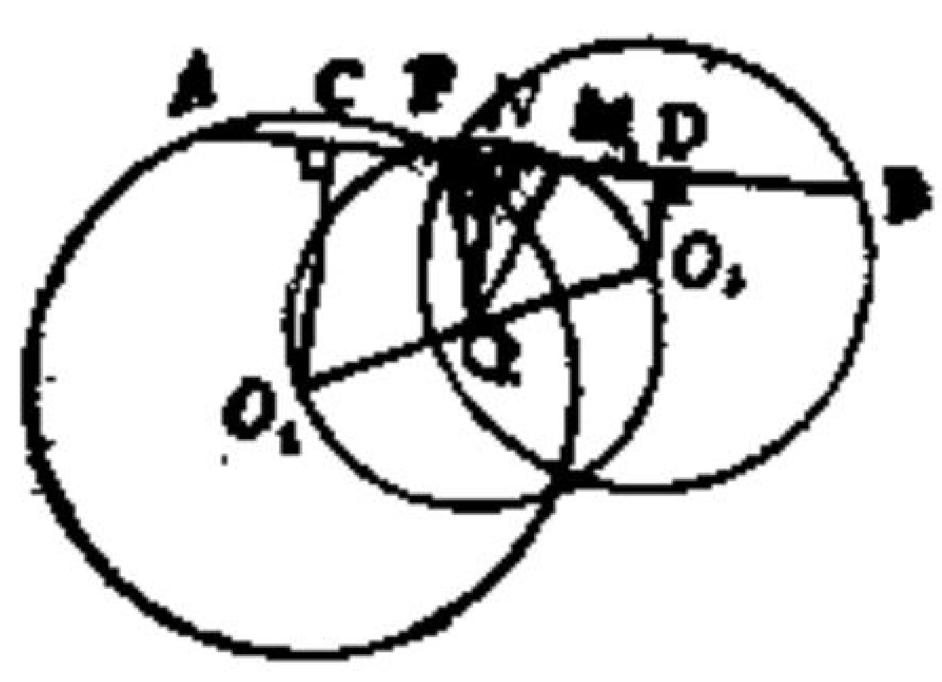


图21—17

证明：完备性。

设M是AB的中点，有N为CD的中点，

$\therefore \quad CD=\frac{1}{2}AB$.

$\because \quad MD=MB-DB=\frac{1}{2}AB-PD=CD-PD=CP$.

$\therefore \quad NP=NM$，故$QP=QM$，M在$\odot Q(QP)$上。

纯粹性略。

18．设以一固定线段为一腰作等腰三角形，求证这些三角形的重心的的轨迹是两个圆。

探求：以A、B为圆心，AB之长a为半径分别作两圆$\odot A$、$\odot B$，则该两圆上任一点C（A、B及AB与两圆的交点除外）与A、B两点连线所构成的$\triangle ABC$均为等腰三角形，且有$AC=AB$，由于对称关系，这些三角线的重心G所在圆的圆心应在AB上，设为O点。

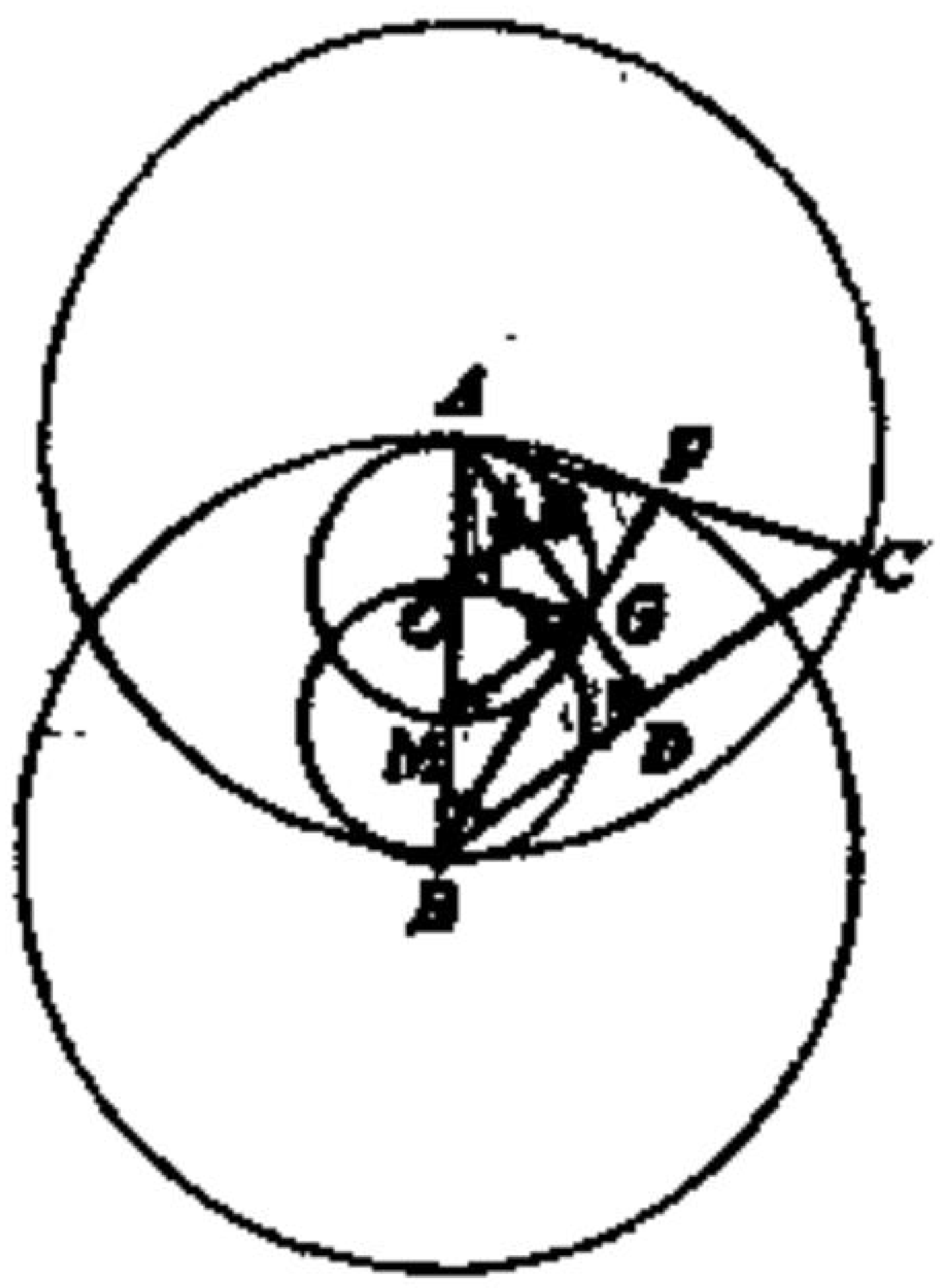


图21—18

自O点作$OE\perp AD$于E，有$OE\parallel BD\parallel MG$.

可得$OA=OG=OM$，故O点在AB的三分之一处，半径为$a/3$.

当C点取$\odot B$上任一点时，其圆心为M，M在BA的

1/3处，半径亦为$a/3$.

∴ G点的轨迹是⊙O、⊙M. A、B、O、M为极限点。

证明略。

19. 设菱形$ABCD$的AB边固定，O是AB的中点，P是CO与BD的交点，求证P点的轨迹是一圆。

探求：由于P点关于AB的对称点也符合条件，故圆心O'应在AB上。

∵ $\triangle ABC$为等腰三角形且一腰AB固定，又CO为AB边的中线，BM为AC边的中线，故P点为$\triangle ABC$的重心，由上题知P点的轨迹为一圆且圆心O'在AB的1/3处，半径为$AB/3$. B、E为极限点。

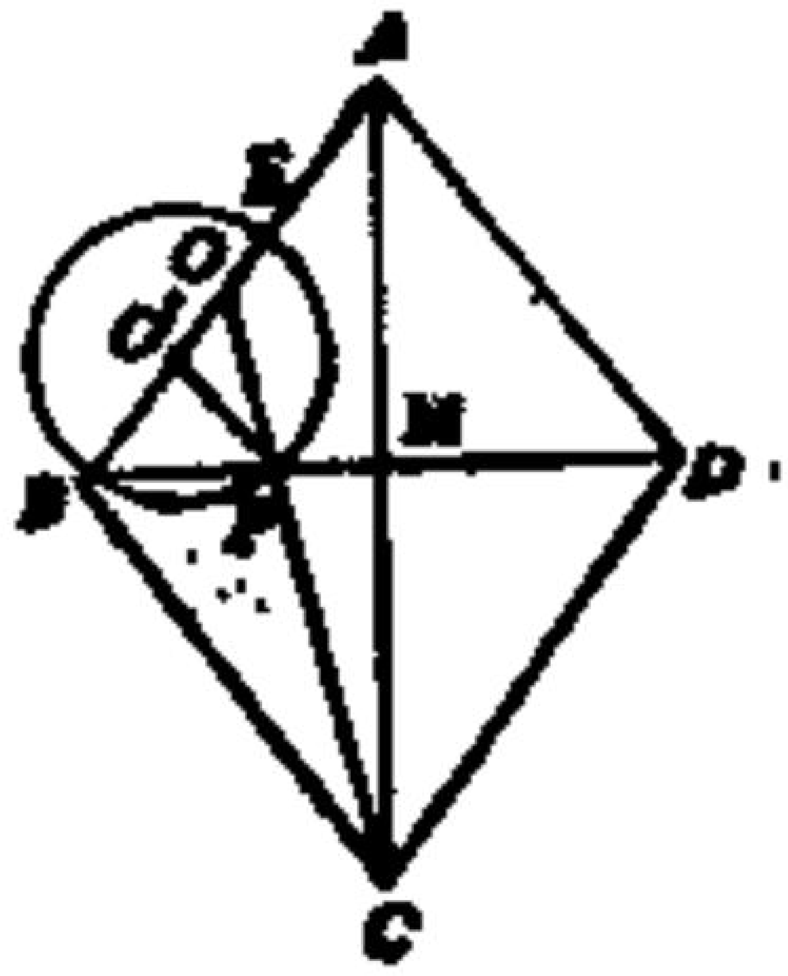


图21—19

证明略。

20. 设AB是定圆的定弦，AD是动弦，作▱$ABCD$，求证：C点的轨迹是一圆.

探求：在⊙O中，M是BD弦的中点，有$\angle OMB=90$，由第3题知，M点的轨迹为以BO为直径的圆. 由于M是AC的中点，故C点的轨迹亦为一圆.

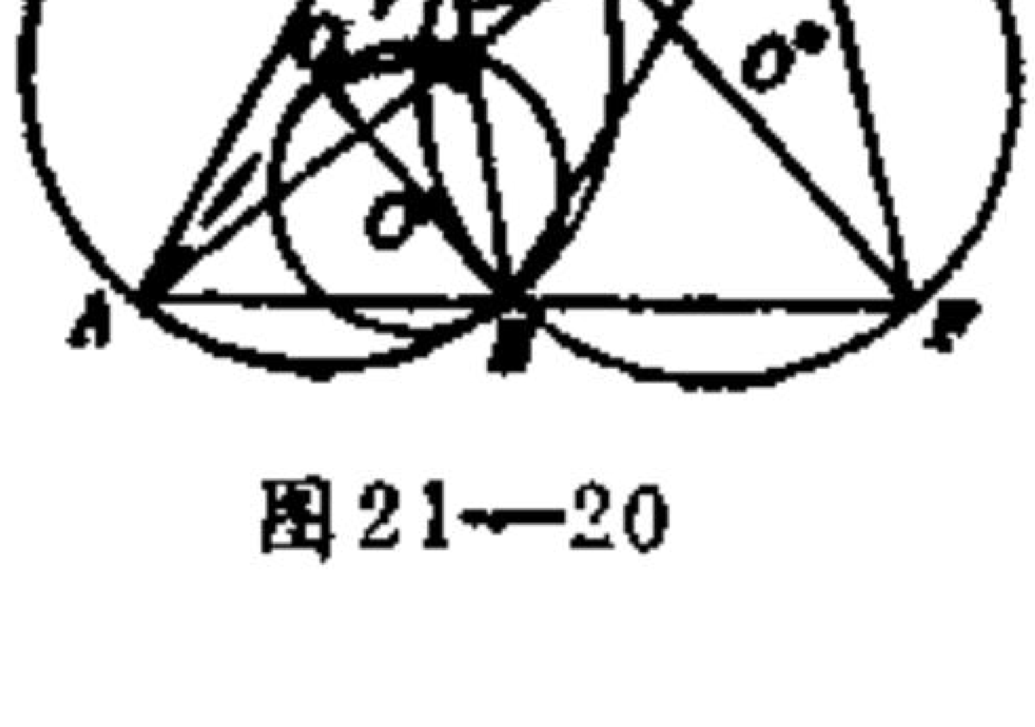


图21—20

过 AO 作直径 AE，连 CE 并作 $CF /\!/ DB$ 交 AB 的延长线于 F.

$\because$ $AO:OE=AM:MC$，$OM /\!/ EC$.

$\therefore$ $\angle ECF=\angle OMB=90^\circ$，又 $AB=DC=BF$.
故 C 点所在圆是以 EF 为直径的圆、令其中点为 O'，则 $\odot O'$ 与 $\odot O$ 有相等半径.

证明略.

21.设梯形 $ABCD$ 的底边 AB 固定，而 BC 与 CD 各有定长，求证 D 点的轨迹是一圆.

探求：自 D 作 $DO /\!/ CB$ 交 AB 于 O，则 $DOBC$ 为平行四边形且 $DO=a$，$OB=b$，故 D 在以 O 为圆心 a 为半径的圆上，E、F 为极限点（证明略）.

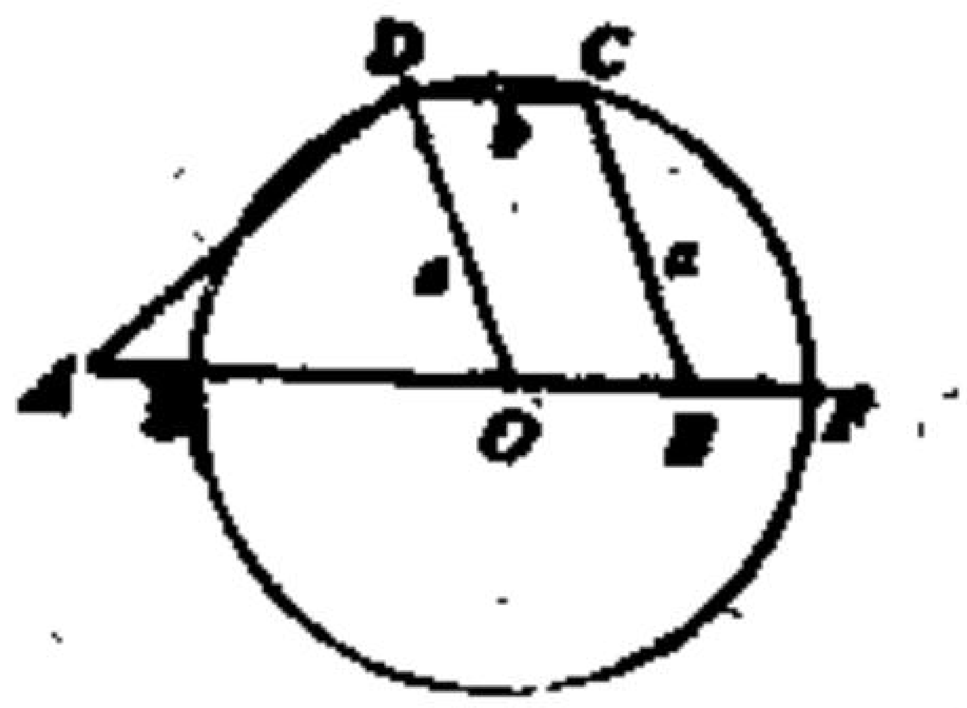


图21—21

22.C 是定线段 AB 上的任意点，今以 AC、BC 为直径各作圆，设这两圆的外公切线切两圆于 E、F，求证 AE 与 BF 交点 P 的轨迹是一圆.

探求：因 $\odot O_1$、$\odot O_2$ 外切于 C，有 $\angle AEC=\angle BFC=90^\circ$，故 P、E、C、F 四点共圆.

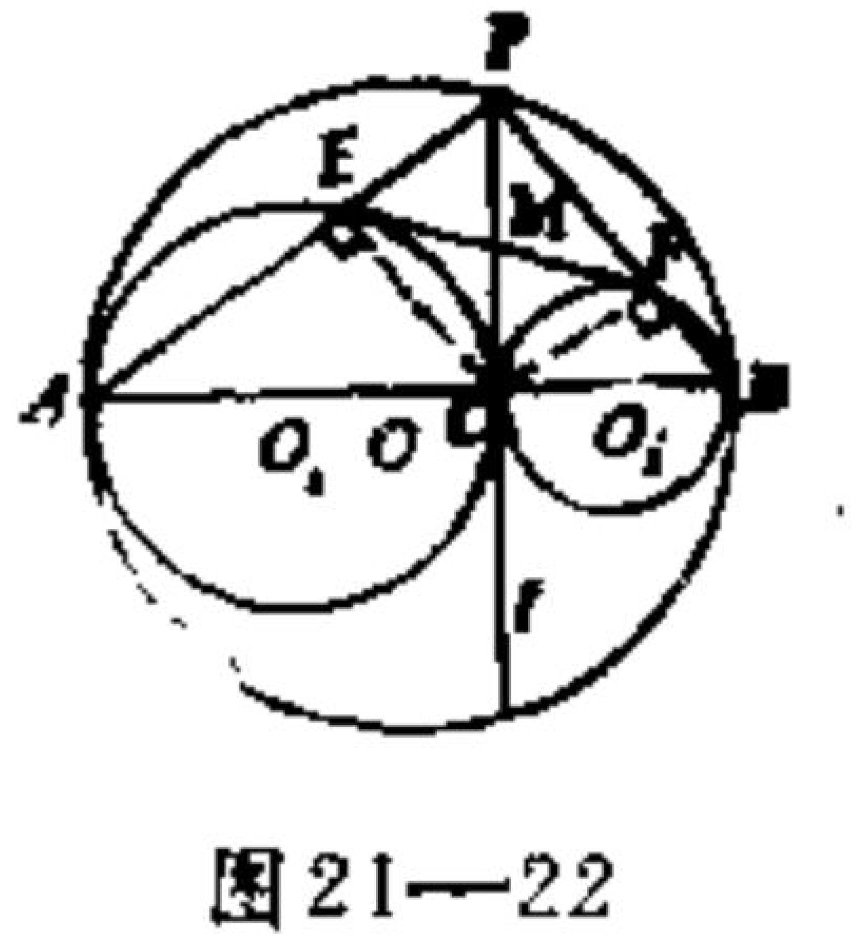


图21—22

由 $\angle ECF=90^\circ$，知 $\angle APB=90^\circ$，

故此圆在以 AB 为直径的 $\odot O$ 上．A、B 为极限点.

23.设 P 是定直角三角形的弦上任意点，自 P 引线垂直于此弦而交勾股所在直线于 Q、R，在这垂线上取 S 点，使合于 $\overline{PS}^2=\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$，求证 S 点的轨迹是一圆.

探求：由对称性知，此圆的圆心在 BC 上.

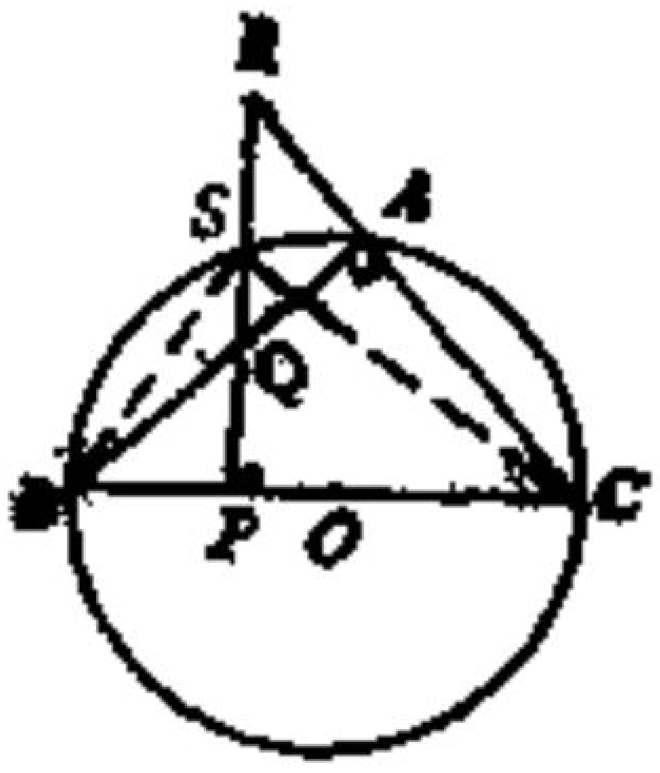


图21—23

当垂线过 A 点时，Q、R 均合于 A 点，此时 S 点也与 A 点重合，显然有 $\overline{PS}^2=\overline{PQ}\cdot\overline{PR}$.

连 SB、SC，∵P、A、R、B 四点共圆.

∴$\angle PBQ=\angle PRC$.

有 $\triangle PBQ\backsim\triangle PRC$，∴$PB:PQ=PR:PC$，于是 $PB\cdot PC=PQ\cdot PR=PS^2$，故 $\angle BSC=90°$，知此圆以 BC 为直径．B、C 为极限点.

证明略.

24. AB 是定圆 $\odot O$ 的直径，t 是切 $\odot O$ 于 B 的直线，今有一圆同切于 $\odot O$ 及直线 t 但不通过 B 点，求证：自 A 向此圆所引切线的切点的轨迹是一圆.

探求：∵ $\odot O_1$、$\odot O$ 同切于 t 且 $\odot O_1$ 与 $\odot O$ 外切，可得 $\angle FEB$ 及 $\angle AEB$ 均为直角，故 A、E、F 三点共线，于是 $AP^2=AE\cdot AF$. 又在 Rt△ABF 中，有 $AB^2=AE\cdot AF$,

∴ $AP=AB$，故 P 点所在圆应以 A 为圆心，以 AB 为半径，B 是极限点.

证明略.

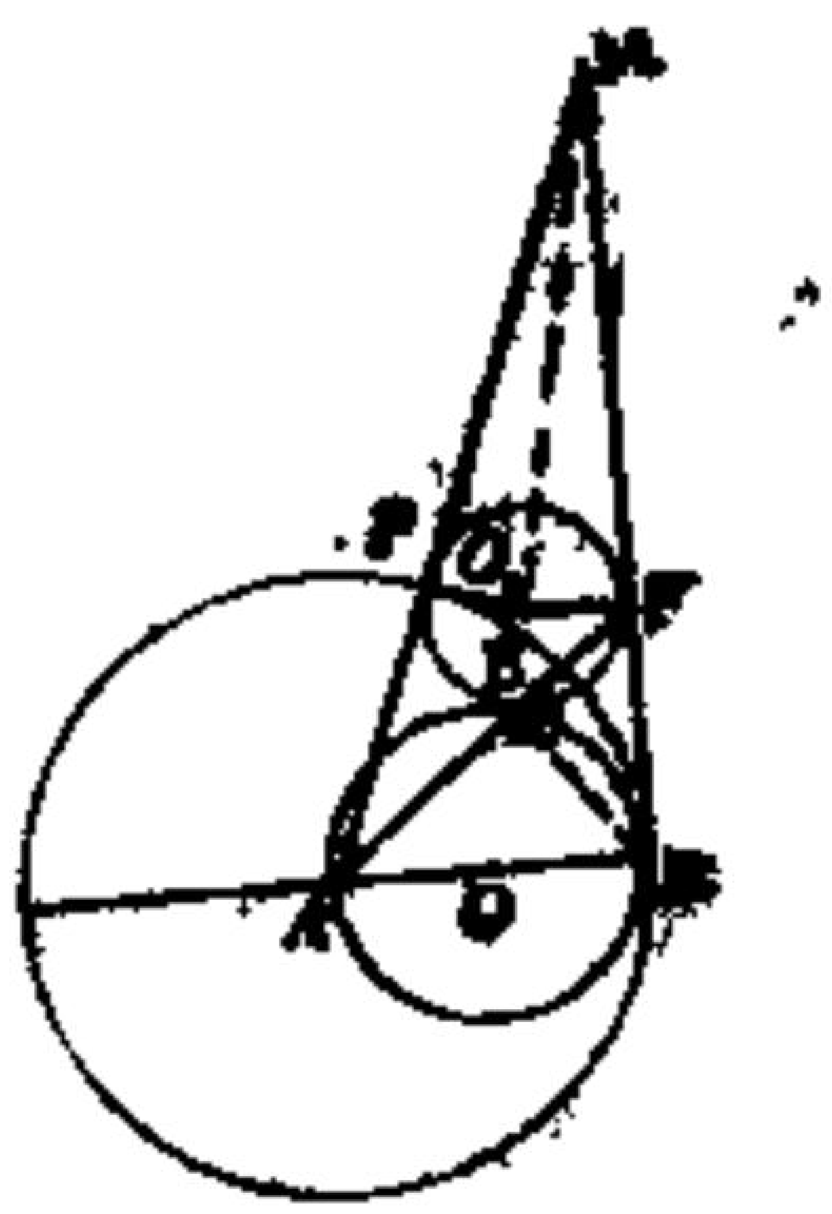


图21—24

25. P 是相交两定圆的交点之一，A、B 各是这两圆上的一定点且与 P 点共线，今过 P 任作一直线，依次交两定圆于 C、D. 求证：AC 与 BD 的交点 Q 的轨迹是一圆.

探求：AC 与 BD 的交点存在如图中 Q、Q' 的两种可能，即分别在 AB 的两侧.

1° 在情况 Q 时，

$$\angle Q=180^\circ-(\angle QCD+\angle QDC)$$

$$=180^\circ-(\angle PRA+\angle PDB)$$

$$=180^\circ-\frac{1}{2}(PO_1A+\angle PO_2B).$$

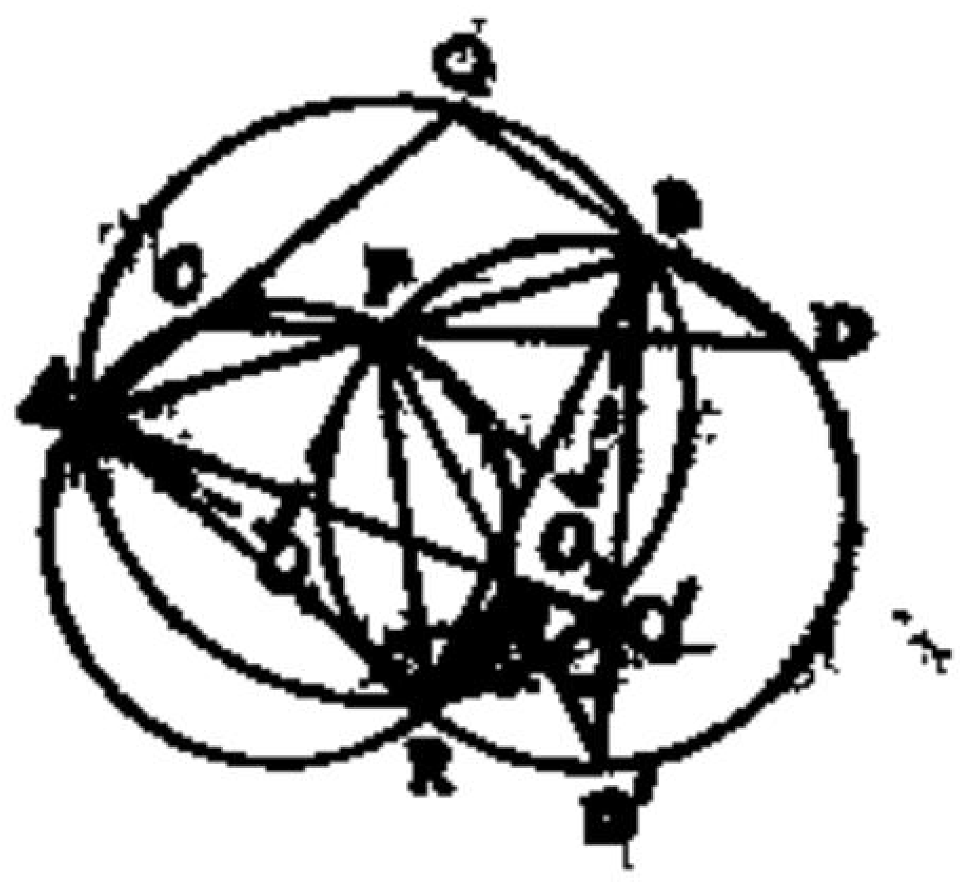


图21—25

2° 在情况 Q' 时，

$$\angle AQ'B=\angle Q'C'D'+\angle Q'D'C'$$

$$=\frac{1}{2}(\angle PO_1A+\angle PO_2B).$$

故 Q 点在 A、B、R 所确定的圆上，A、B 为极限点，R 为两定圆的另一交点．

证明略．

26．一梯形内接于定圆，且有一腰固定．求证：它的对角线交点的轨迹是一段圆弧．

探求：设 BC 腰固定，

$\because$ $\angle CPB=\angle PAB+\angle PBA=2\angle CAB$ 为定角，若此定角为 θ，则 P 点的轨迹为以 BC 为弦，内接角为 θ 的一段圆弧 $\overset{\frown}{BPC}$ 上；B、C 为终止点．

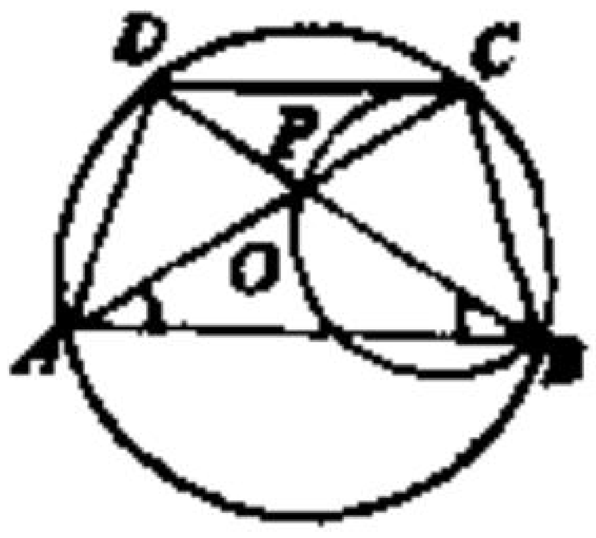


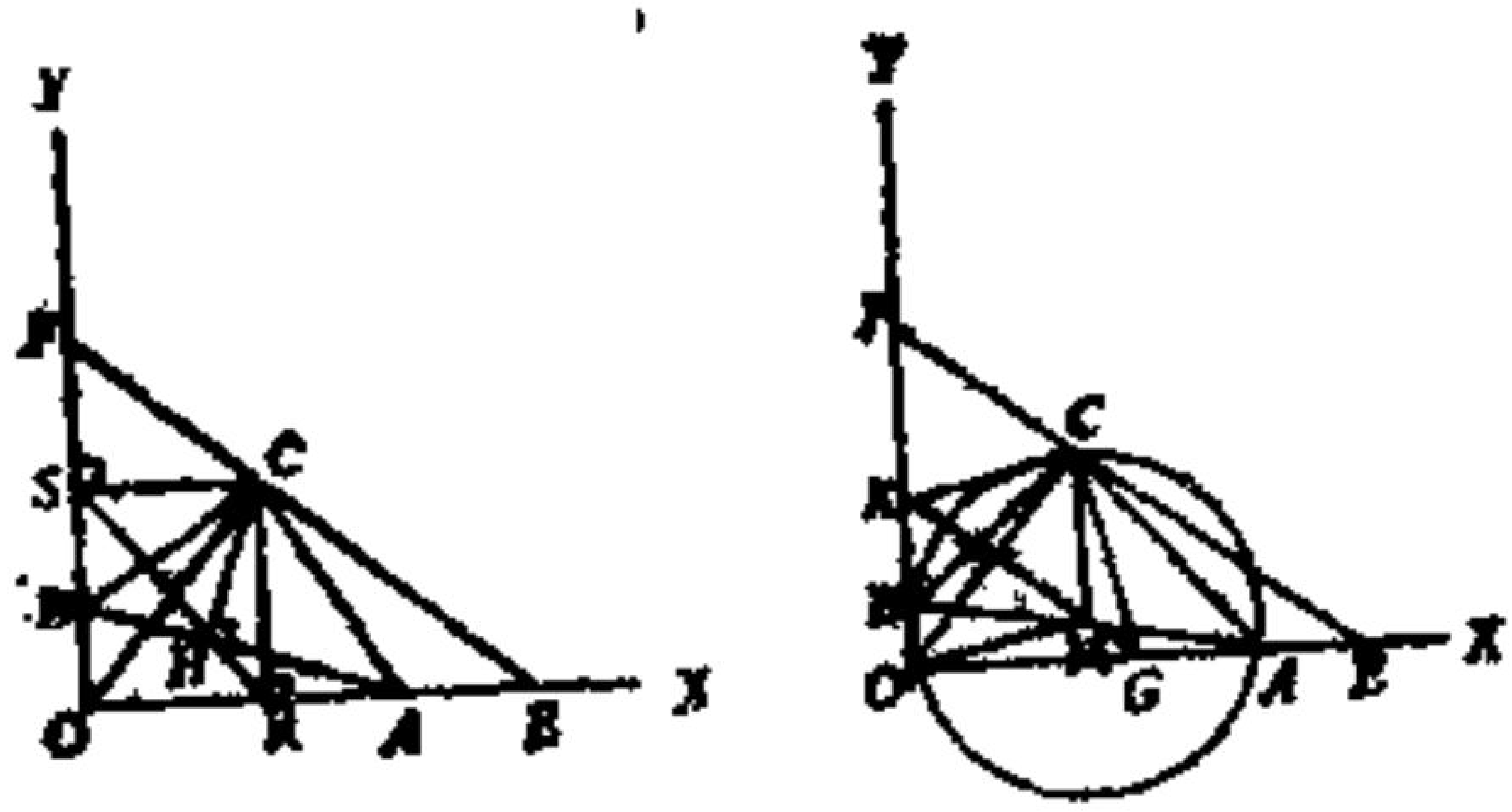
图21—26

证明略．

27．一直角三角形的直角顶是另一个定直角内部的定点，而其余两顶点各落在定直角的两边上，求证下述的点的轨迹各是一条线段：

（1）斜边上的高线足；

（2）斜边的中点．



（1）　　　　（2）

图21—27

探求（1）：设 C 是 Rt△ ABC 的直角顶点且在定直角∠XOY 内部，连 OC，过 C 作 $EF\perp OC$ 交 OX、OY 于 E、F，再由 C 作 OX、OY 的垂线 CR、CS，R、S 为垂足，则 R、S 为 C 点对 Rt△OCE、Rt△OCF 的斜边 OE、OF 上的高线足，故 R、S 是符合条件的特殊点，故垂足 H 的轨迹为 RS.（证明略）

（2）：作 $OC\perp EF$，G、K 是 Rt△OCE、Rt△OCF 斜边上的中点，故 K、G是符合条件的特殊点，所求中点 M 的轨迹为KG，此线是 OC 的中垂线.

证明略.

28.设三角形有一角固定，而夹此角的两边之和为定长，求证第三边中点的轨迹是一线段.

探求：令定长 $AO+BO=l$，在 OX、OY 上取 M、N，使 $OM=ON=l/2$．则 M、N 是点 P 当 B、A 分别与 O 点重合时的特殊点，故符合条件．

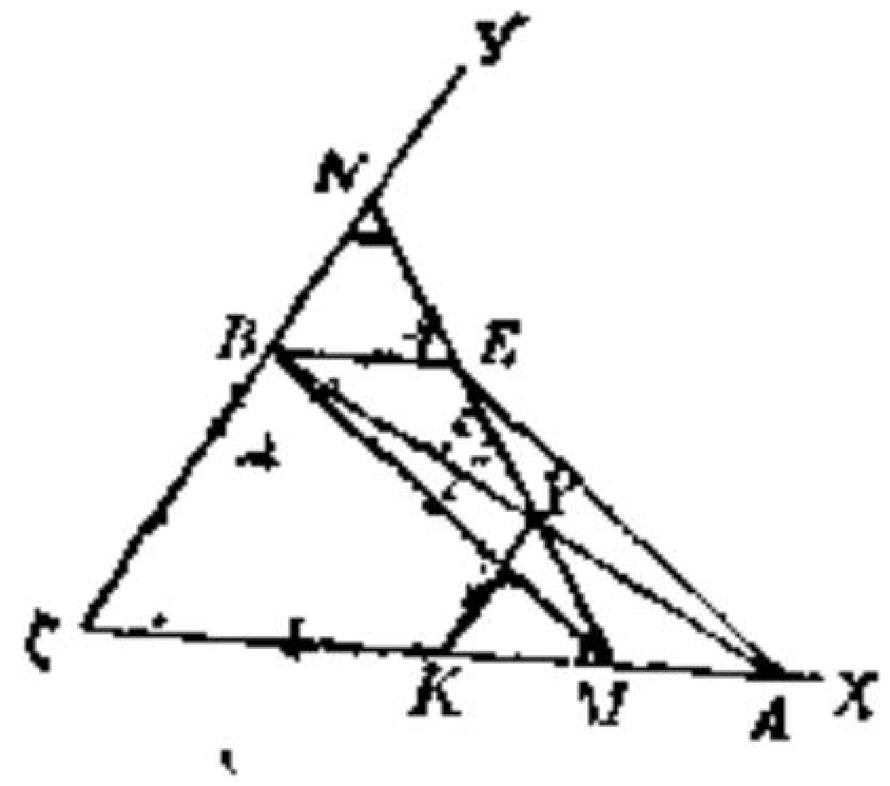


图21—28

在一般位置时，作 $BE/\!/OA$ 交 MN 于 E．则有 $\angle BEN=\angle OMN=\angle ONM$．$\therefore$ $AEBM$ 为平行四边形，故 P 点在 MN 上，第三边中点 P 的轨迹是线段 MN，M、N 为临界点．

证明略．

29．设平行四边形有一角固定，而周界有定长，求证定角的对顶点的轨迹是一线段．

探求：令角 A 固定，周界的定长为 $2l$．在 $\angle XAY$ 上取两点 M、N，使 $AM=AN=l$，则 $\triangle AMN$ 为等腰三角形，连 NC 设交 AX 于 M'，则 $BC=BN$，$DC=DM$，$AM=AN$，

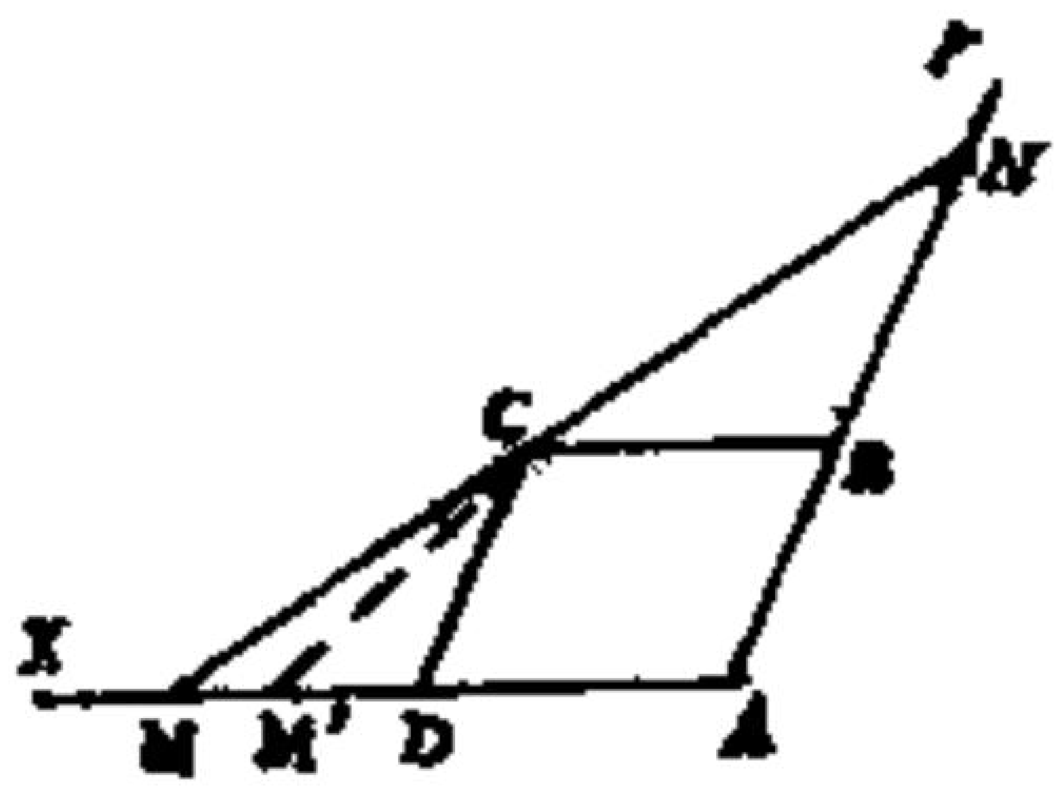


图21—29

$\angle CM'A=\angle NCB=\angle BNC$，

$\therefore$ $AM'=AN$，有 M' 与 M 重合．知 C 点在 MN 上，故 C 点轨迹是线段 MN，M、N 为临界点．

30.定角 $\angle XOY$ 不等于直角，A 是 OX 边上的定点，B 是 OY 边上的任意点，作 $\odot AOB$，并过 A、B 各作此圆的切线．求证：所作两切线的交点的轨迹是一条直线．

探求：由于 A 点固定，故 $\odot AOB$ 的圆心在 OA 的中垂线上，过 O 作 OY 的垂线交 OA 的中垂线于 O_1，则 $\odot O_1(O_1O)$ 切 OY 于 O 点，且 OA 的中垂线与 OY 的交点 Q 为 $\odot O_1$ 过 O、A 的切线的交点，即点 Q 是符合条件的一个特殊点．

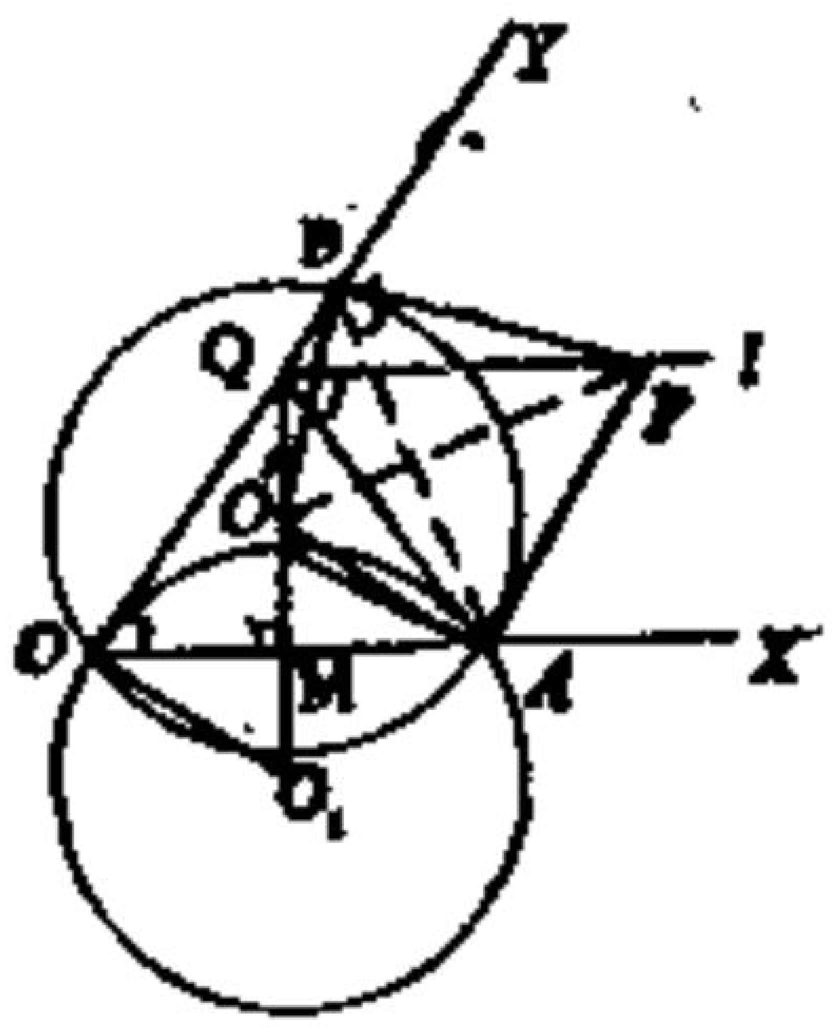


图21—30

当 B 点重合于 Q 时，$\odot AOQ$ 过 Q 点的切线平行于 OX，设此半线为 l，且过 A 所作 $\odot AOQ$ 的切线与 l 的交点也是符合条件的一个特殊点．

在一般场合，设 $\odot AOB$ 的圆心为 O'，由弦切角有 $\angle PBA=\angle BOA=\angle PQA$，有 A、P、B、Q 四点共圆，故 P 在 l 上，即 P 点的轨迹为半线 l，Q 为半线的端点．

证明略．

31. A、B 是定直线 k 与 l 外的两定点，自这两点引互相平行的两直线 a 与 b，设 a 与 k，b 与 l 各交于 X、Y，求证：AY 与 BX 的交点 P 的轨迹是一条直线.

探求：作 $AM /\!/ l$ 交 k 于 M，$BN /\!/ k$ 交 l 于 N，则 M、N 为定点，

$\because$ $AX /\!/ BY$，有 $\triangle APX \backsim \triangle YPB$，$\triangle AMX \backsim \triangle YNB$，

$\therefore$ $AP:YP = AX:YB = AM:YN$，

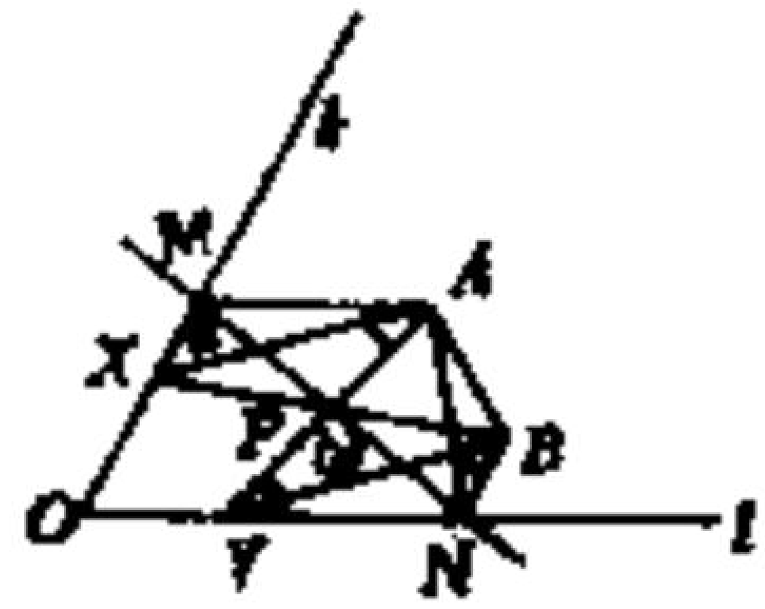


图21—31

又 $\angle MAP = \angle NYP$，　　$\triangle MAP \backsim \triangle NYP$，

有 $\angle MPA = \angle NPY$，

$\therefore$ M、P、N 三点共线，故所求直线由 M、N 两点确定，即点 P 的轨迹是直线 MN，M、N 为极限点.（证明略）

32. 设三角形的三边各有定向，两两顶点分别在两条定直线上，则第三顶点的轨迹是一条直线.

探求：若两条定直线 $a /\!/ b$，则所有 $\triangle ABC$ 全等，C 点的轨迹是平行于 a、b 的直线.

若 a、b 相交于 O 点，由对称性知，C 点关于 O 点的对称点也是轨迹上的点，故所求轨迹过 O 点. 所求直线由 O 与定向三角形

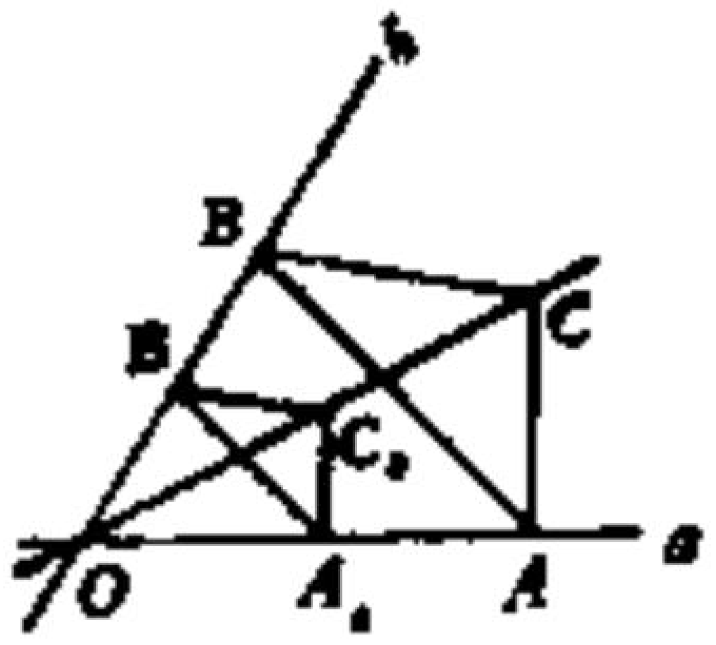


图21—32

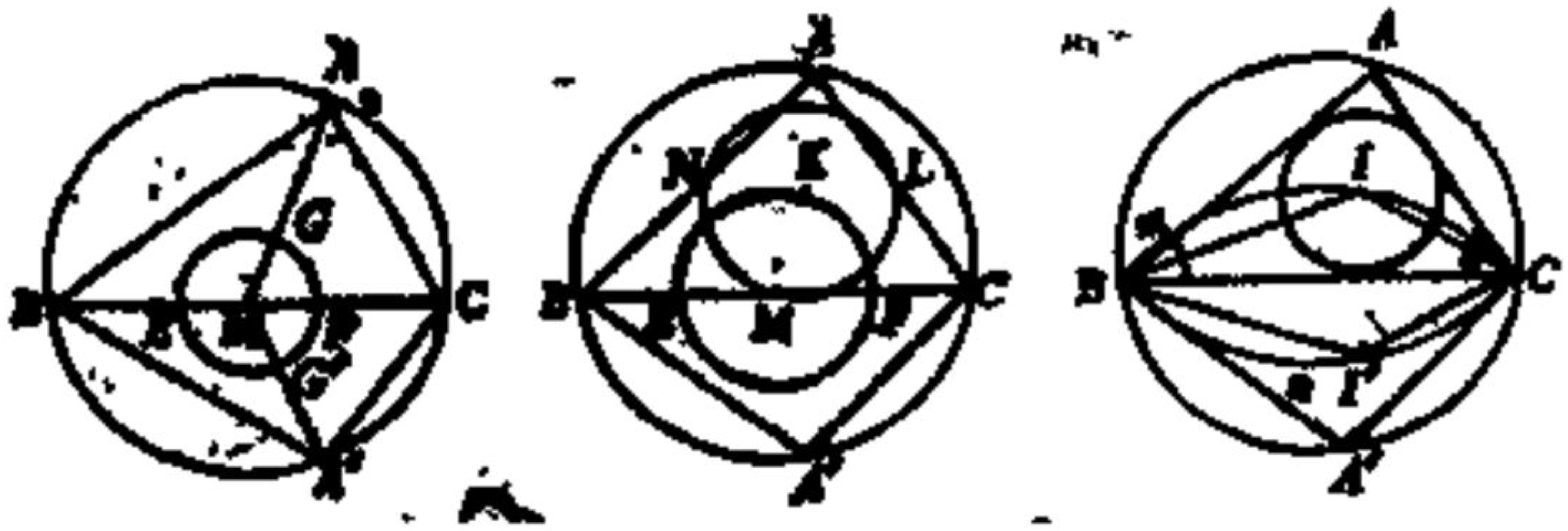
$\triangle A_0B_0C_0$ 的 C_0 点所确定．O 点为极限点．

证明略．

习 题 二 十 二

1.一三角形内接于定圆且有一边固定，求这三角形的（1）重心；（2）九点圆心；（3）内心的轨迹．

探求（1）：M 是 BC 的中点，G、G' 在三角形的中线



（1）　　（2）　　（3）

图22—1

AM、$A'M$ 的 2/3 处，即 $MG=MA/3$，$MG'=MA'/3$，故有 G、G' 是以 M 为位似中心，位似系数等于 1/3 的 A、A' 的位似对应点．

又 E、F 是 BC 的三等分点，故重心 G 的轨迹为 $\odot GEF$，E、F 是极限点．（证明略）

探求（2）：令 BC 是固定边，其中点 M 为定点，由于九点圆 $\odot K$ 恒过 M，故九点圆心在以 M 为圆心．$\frac{1}{2}R$ 为半

径的圆上，故九点圆心K的轨迹为$\odot M\left(\frac{1}{2}R\right)$，$R$为$\odot ABC$的半径，$E$、$F$为极限点．（证明略）

探求（3）：∵ I是$\triangle ABC$的内心，

∴ $\angle BIC=180°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=90°+\frac{1}{2}\angle A$为定角，其轨迹为$\overset{\frown}{BmC}$，$B$、$C$为极限点；

∵ I'是$\triangle A'BC$的内心，

∴ $\angle BI'C=180°-\frac{1}{2}(\angle A'BC+\angle A'CB)=180°-\frac{1}{2}\angle A$为定角，其轨迹为$\overset{\frown}{BnC}$，$B$、$C$为极限点．

证明略．

2．过定圆内一定点作弦AB，在弦两端作圆的切线交于C，求$\triangle ABC$的垂心的轨迹．

探求：过P作PO的垂线，则此弦与$\odot O$的交点A'、B'是一个特殊场合的点．由过A'、B'所作$\odot O$的切线的交点C'所构成的$\triangle A'B'C'$的垂心，在PO线上．

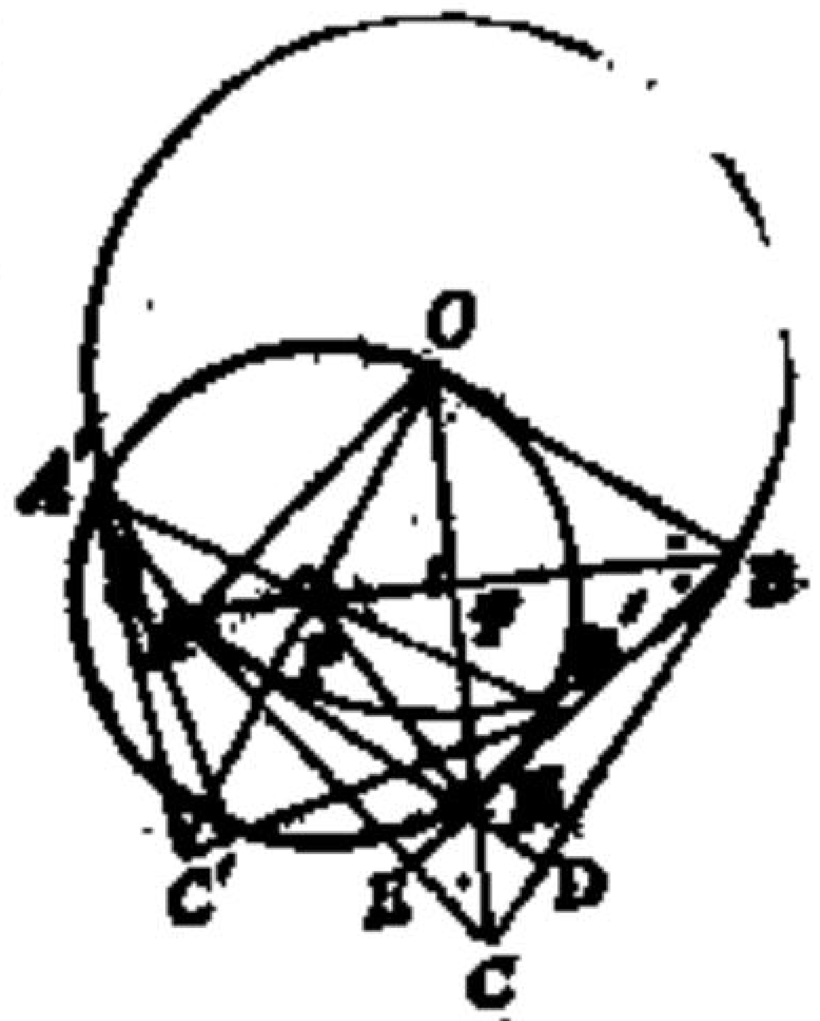


图22—2

在一般场合．∵ B、C、E、F及

O、A、C、B 为四点共圆，∴ $\angle FBE = \angle FCE = \angle OCA = \angle OBA$，又 $BF \perp OH$，∴ $OF = HF$. 故有 $PO = PH$. 即 PH 有定长.

由于 H 点关于 OP 的对称点也符合条件，故此轨迹应为圆. 即 $\odot P(PO)$. O 为极限点.（证明略）.

3. 设 A、P 两定点不在定圆 $\odot O$ 上，过 P 引割线交 $\odot O$ 于 B、C，求 $\triangle ABC$ 的外心的轨迹.

探求：设 G 是 $\triangle ABC$ 的外心，

∵ $GP^2 - GA^2 = GF^2 + PF^2 - GC^2 = PF^2 - (GC^2 - GF^2) = PF^2 - FC^2 = (PF + FC)\cdot(PF - FC) = PC \cdot PB = PN^2 = PO^2 - r^2 = k$ 为定值. 故有 G 点至两定点的距离平方差为定值. 由例题65知，G 点的轨迹在垂直于 PA 的直线 l 上.

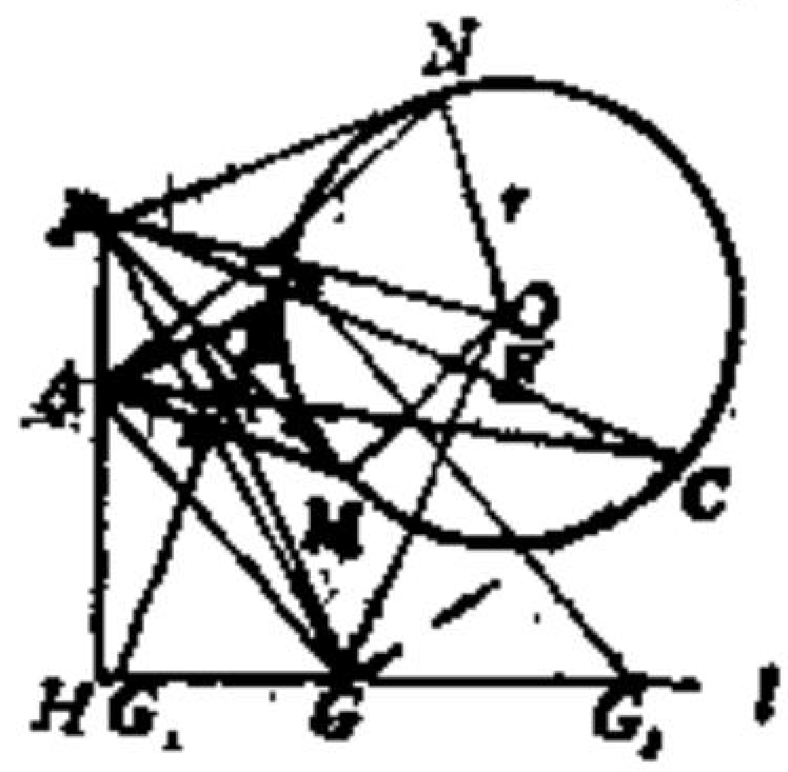


图22—3

过 P 作 $\odot O$ 的切线 PM、PN，则 AM、AN 是 $\triangle ABC$ 处于极限位置的情形，故其中垂线与 l 的交点 G_1、G_2 为临界点；即外心 G 的轨迹为线段 G_1G_2.（证明略）

4. 设三角形有一边是定圆的直径，该边所对的顶点是不在定圆上的定点，求这三角形的（1）外心；（2）垂心；（3）九点圆心的轨迹.

探求（1）：∵ $OC^2 - OM^2 = CM^2$，∴ $OA^2 - OM^2 = R^2$

由于 A、M 是定点，由例题65知，外心 O 的轨迹是垂直于 AM 的直线 l，垂足 O' 的位置可由等腰三角形 $\triangle AB'C'$ 的外心确定.

(2)：由于 AM 是所有 $\triangle ABC$ 的中线，其垂心 G 为定点，且 G 在 $O'H$ 的 $\frac{1}{3}$ 处，故垂心 H 的轨迹为直线 h.

(3)：由于九点圆心 K 在 $O'H$ 的中点，故 K 的轨迹为直线 k.

证明略.

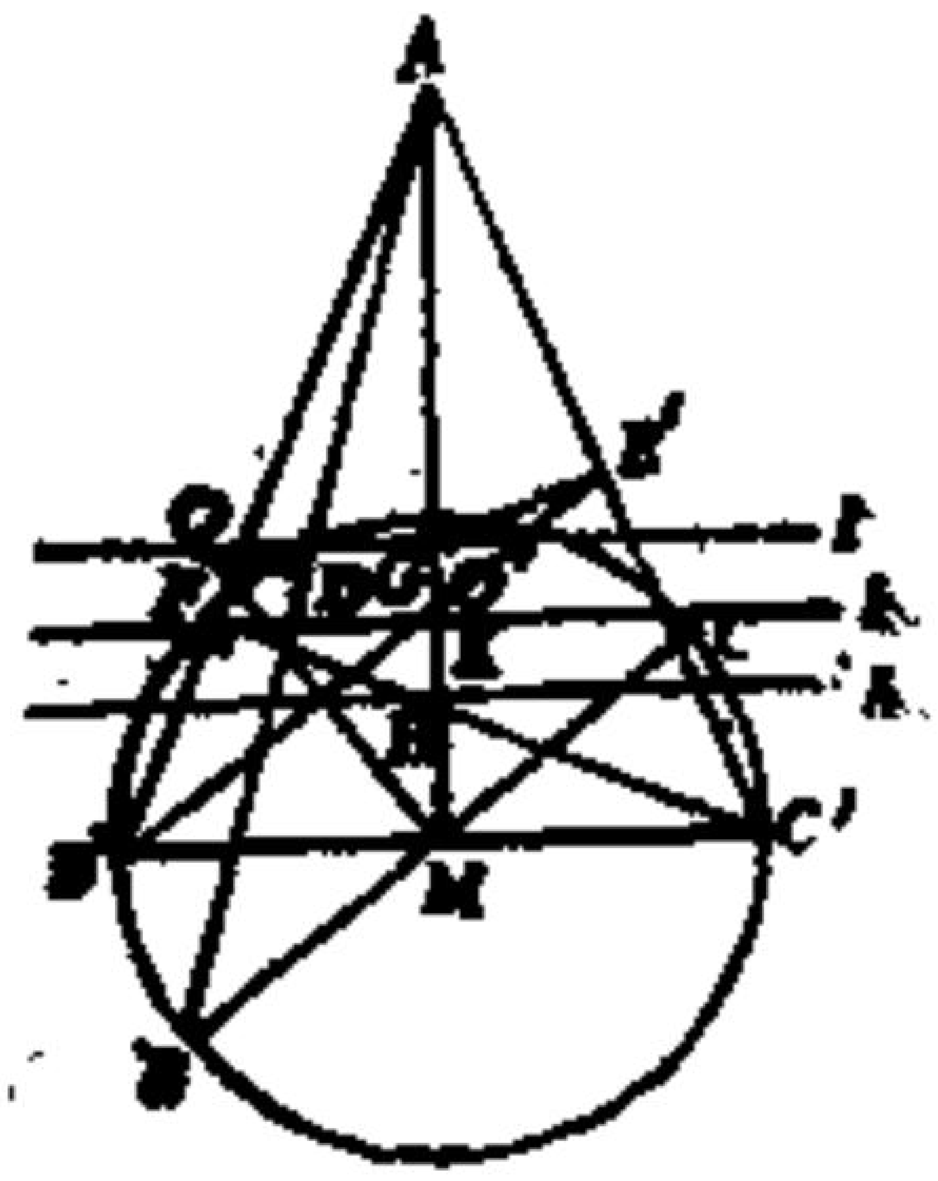


图 22—4

5. 设 A、B、C 是定圆上的三定点，过 C 任作直线交直线 AB 于 P 而交定圆于 Q，求 $\triangle APQ$ 和 $\triangle BPQ$ 的外心的轨迹

探求：设 O_1、O_2 是 $\triangle APQ$、$\triangle BPQ$ 的外心.

$\because \angle AO_1P = 2\angle AQP = 2\angle ABC$ 为定角. 又 $\angle O_1AP = 90^\circ - \angle AO_1E = 90^\circ - \angle ABC$ 亦为定角. 即 O_1 在过 A 且与 AB 的夹角为 $90^\circ - \angle ABC$ 的直线 l_1 上，A 为极限点；

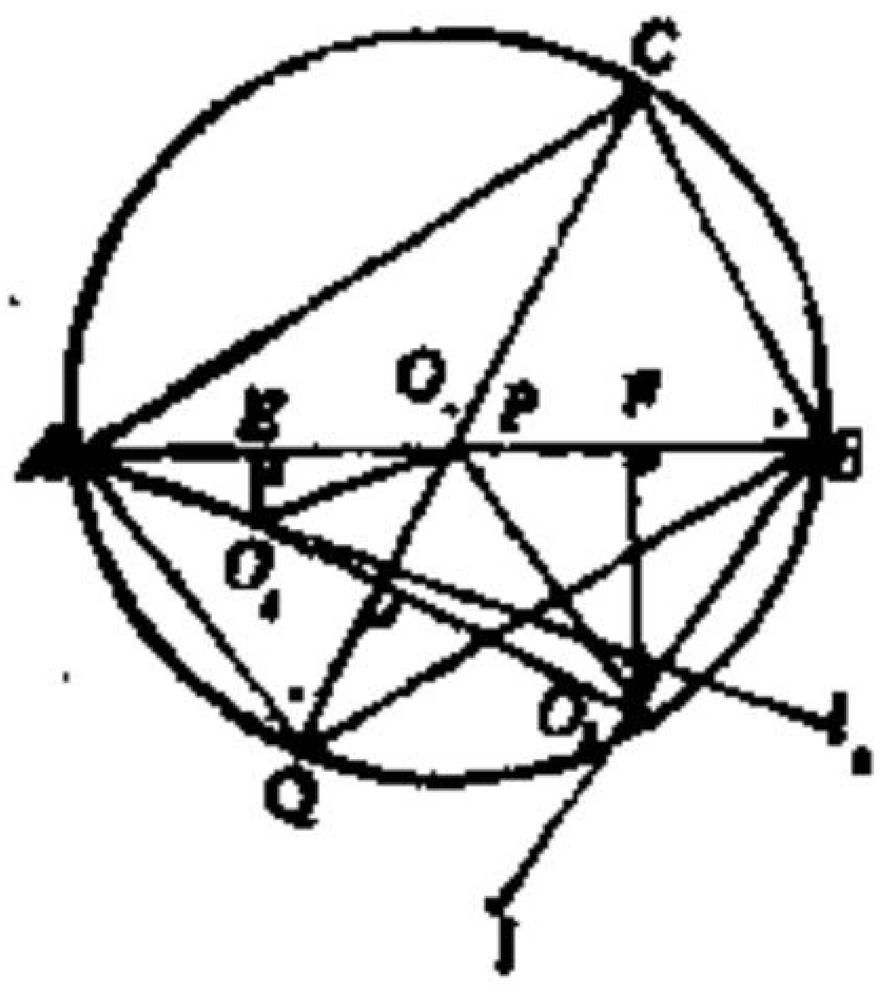


图22—5

同理，O_2 的轨在过 B 且与 BA 的夹角为 $90°-\angle CAB$ 的直线 l_2 上，B 为极限点．（证明略）．

6．设三角形有定外接圆和定内切圆，试求它的：（1）九点圆心；（2）垂心；（3）重心；（4）三个旁心的轨迹．

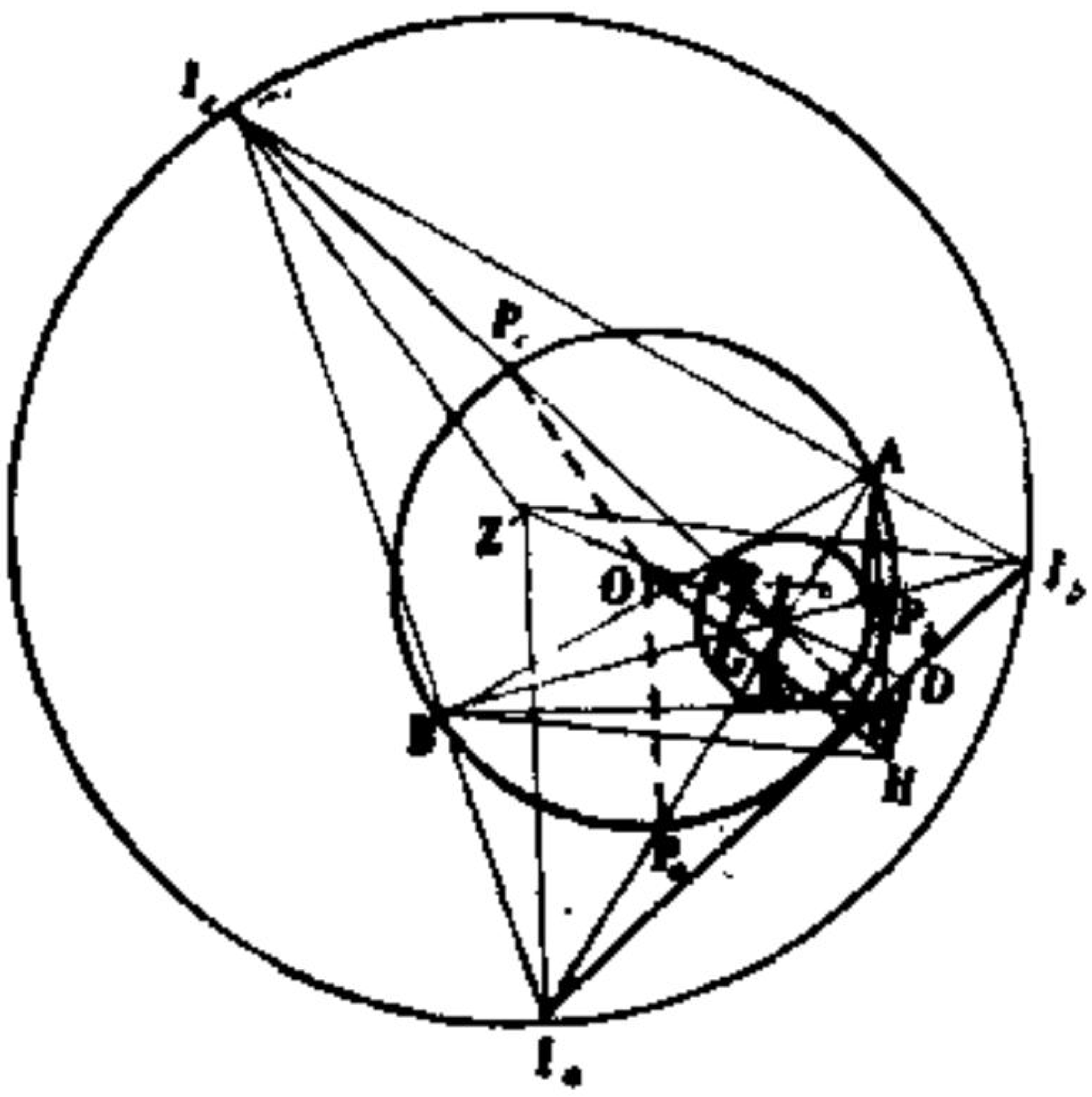


图22—6

探求（1）：令 $\odot ABC$ 的外接圆与内切圆的半径为 R 与 r，且 O、I 为外心与内心，由复习题三第21题知九点圆 $\odot K\left(\frac{1}{2}R\right)$ 与 $\odot I(r)$ 内切，

$\therefore\ IK=\frac{R}{2}-r$．而 I 是定点，故九点圆的圆心轨迹为

$\odot I\left(\frac{R}{2}-r\right)$．

(2)：由 $P184$ 推论 3°，九点圆心 K 在外接圆心 O 与垂心 H 的中点，延长 OI 至 D，使 $OI=ID$，则 D 为定点且 $DH=2\cdot IK=R-2r$．故垂心 H 的轨迹为 $\odot D(R-2r)$．

(3)：由 $P184$ 推论 3°，重心 G 在 OK 的 $\frac{2}{3}$ 处，截 OI 于 E，使 $OE=2\cdot EI$，则 E 为定点且 $GE=\frac{2}{3}IK=\frac{1}{3}(R-2r)$，故重心 G 的轨迹为 $\odot E\left[\frac{1}{3}(R-2r)\right]$．

(4)：令 I_a、I_b、I_c 为 $\triangle ABC$ 的旁心，P_A、P_B、P_C 是 AI_a、BI_b、CI_c 与 $\odot O$ 的交点，由复习题一第 18 题知，P_A、P_B、P_C 为 II_a、II_b、II_c 的中点，延长 IO 至 I'，使 $IO=OI'$，则 I' 为定点，且 $I'I_a=I'I_b=I'I_c=2\cdot OP_A=2R$．故三个旁心的轨迹为 $\odot I'(2R)$．

证明略．

7．设三角形的一边固定，对顶点与垂心有一定的距离，求对顶点与垂心的轨迹．

探求：设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，$OM\perp BC$ 于 M，有 $OM=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}l$ 为定长．由于 BC 固定，故 O 点唯一确定，A 点的轨迹为 $\odot O$．由习题二十第19题知，H 点的轨迹是以 BC 为弦且等于 $\odot O$ 的圆

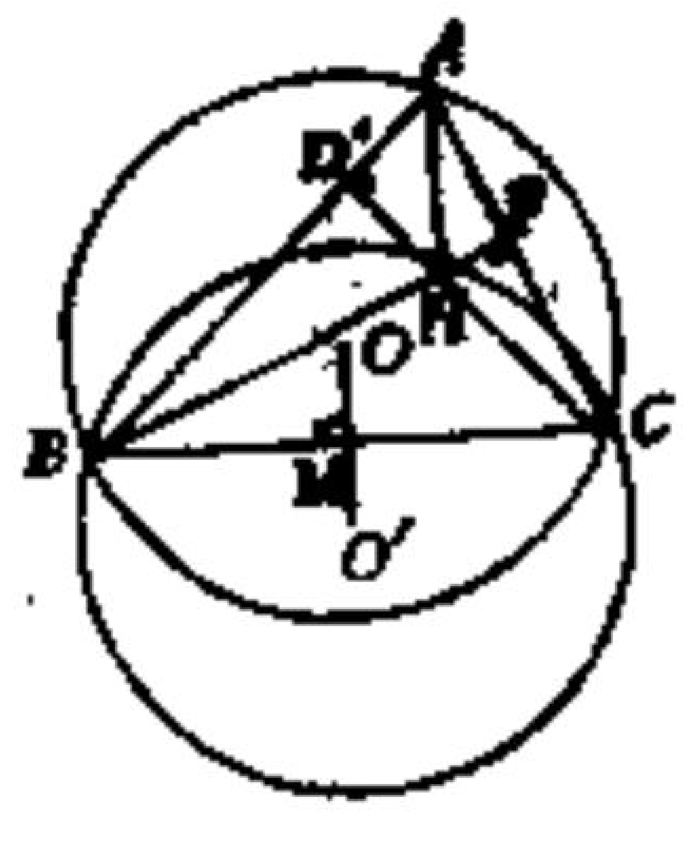


图22—7

$\odot O'$

由于 A 点关于 BC 的对称点也符合条件，故 $\odot O'$ 也为 A 点的轨迹，此时 H 点的轨迹为 $\odot O$．B、C 为极限点．

8．设三角形内接于定圆且以某定点为垂心，求这三角形各边中点的轨迹．

探求：由于 $\triangle ABC$ 各边的中点 D、E、F 是其九点圆上的特殊点，由例题 44 知，其九点圆心 K 位于 OH 的中点，故 K 点唯一确定．又三角形九点圆的半径为其外接圆半径 r 的一半，故中点 D、E、F 的轨迹为

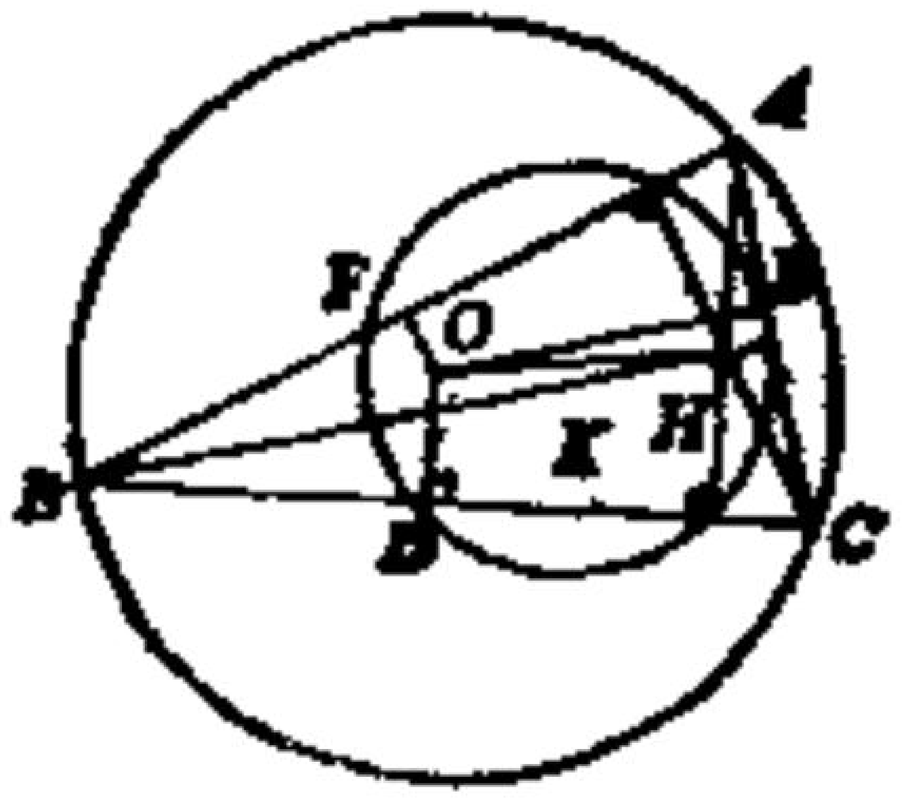


图22—8

$\odot K(\frac{r}{2})$．（证明略）

9．设 D 是直角三角形 $\triangle ABC$ 的 BC 弦上的任意点，自 D 引线垂直于 BC 而交直线 AC、AB 于 L、F，求 BE 与 CF 的交点 P 的轨迹．

探求：在 $\triangle EBC$ 中，

$\because$ $ED\perp BC$，$BA\perp EC$，故 F 为其垂心．有 $CP\perp BE$．因 BC 是定线段，故 P 点的轨迹为以 BC 为直径且过 A 点的半圆．B、C 为极限点．（证明略）

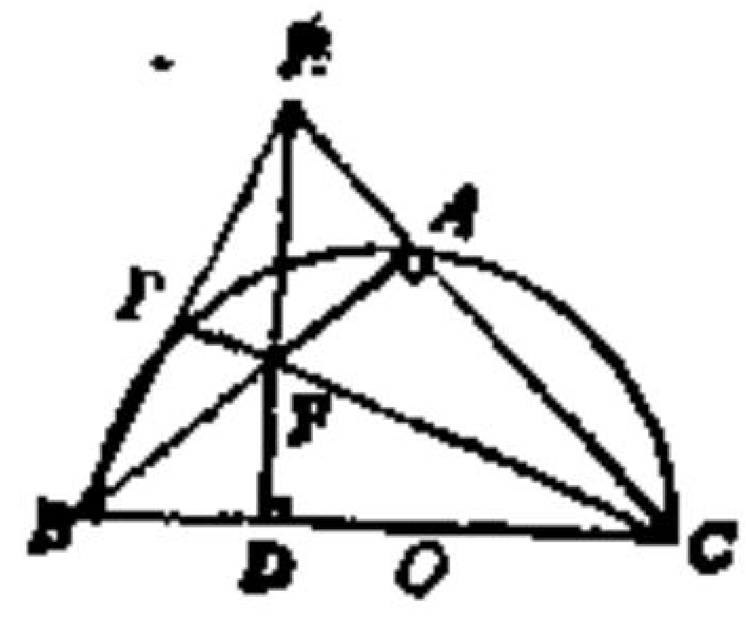


图22—9

10.设三角形的底边固定，两腰的差等于定长，求底边两端在顶角平分线上的射影的轨迹.

探求：设$\triangle ABC$的底边BC固定．且$|AB-AC|=l$为定值，若A点是满足条件的点，当$AB>AC$时，有$AE=AC$．即$\triangle AEC$为等腰三角形，故C点在$\angle A$的平分线AD上的射影N为EC的中点.

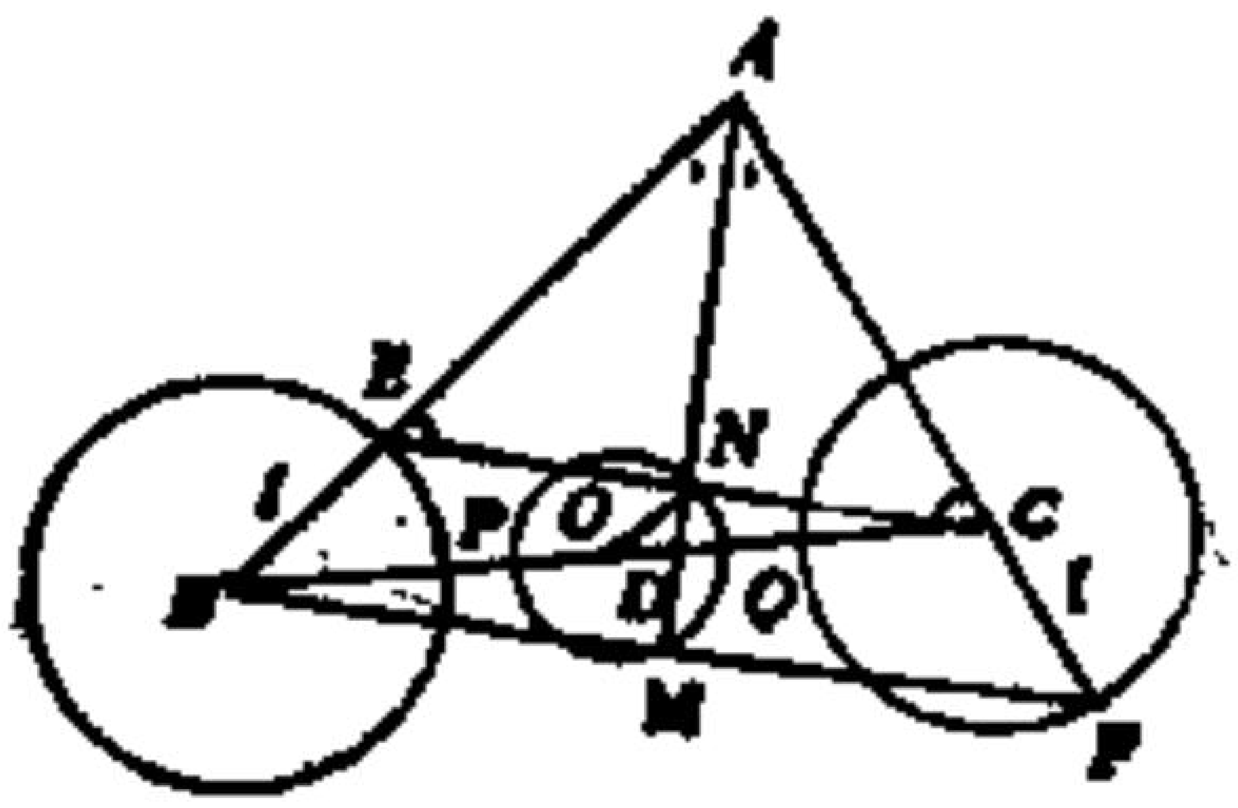


图22—10

$\because$ $EN /\!/ BM$，故$\triangle ABF$亦为等腰三角形，且B点在AD上的射影M为BF的中点，令BC的中点为O，则

$OM=ON=\dfrac{l}{2}$为定值.

当$AB<AC$时，则A点关于BC的中垂线的对称点A'也满足题设条件，此时M、N关于BC的中垂线的对称点M'、N'也是轨迹上的点．故M、N点的轨迹为$\odot O(\dfrac{l}{2})$.

BC与$\odot O(\dfrac{l}{2})$的两交点P、Q为极限点.（证明略）

11．在定三角形的内部，求至一边（所在直线）的距离等于至另二边（所在直线）的距离和的点的轨迹。

设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，AI、BI、CI 分别交 BC、CA、AB 于 H、N、M，设 P 是 MN 上任意点，当 P 与 N、M 重合时，有 $NG=NL$，$MK=MQ$，

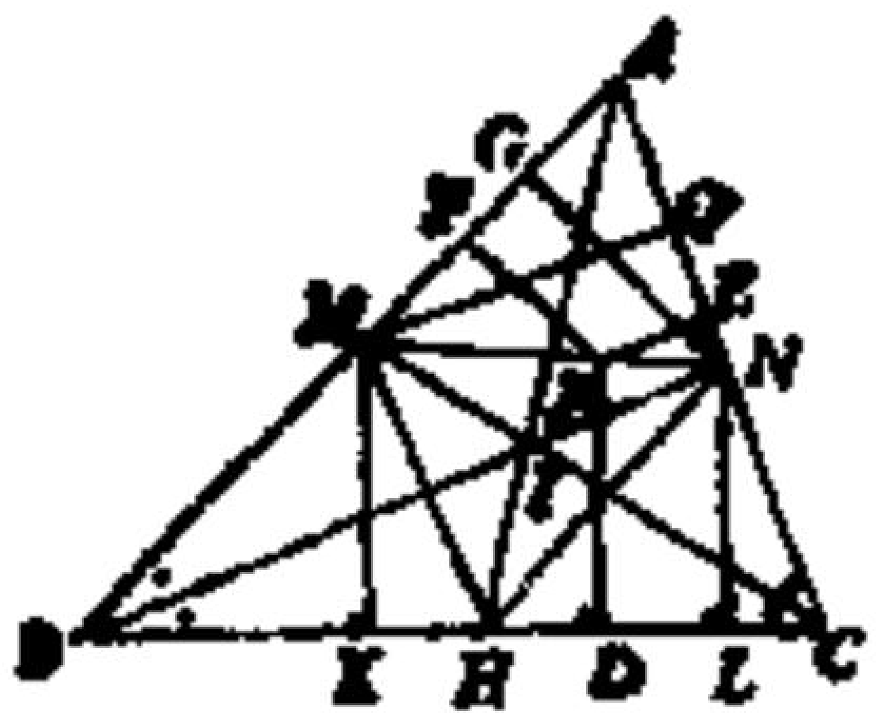


图22—11

此时 $PE=O$，$PF=O$

故 M、N 是 P 点处于极限状态的"合格点"。当 P 在 MN 的中点时，设其在三边上的射影分别为 D、E、F，则 $PD=(MK+NL)/2$，$PE=MQ/2$，$PF=NG/2$．

$\therefore\quad PE+PF=(MQ+NG)/2$．

故有 $PD=PE+PF$．故 MN 的中点 P 是轨迹上的点，即所求轨迹可能是 MN．类似可得 NH、HM 亦为所求轨迹 M、N、H 为极限点．证略明。

12.在定等腰三角形内部，求至底边的距离等于两腰（所在直线）的距离之比例中项的点的轨迹.

探求：设 I 是$\triangle ABC$的内心，则 I 显然是合条件的点，若 P 点至三边的射影为 D、E、F，当 D、F 均重合于 B 时，有 $PD^2=PE\cdot PF=0$，当 D、E 均重合于 C 时，也有

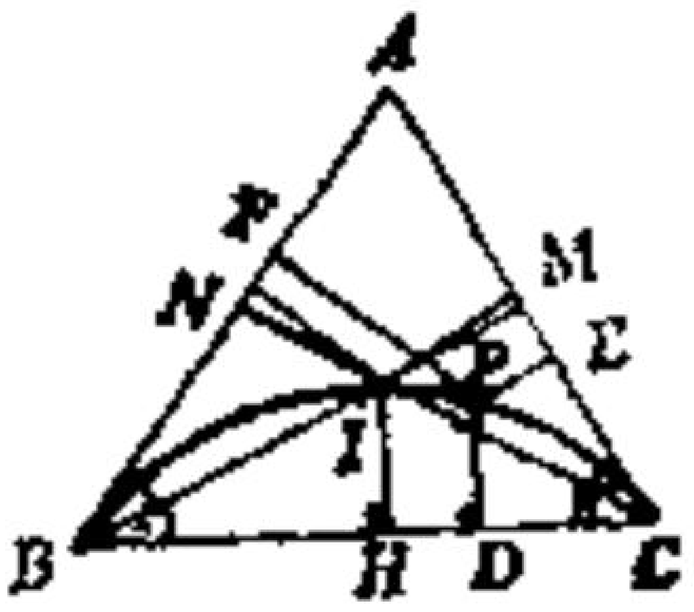


图22—12

$PD^2=PE\cdot PF=0$. 故 B、C 两点为临界点，此轨迹为圆弧 $\overset{\frown}{BIC}$.（证明略）

13. $\triangle ABC$ 是固定的正三角形，设 P 点适合下列条件之一：（1）$PA=PB+PC$；（2）$PA=|PB-PC|$. 求 P 点的轨迹.

探求：由例题16知，正三角形外接圆上任一点至三顶点的连结线，其长者等于其余二者之和，故此轨迹为$\odot ABC$.（证明略）

14. C 是定线段 AB 上的任意点，设在 AB 的同侧作正三角形$\triangle ACE$及$\triangle BCF$，求 AF 与 BE 的交点 P 的轨迹.

探求：当 C 在 AB 的中点时，$\triangle CBE$ 及 $\triangle PAB$ 均为等腰三角形，此时有

$\angle CEB=\angle CBE=\angle PAB=30°$，

故$\angle APB=120°$.

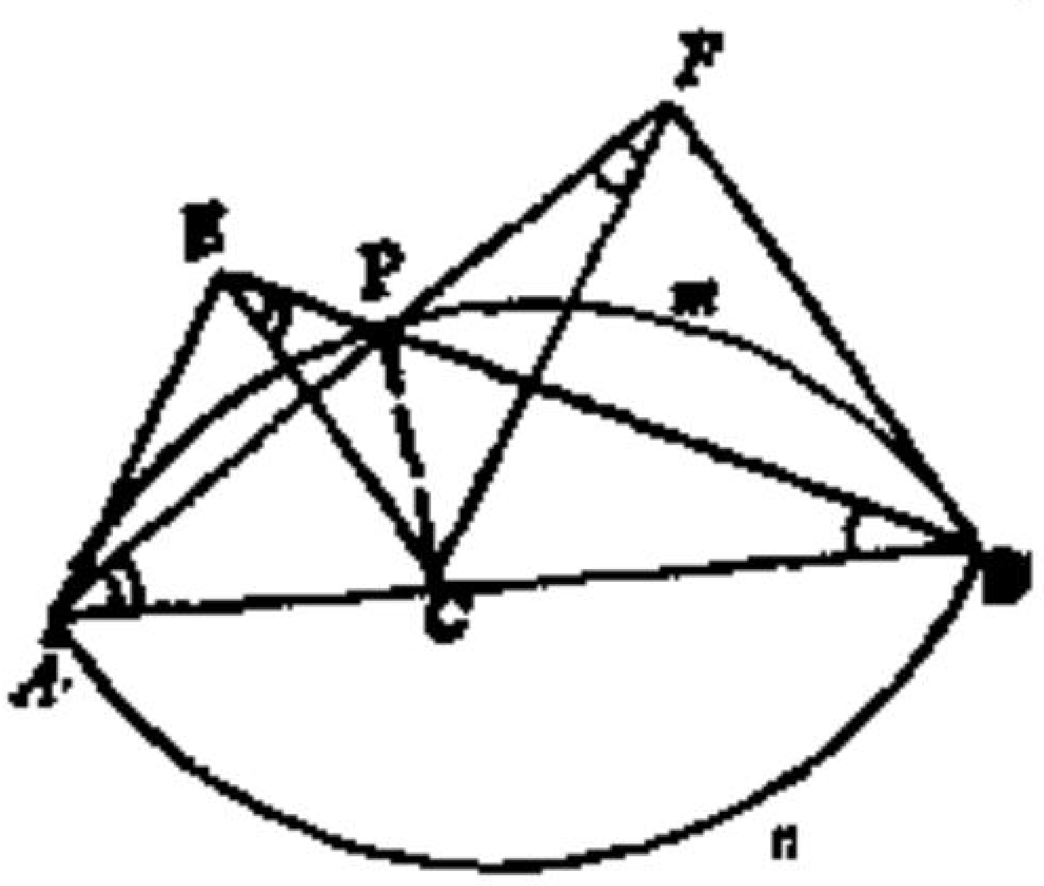


图22—14

当 C 点趋向于 A 时，P 点也趋

向于 A；C 点趋向于 B 时，P 点也趋向于 B，故 A、B 两点为临界点。

在一般场合，∵ $\triangle ACF\cong\triangle ECB$，有 P、C、B、F 及 P、C、A、E，均四点共圆．∴ $\angle APB=\angle AEC+\angle CFB=120^\circ$．

又当 P 符合条件时，其关于 AB 及关于 AB 的中垂线的对称点也都符合条件，故所求轨迹为圆弧 $\overset{\frown}{AmB}$ 及 $\overset{\frown}{AnB}$，AB 弦的夹角为 120°，A、B 为临界点（证明略）．

15．设 C 是定线段 AB 上的任意点，$\triangle ACE$ 和 $\triangle BCF$ 都是正三角形，当这两个三角形在 AB 的（1）同侧；（2）异侧时，求 EF 线段的中点的轨迹．

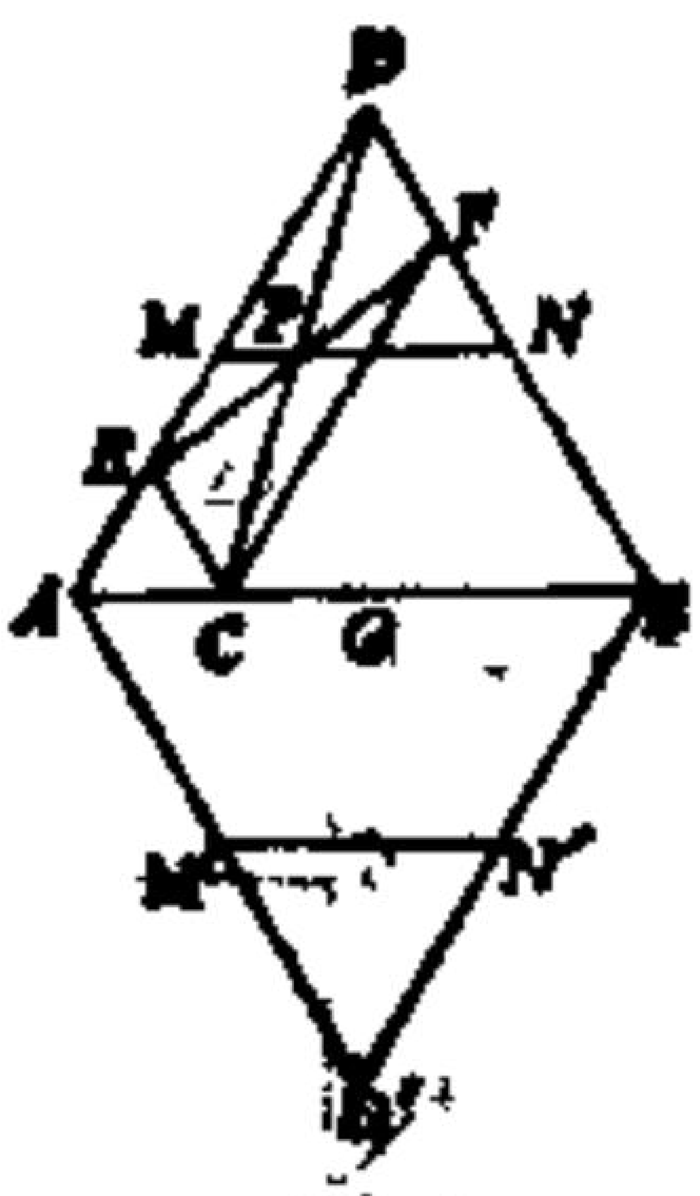


图22—15(1)

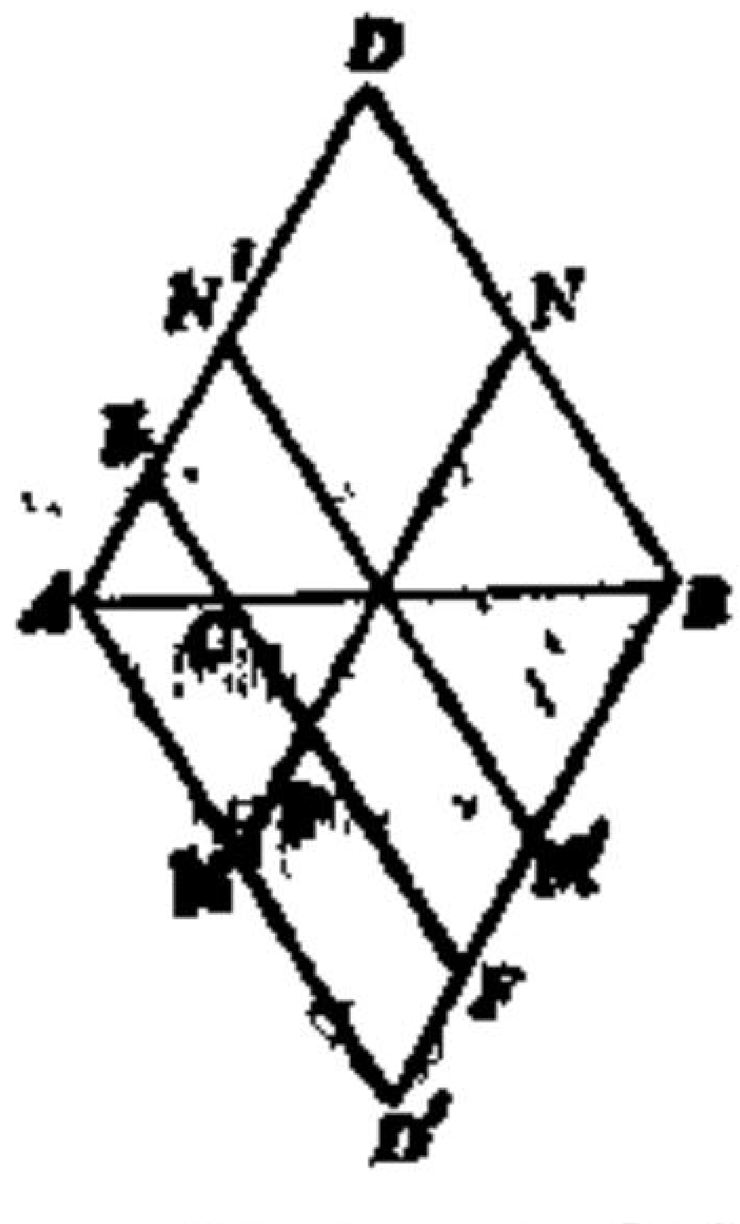


图22—15(2)

探求（1），同侧时，

当 E、F 在 AB 的上面时，作正三角形 $\triangle ABD$，令 M、N 为 AD、BD 的中点时，E、F 分别在 M、N 点，则 MN

的中点在轨迹上；

当 C 趋向于 A、B 时，E、F 也趋向于 A、B，而 F、分别趋向于 D、C，此时 M、N 为临界点．

在一般场合，$ECFD$ 为平行四边形，其对角线的交点 P 在 DC 的中点，故 P 在 MN 上．

故线段 MN 为所求轨迹，M、N 为临界点；

当 E'、F' 在 AB 的下面时，MN 关于 AB 的对称线段 $M'N'$，亦为所求轨迹，M'、N' 为临界点．（证明略）

（2）：异侧时，

作正三角形 $\triangle ABD$、$\triangle ABD'$，令 M、N、M'、N' 各为 AD'、BD、BD'、AD 的中点，与情况（1）类似，可得轨迹 MN、$M'N'$，M、N、M'、N' 为临界点．

16．设 A、B 是定直线 l 上的两定点，C 是 l 上的任意点，$ACEF$ 和 $BCGH$ 都是正方形，当这两个正方形在 l 的（1）同侧；（2）异侧时，求 EG 线段的中点的轨迹．

探求（1），同侧时，

作正方形 $ABQR$，令 M、N 为 AR、BQ 的中点，当 C 在 AB 内部时，$PC=PE+EC$

$$=\frac{1}{2}GE+EC$$

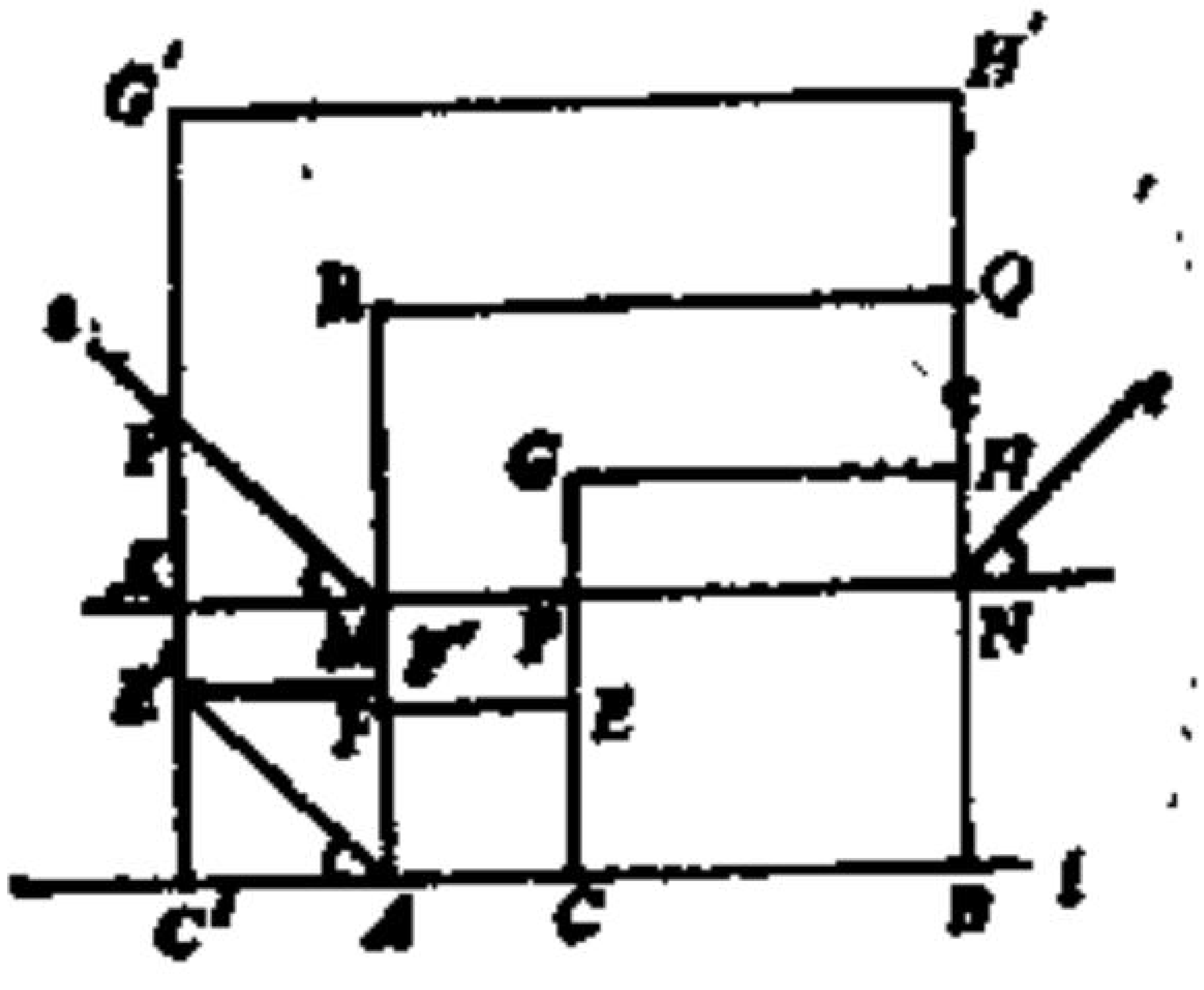


图22—16(1)

$=\frac{1}{2}(GC-EC)+EC=\frac{1}{2}AB$，为定长．其轨迹为平行于 AB 且与其距离为 $\frac{1}{2}AB$ 的线段 MN．

当 C 在 AB 的左侧时，令 $E'G'$ 的中点为 P'，则

$P'E'=\frac{1}{2}E'G'=\frac{1}{2}(G'C'-E'C')=\frac{1}{2}AB$，故 $P'E'AM$ 为平行四边形．∴ $MP'\parallel AE'$，故 $\angle P'MK=45^\circ$ 为定角，P' 点的轨迹为过 M 且与 MN 夹角为 45° 的一条半线 s．

当 C 点在 AB 的右侧时，有另一条类似半线 t．

故 P 点的轨迹为半线 s、t 及线段 MN，M、N 为极限点．

当正方形在 AB 下方时，s、t 及 MN 关于 AB 的对称半线及线段亦为 P 点的轨迹．(证明略)

(2)：异侧时．

作正方形 $ABQR$ 及 $ABQ'R'$，令 M、N、M'、N' 分别为 AR'、BQ'、AR、BQ 的中点．

可由类似情况(1)的分析，得 P 点的轨迹为半线 s、t 及线段 MN 与半线 s'、t' 及线段 $M'N'$，

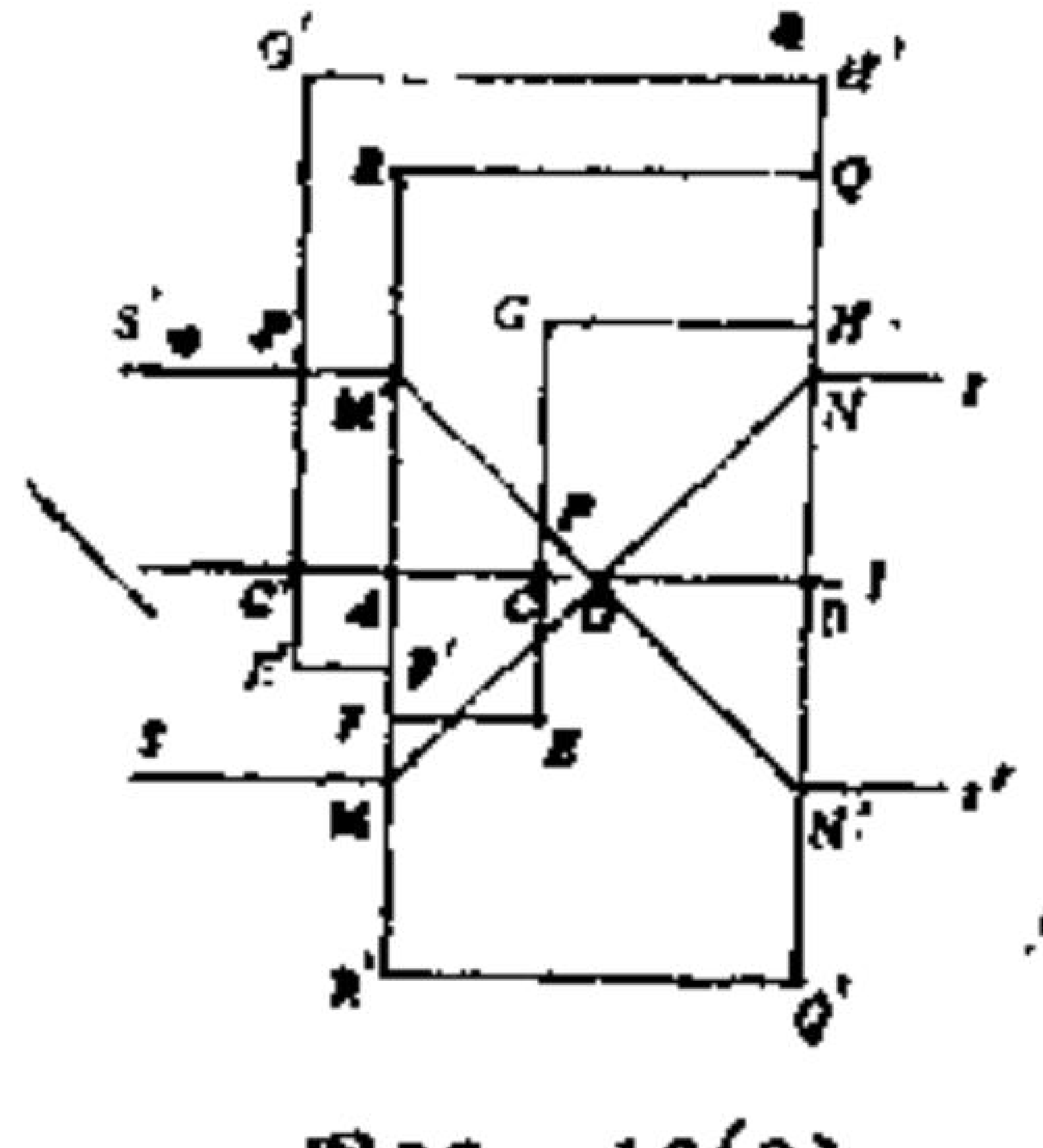


图22—16(2)

所有半线均平行于 AB，M、N、M'、N' 为极限点．（证明略）

17．设正三角形有一顶点固定，另一定点在定圆上，求第三顶点的轨迹．

探求：令正三角形的 A 点固定，B 点在定圆 $\odot O(r)$ 上．

作正三角形 $\triangle AMP$、$\triangle ANQ$，则 P、Q 是满足条件的定点且 A、P、Q 三点共线．

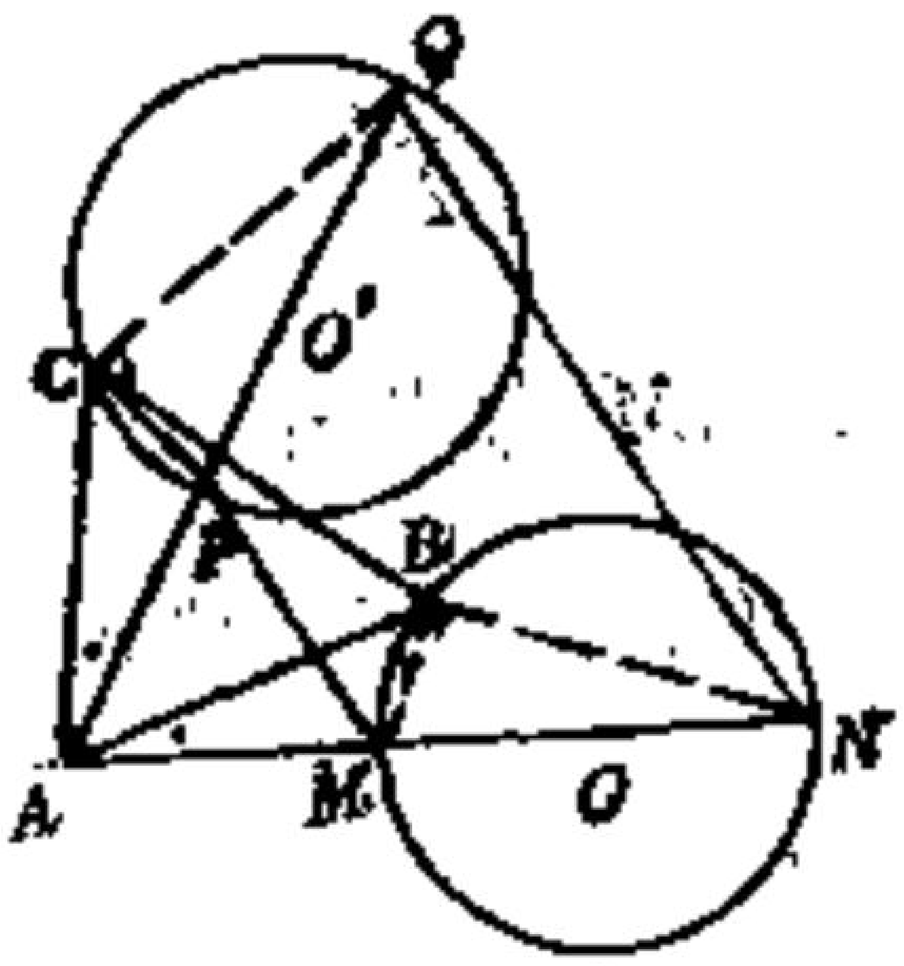


图22—17

作正三角形 $\triangle ABC$，有 $\triangle ACQ \cong \triangle ABN$，$\triangle ACP \cong \triangle ABM$，

$\therefore$ $\angle PCQ = \angle MBN = 90°$．$C$ 点的轨迹是以 PQ 为直径的圆 $\odot O'$，此圆与定圆 $\odot O(r)$ 相等．

由对称性知，$\odot O'(r)$ 关于 AO 的对称圆 $\odot O''(r)$ 也是 C 点的轨迹．（证明略）

18．设三角形的底边固定，顶角等于定角，今以一腰为边向外侧作正方形，求这正方形其他两顶点的轨迹．

探求：设 $\angle A$ 为定角 α，当底边 BC 固定时，A 点在 $\overset{\frown}{BAC}$ 弧上．

作正方形 $BCHE$，则 H、G 为定点，$\because$ $\triangle BEG \cong \triangle BAC$

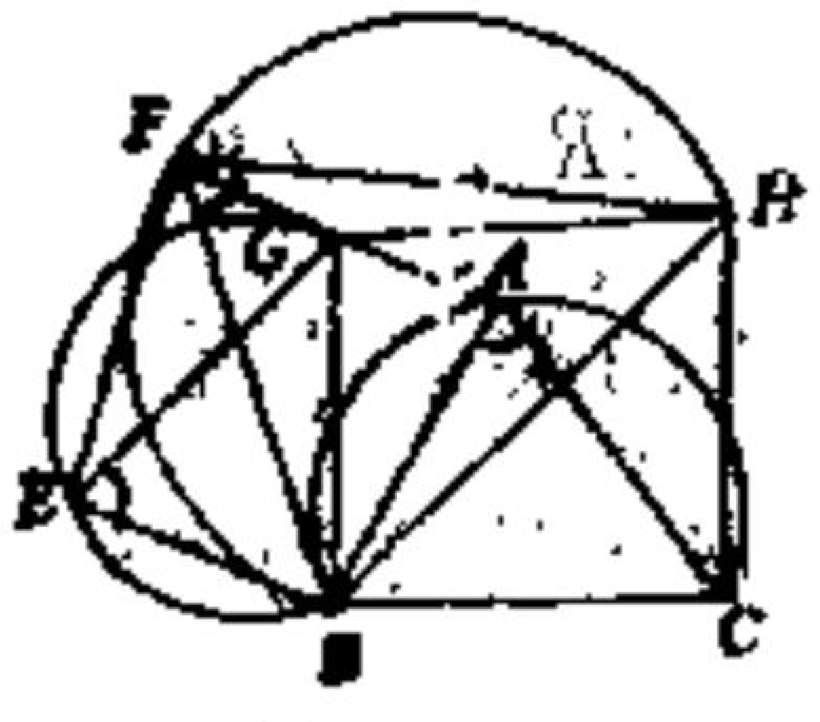


图22—18

$\therefore\ \angle BEG=\angle BAC=\alpha$ 为定角；

又当 A 趋向于 B 时，E、F 均趋向于 B；当 A 趋向于 C 时，E、F 分别趋向于 G、H、故 E 点的轨迹为以 BG 为弦，内接角为 α 的圆弧 $\overset{\frown}{BG}$；F 点的轨迹为以 BH 为弦，内接角为 α 的圆弧 $\overset{\frown}{BH}$，B、G、H 为临界点。

由对称性知：$\overset{\frown}{BG}$、$\overset{\frown}{BH}$ 关于 BC 的对称圆弧 $\overset{\frown}{BG'}$、$\overset{\frown}{BH'}$ 也分别是 E、F 的轨迹，B、G'、H' 为临界点。

19．设▱$ABCD$ 的 BC 边固定，而 $\angle BAC$ 等于定角，求 D 点的轨迹．

探求：延长 BC 至 E，使 $CE=BC$．$\because$ $ACED$ 为平行四边形 $\therefore$ $\angle CDE=\angle BAC=\alpha$ 为定角．

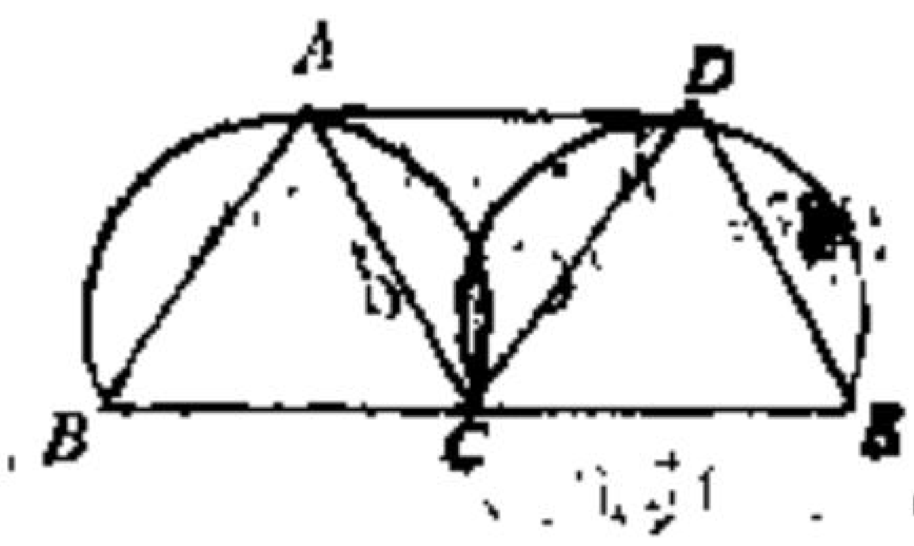


图22—19

当 A 趋向于 B 时，D 趋向于 B；当 A 趋向于 C 时，D 趋向于 E．故 D 点的轨迹为以 CE 为弦、内接角等于定角 α 的圆弧 $\overset{\frown}{CDE}$．

由于对称性，$\overset{\frown}{CDE}$ 关于 BC 的对称圆弧亦为 D 点的轨迹．（证明略）

20. 设梯形有一底固定，而高和另一底各等于定长，求对角线交点的轨迹.

探求：令 BC 固定、$AH=h$、$AD=d$，P 是对角线 AC、BD 的交点，过 P 作 $EF\perp BC$ 而交 BC、AD 于 F、E.

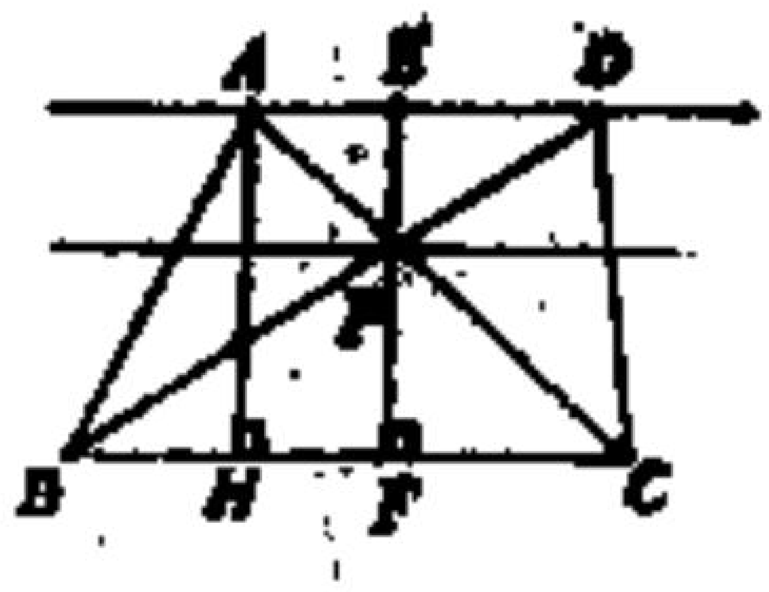


图22—20

由于 AH 有定长，故 AD 在平行于 BC 的直线 l 上移动，P 点可趋向于无穷远，其轨迹为直线.

$\because\ \triangle PFC\backsim\triangle AHC$，$\triangle APD\backsim\triangle CPB$

有 $\dfrac{PF}{AH}=\dfrac{PC}{AC}$，　$\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{BC}{DA}$，故 $\dfrac{PC}{AC}=\dfrac{BC}{BC+DA}$

$\therefore\ PF=\dfrac{h\cdot BC}{BC+d}$ 为定长，故 P 点的轨迹为平行于 BC 的直线 l'，其距离为定长 PF.

由对称性，l' 关于 BC 的对称直线 l'' 亦为 P 点的轨迹.（证明略）

21. 设梯形有一底固定，而另一底和一腰各等于定长，求对角线交点的轨迹.

探求：令梯形的一底 BC 固定，另一底 AD 有定长 d，且一腰 AD 有定长 b，P 是 AC、BD 的交点.

因为 AB 有定长 b，故 A 点的轨迹为$\odot B(b)$，因而 P 点的轨迹关于 BC 对称，又当$\odot B(b)$与 BC 相交时，在 BC 上有 P 的两个极限点，故 P 点的轨迹为圆且圆心在 BC 上.

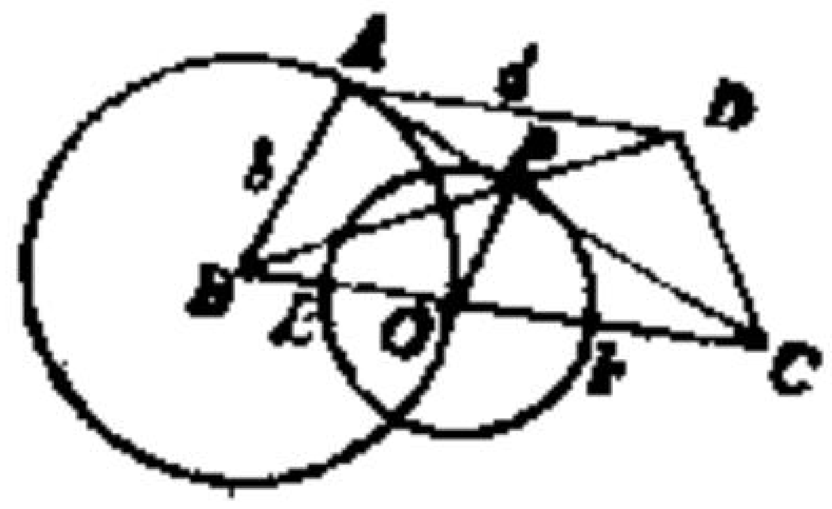


图22—21

作 $PO /\!/ AB$，$\because$ $\triangle POC \backsim \triangle ABC$，$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$.

有 $\dfrac{OC}{BC}=\dfrac{OP}{BA}=\dfrac{CP}{CA}$，$\dfrac{CP}{AP}=\dfrac{BC}{DA}$，故 $\dfrac{CP}{CA}=\dfrac{BC}{BC+DA}$

$\therefore OC=\dfrac{BC^2}{BC+d}$，$OP=\dfrac{b\cdot BC}{BC+d}$，即 OC 有定长，圆心 O 位置可定，OP 有定长，半径可定.

故 P 点的轨迹为$\odot O\left(\dfrac{b\cdot BC}{BC+d}\right)$，$E$、$F$ 为极限点.（证明略）

22．设梯形有一腰固定，而两底各等于定长，求对角线交点的轨迹.

探求：令 AB 固定，AD、CB 有定长 d，b，作 $PO /\!/ CB$.

$\because$ $\triangle AOP \backsim \triangle ABC$，

$\triangle BOP \backsim \triangle BAD$，

$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$，与上题类

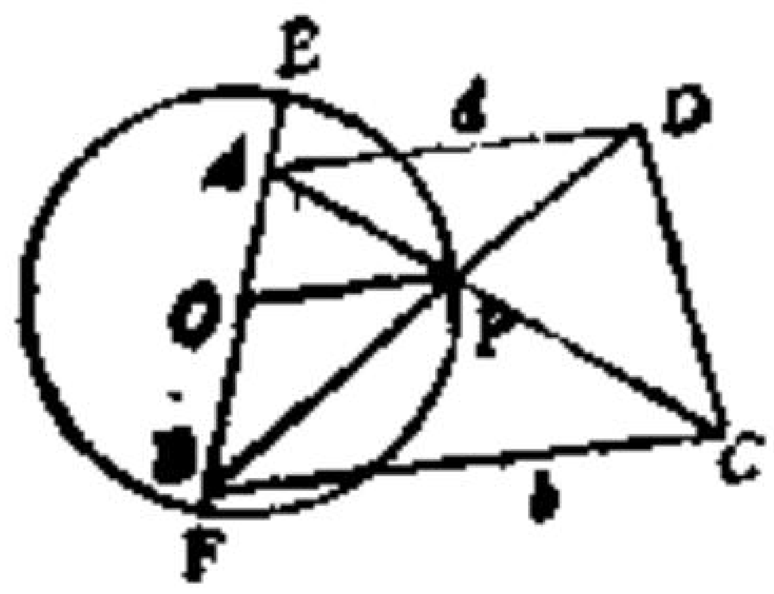


图22—22

似此则有 $BO=\frac{b\cdot AB}{b+d}$ 为定长，故圆心 O 可定，$OP=\frac{bd}{b+d}$ 为定长，故半径可定，即 P 点的轨迹是$\odot O\left(\frac{bd}{b+d}\right)$，$E$、$F$ 为[illegible]（证明略）

二、梯形有一底固定，另一底等于定长，两腰之比为常数，求对角线交点的轨迹。

[解] 设 $AD=d$ 为定长，$AB : CD=k$ 为常数，

过 D 作 $DQ \parallel AB$ 交 BC 于 Q，由于 $ABQD$ 是平行四边形，有 $DQ : DC=k$，且 Q 点一定；故有 D 点到两定点距离之比有定值 k，由阿波罗尼斯轨迹定理，知 D 点的轨迹为一圆，其圆心在 BC 上，故 P 点的轨迹也应为一圆，圆心 O 也应在 BC 上。

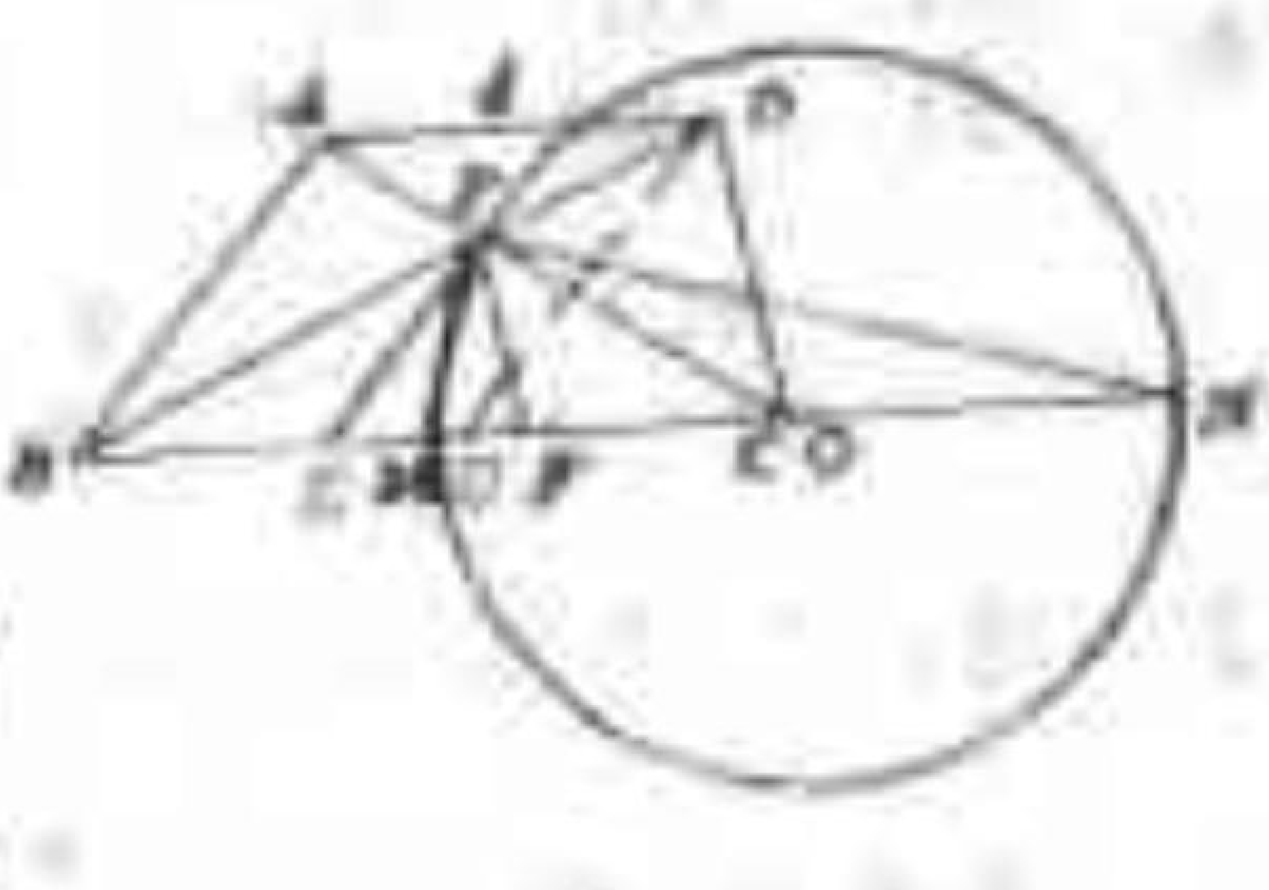


图22—27

过 P 作 PE、PF 分别平行于 AB、CD 交 BC 于 E、F。

有 $BE : EC = AP : PC = AD : BC = d : b$

$BF : FC = BP : PD = BC : AD = b : d$

即 E、F 为定点。

又 $PE : AB = CP : CA$，$PF : DC = BP : BD$

由$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$　可得 $PC : CA = PB : BD$

故有　$PE : PF = k$，动点到两定点距离之比为常数 k．故 P 点的轨迹为圆，其直径为 MN、M、N 为$\angle EPF$的内、外角平分线与 EF 的交点且 M、N 为极限点．（证明略）

当 $k=1$ 时，P 点的轨迹为 BC 边的中垂线．

24．设矩形有一顶点固定，而与这顶点相邻的两顶点同时落在一个定圆上，求第四个顶点的轨迹．

探求：令 A 点固定，若C 点是轨迹上的点，则 C 点关于 OA 的对称点 C' 也是轨迹上的点，其轨迹可能为圆且圆心应在 OA 线上．

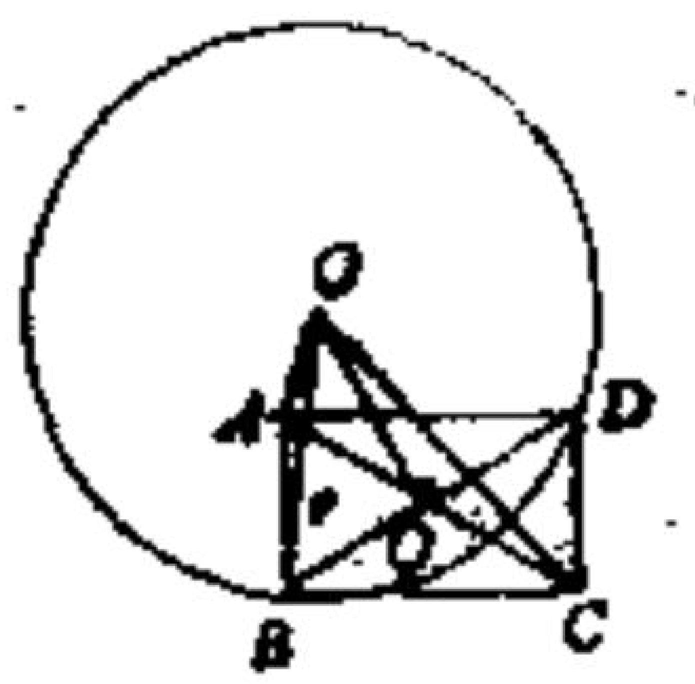


图22－24

∵　OQ 是$\triangle OAC$ 的 AC边上的中线，

由定理131有 $OA^2+OC^2=\frac{1}{2}AC^2+2\cdot OQ^2$

$$=2(QA^2+OQ^2)=2r^2$$

∴ $OC=\sqrt{2r^2-OA^2}$ 为定长，故其轨迹为

$\odot O(\sqrt{2r^2-OA^2})$．　（证明略）

讨论：1°　当 $2r^2>OA^2$ 时，其轨迹为圆；

2°　当 $2r^2=OA^2$ 时，其轨迹是 O 点；

3°　当 $2r^2<OA^2$ 时，无轨迹．

25．设两个等积三角形有一公共顶点，两对边各是固定的线段，求该公共顶点的轨迹．

探求：∵ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEF}$，令 AG、AH 为两三角形的高，有

$$\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}EF\cdot AG$$

∴ $AG:AH=BC:EF$ 为定值．

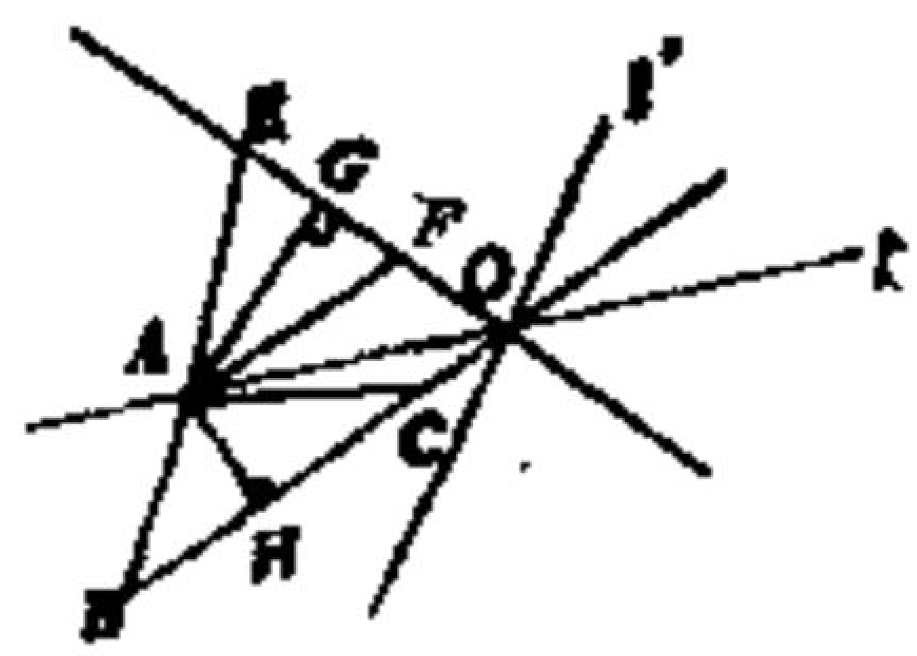


图22—25

由习题二十一第7题知，A 点的轨迹为过 O 点的两直线 l、l'，O 为极限点．

当 $EF/\!/BC$ 时，其轨迹 l 在两直线 EF、BC 之间且平行于该两线，与该两线的距离之比为 $BC:EF$．

26．A、B 是两定点，设 P 合于 $PA^2-2\cdot PB^2=k$，k 为常数，求 P 点的轨迹．

探求：设 M、N 是在 AB 线上且符合条件的点，则 $MA^2-2\cdot MB^2=NA^2-2\cdot NB^2=k$，$M$、$N$ 为两定点．若 P 是合条件的点，则其关于 AB 的对称点 P' 也必合条件．故 P 点的轨迹为圆，且圆心在 AB 上．

延长 AB 至 C，使 $BC=AB$，在 $\triangle PAC$ 中，PB 为 AC 边上的中线．∴ $2PB^2=PA^2+PC^2-2\cdot AB^2$，故 $PC^2=2AB^2-(PA^2-2\cdot PB^2)=2\cdot AB^2-k$ 为常数，即 P 点

的轨迹为$\odot C(\sqrt{2\cdot AB^2-k})$.

（证明略）

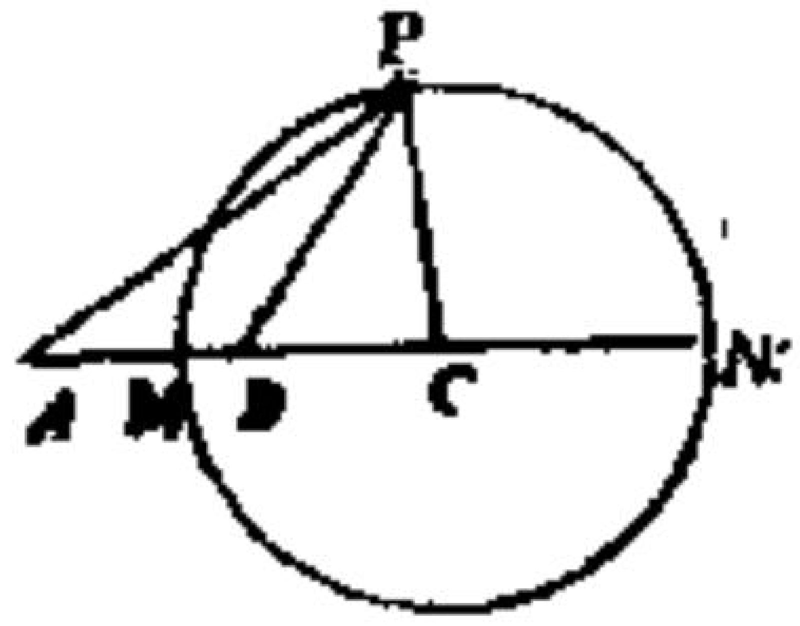


图22—26

讨论：1° $2\cdot AB^2-k>0$时，其轨迹为圆；

2° $2\cdot AB^2-k=0$时，其轨迹为C点；

3° $2\cdot AB^2-k<0$时，无轨迹．

27．设P是定圆上一定点，AB是动弦，合于$PA^2+PB^2=k$，k为常数，求AB弦的中点的轨迹．

探求：令G是AB的中点，有

$OG\perp AB$，$GA^2=OA^2-OG^2$

$\therefore\quad 2GP^2=PA^2+PB^2-2AG^2$

$=k-2(OA^2-OG^2)$

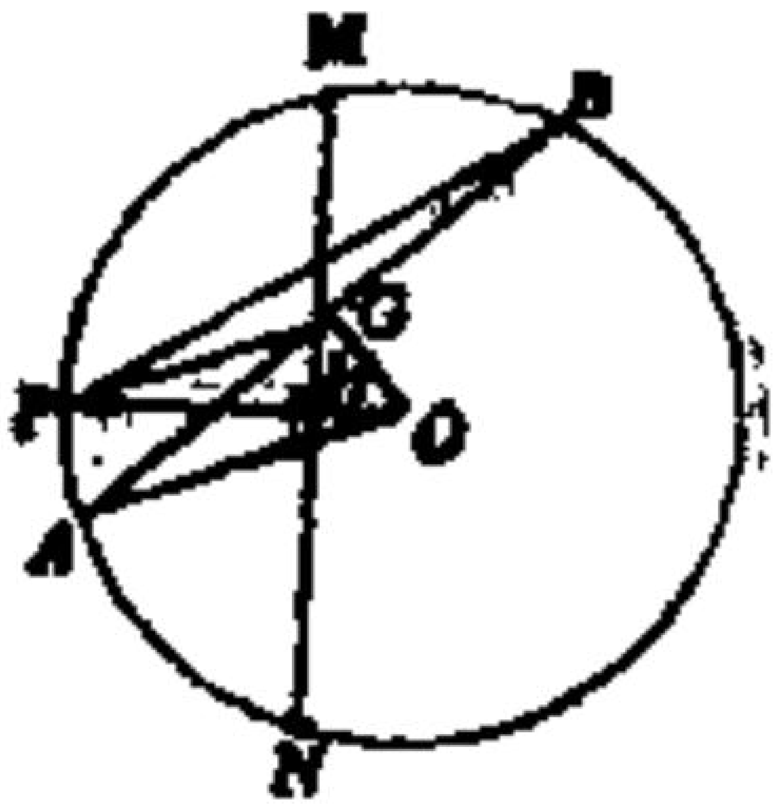


图22—27

故$GP^2-GO^2=k/2-r^2$为定值．由例题65知，G点的轨迹应垂直于PO，由于AB是$\odot O$的弦，故G点的轨迹为MN．M、N为临界点．

28. 设有一动线段，它的两端分别着于已知两同心圆的圆周上，且对某定点恒张开直角，求这线段的中点的轨迹．

探求：令 AB 的中点为 M，则 M 关于 PO 的对称点 M' 也是轨迹上的点，由于 A、B 在两圆上滑动，M 点的轨迹可能为圆，且圆心在 OP 上．

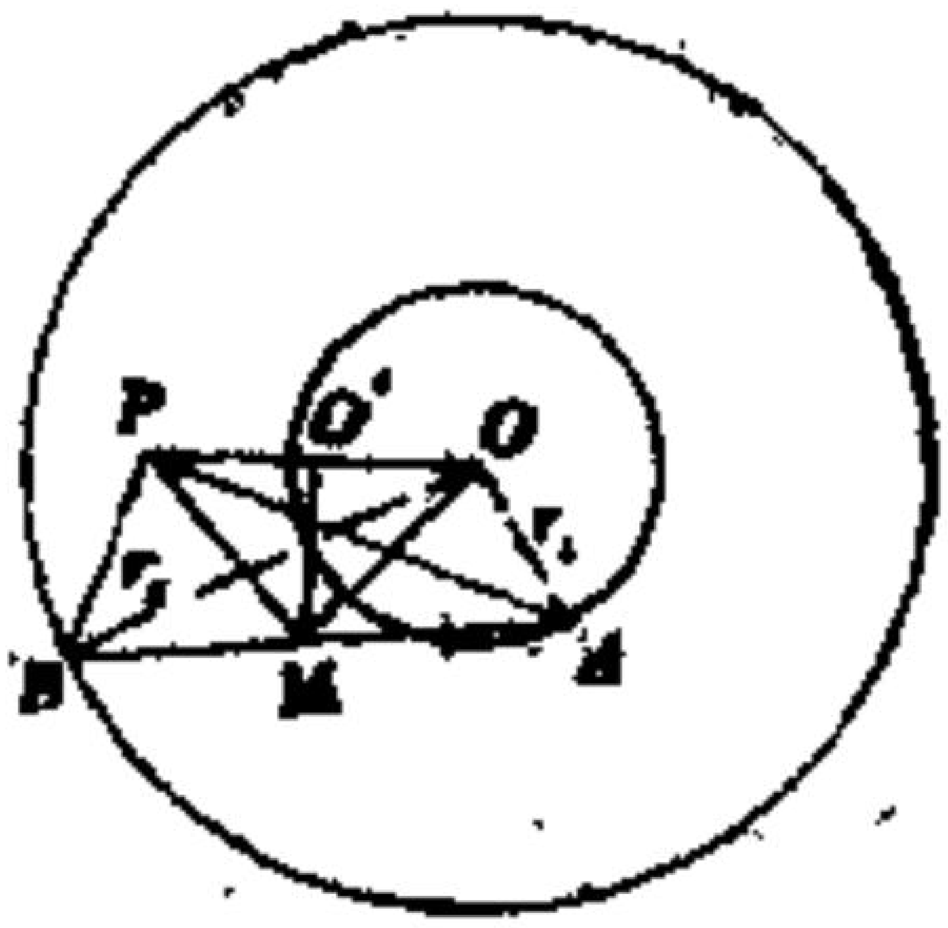


图22—28

在△AOB 中，OM 是 AB 上的中线．

$\therefore\quad 2(OM^2+AM^2)=OA^2+OB^2=r_1^2+r_2^2$，

$\because\quad PM=AM$，$\quad\therefore\quad OM^2+PM^2=\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2)$．

在△MOP 中，作 PO 的中线 MO'，有

$2(O'M^2+O'O^2)=OM^2+PM^2$，

$\therefore\quad O'M^2=\frac{1}{4}(r_1^2+r_2^2-OP^2)$，故

$O'M=\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2+r_2^2-OP^2}$ 为定长，则 M 点的轨迹为

$\odot O'\ (\frac{1}{2}\sqrt{r_1^2+r_2^2-OP^2})$．（证明略）

讨论：1° 当 $r_1^2+r_2^2>OP^2$ 时，轨迹是 $\odot O'$；

2° 当 $r_1^2+r_2^2=OP^2$ 时，轨迹为 O' 点；

3° 当 $r_1^2+r_2^2<OP^2$ 时，无轨迹

习 题 二 十 三

11. 设底边和高一定的三角形，求其外心的轨迹。

解答：由于该三角形底边有定长，及其高h为定线段，因而顶点A的轨迹在平行于BC的两直线l_1、l_2上，且与BC的距离为h。

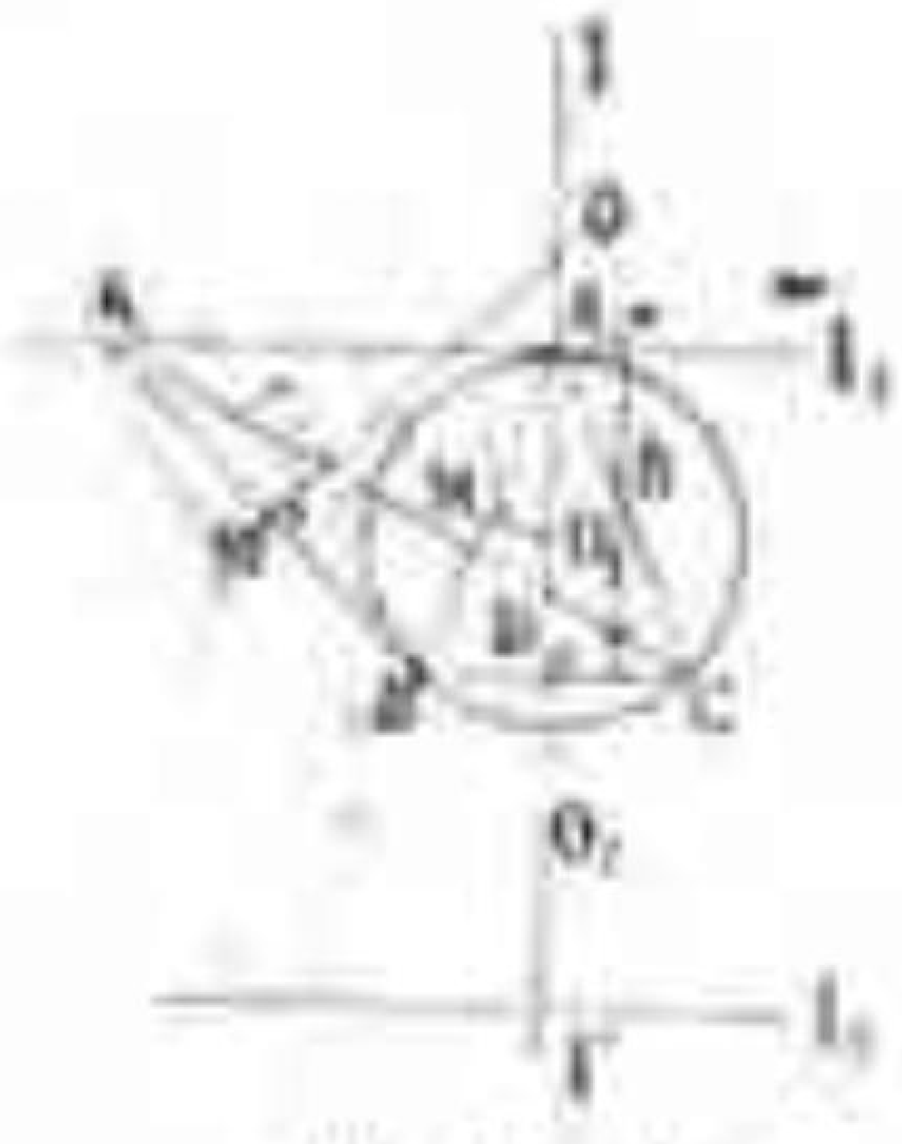


图23—11

当$\triangle A_1BC$为等腰三角形时，令其外心为O_1。当A点由A_1向左移动时，外心O在BC的中垂线上向下移动；当A点无限远移时，O点也向上无限远移，故其轨迹为以O_1为起点的射线l。当A点在l_2上移动时，O点自O_2起在BC的中垂线上无限远移，故外心的轨迹为BC中垂线上自O_1、O_2起的两射线l与l'。（证明略）

12. 设三角形有一角固定，这角的对边有定长，求三角形的（1）外心；（2）重心的轨迹。

解答（1），关于外心：当$\triangle ABC$为锐角三角形时，外心在$\angle\theta$的内部；当$\triangle ABC$为钝角三角形时，外心O在$\angle\theta$的外部。令BC有定长a，则$\odot ABC$有定半径$R=a/2\sin\theta$，知所求轨迹为一段圆弧。

在定角$\angle\theta$的两边取两点E、F使$AE=AF=a$．令AE、AF的中垂线交$\odot A(R)$于M、N，则$\overset{\frown}{MN}$为所求轨迹且M、N为临界点．（证明略）

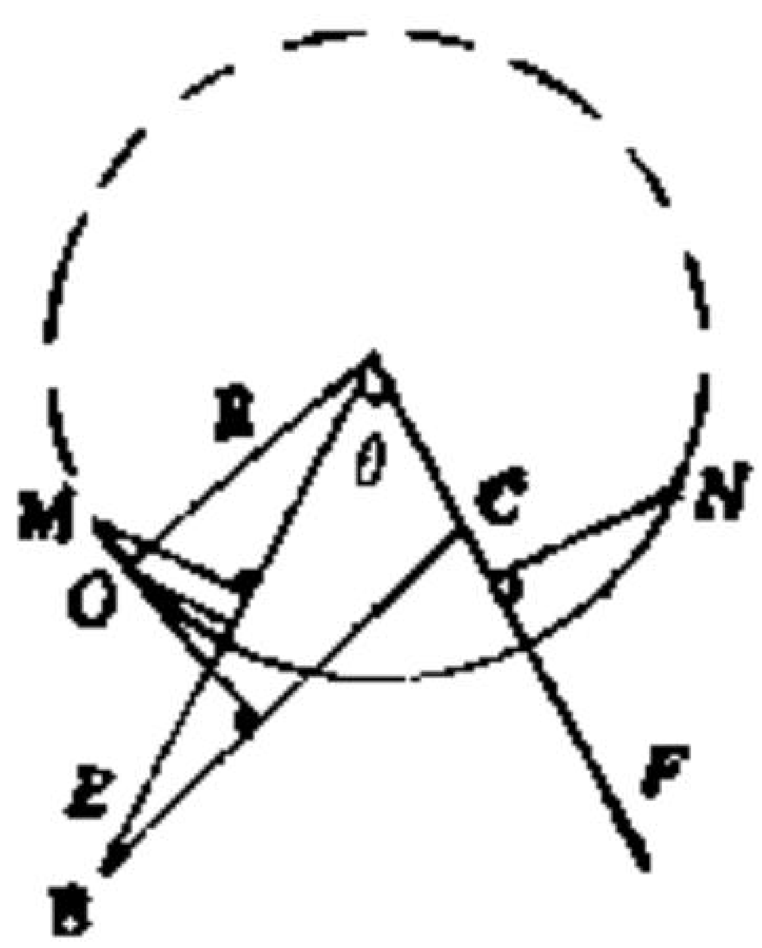


图23—12(1)

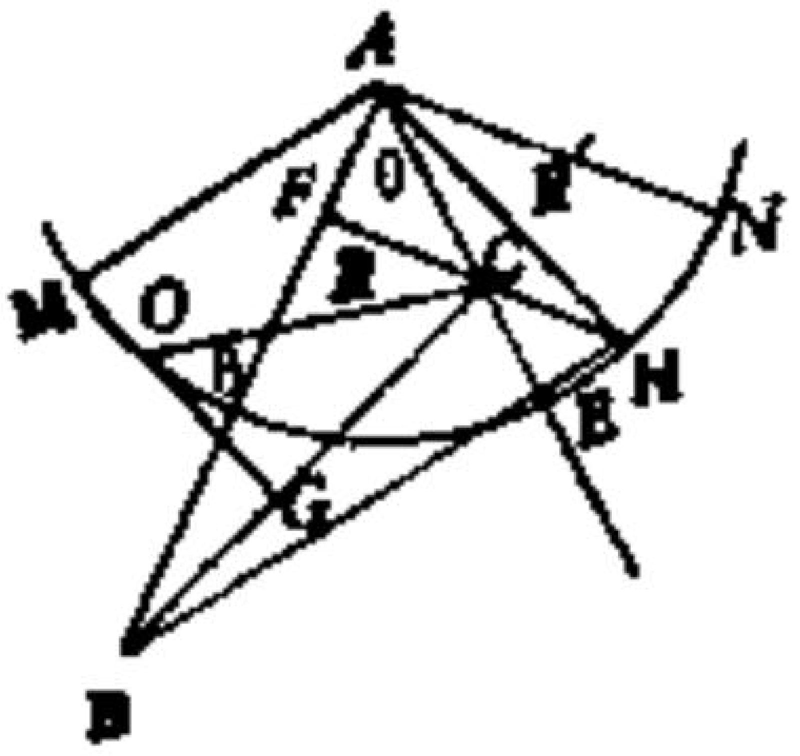


图23—12(2)

（2）：作垂心H与外心O，$OG\perp BC$于G

$\because\quad AH=2\cdot OG=2\cdot OC\cdot\cos\theta=2R\cos\theta$

$$=\frac{a}{\sin\theta}\cdot\cos\theta=a\cdot\text{ctg}\theta \text{ 为定长．}$$

故H点的轨迹在$\odot A(AH)$上．

当C点趋向于A时，$\triangle ABC$成极限情况，此时的$CF\perp AB$的极限位置为$NA\perp AB$，即N点是轨迹的极限位置；

当B点趋向于A时，$BE\perp AC$的极限位置为$MA\perp AC$，即M点是轨迹的极限位置．

故H点的轨迹为$\overset{\frown}{MN}$，M、N为临界点（证明略）．

13. 设三角形有一边固定，这边的对角等于定角，求三角形的（1）垂心；（2）九点圆心；（3）三个旁心的轨迹.

探求：(1) 当$\triangle ABC$为锐角三角形时，有A、F、H、E四点共圆. 故$\angle BHC$有定角$180^\circ-\angle A$; 当$\triangle ABC$为直角三角形时，B、C两点均为垂心；当$\triangle A'BC$为钝角三角形时，有$\angle BH'C=\angle BA'C$. 故H、B、H'、C四点共圆. 且此圆与$\odot ABC$大小相等，故垂心的轨迹可能是$\overset{\frown}{b_1Hc_1}$，$b_1$、$c_1$为临界点.

证明略. 当A点在BC下方时，优弧$\overset{\frown}{b_2c_2}$亦为垂心H的轨迹.

讨论：当$\angle A=90^\circ$时，垂心的轨迹为以BC为直径的圆；

当$\angle A$为钝角时，垂心的轨迹为以BC为弦、内接角等于$180^\circ-\angle A$的两圆弧，B、C两点为临界点.

(2) 因为$\triangle ABC$的九点圆心K在外心O和垂心H的中点，且九点圆的半径为外接圆半径r的一半，并恒过BC边的中点M，故$MK=\frac{1}{2}r$. 因而K的轨迹可能是$\odot M(\frac{1}{2}r)$的一段弧，其端点为Ob_1、Ob_2的中点K_1、K_2. 即$\overset{\frown}{K_1KK_2}$；当$A$点在$BC$下方时有类似情况，故$K$点的轨迹实际上就是

$\odot M\left(\frac{1}{2}r\right)$.

证明略.

(3) ∵ I、I_A、B、C，I、I_B、C、A，I、I_C、A、B均四点共圆．由习题二第21题有

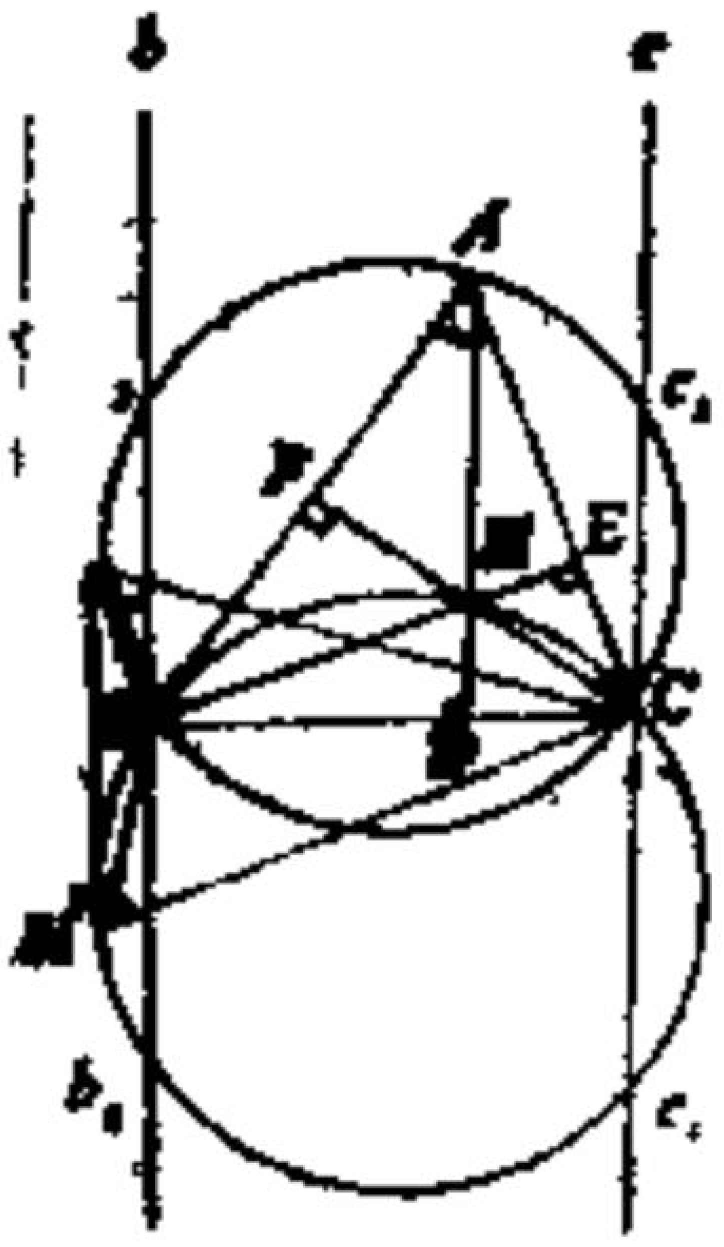


图23—13(1)

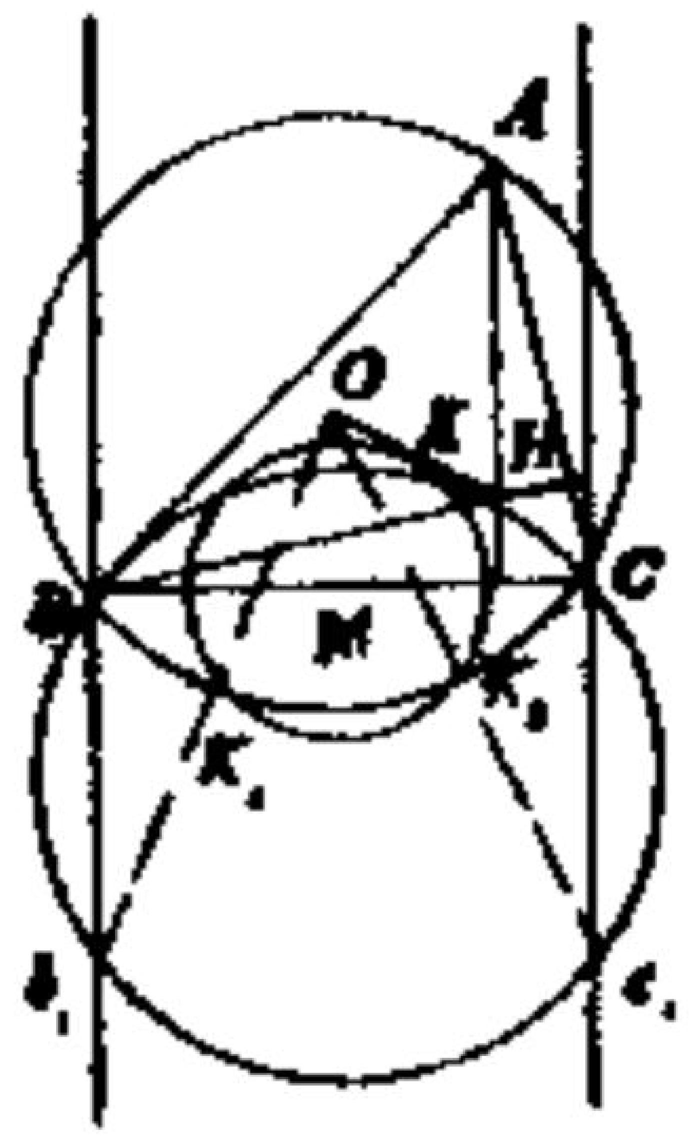


图23—13(2)

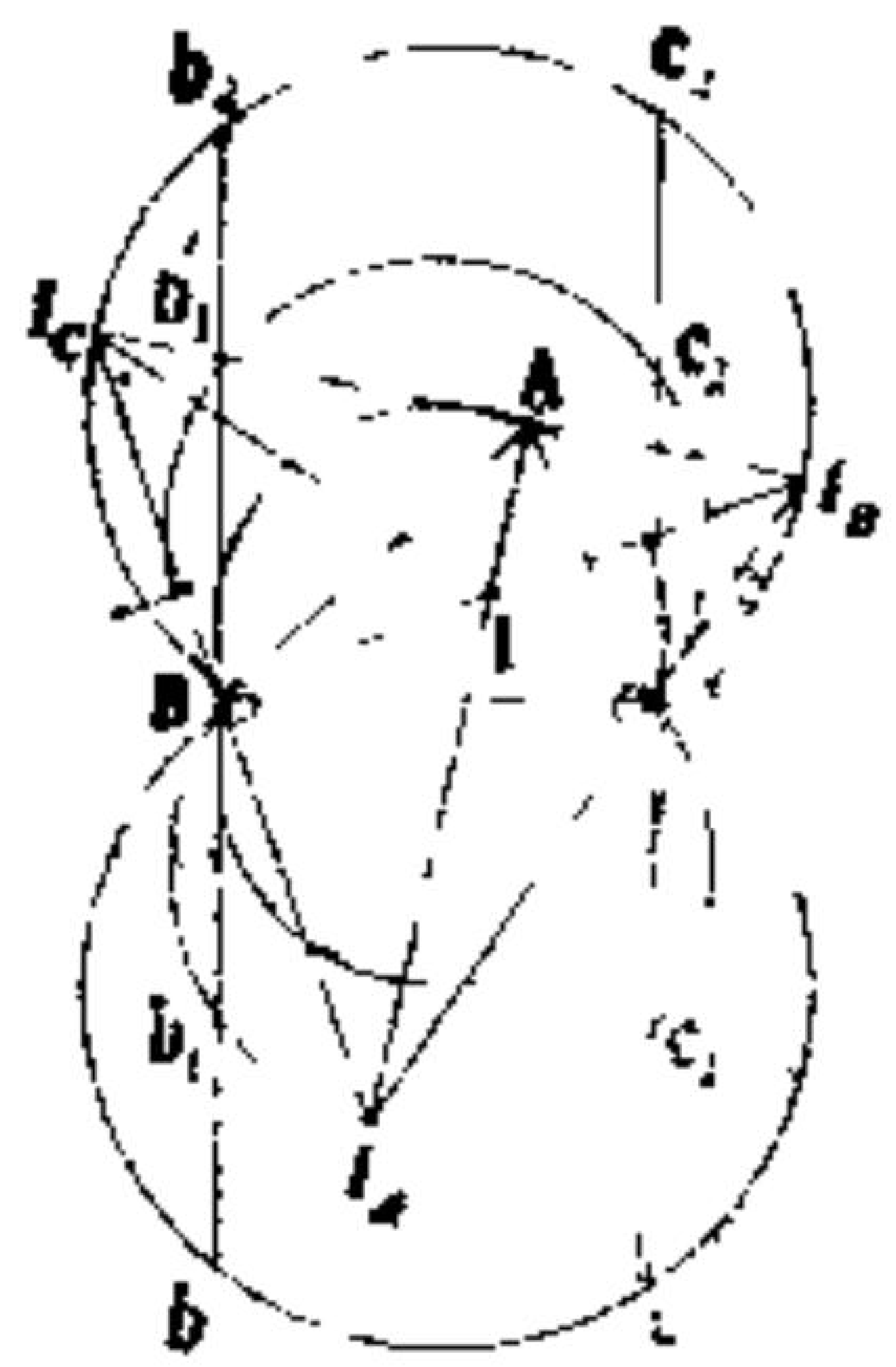


图23—13(3)

$$\angle BI_AC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A、\angle BI_BC=\angle BI_CC=\frac{1}{2}\angle A.$$

都均为定角，故其迹轨可能为有关弓形弧．

由于$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的外角均小于180°．故$\angle I_ABC$、$\angle I_ACB$、$\angle I_BBC$、$\angle I_CBC$均小于90°．

∴ I_A，I_B、I_C的轨迹可能是$\overset{\frown}{b_1C_1}$、$\overset{\frown}{b_2C}$、$\overset{\frown}{C_2B}$.

当A点在BC下方时，其有关轨迹可能是$\overset{\frown}{b_1'C_1'}$、$\overset{\frown}{b_2'C}$、$\overset{\frown}{c_2'B}$.所有端点均为临界点．（证明略）

14. 一三角形内接于定圆且有一边固定，求这三角形的三个旁心的轨迹.

探求：当A点在BC的上方时，其轨迹如上题（3）；当A点在BC下方时有

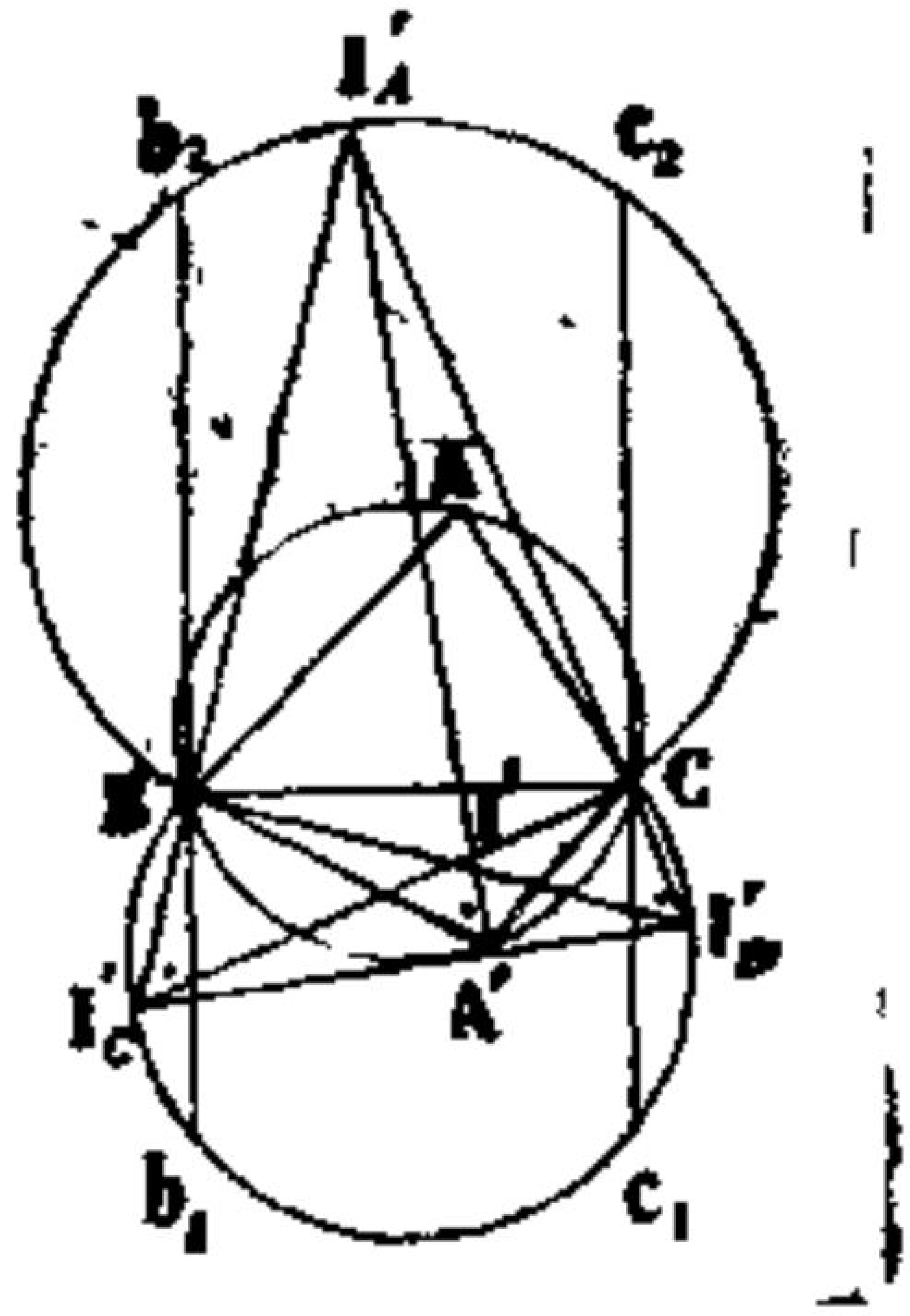


图23—14

$$\angle BI_A'C=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A'$$

$$=90^\circ-\frac{1}{2}(\pi-\angle A)$$

$$=\frac{1}{2}\angle A.$$

$$\angle BI_B'C=\angle BI_C'C=\frac{1}{2}\angle A'$$

$$=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A.$$

故I_A'、I_B'、I_C'的轨迹可能是$\overset{\frown}{b_2c_2}$、$\overset{\frown}{b_1C}$、$\overset{\frown}{c_1B}$.（证明略）

与上题（3）合起来得I_A的轨迹为$\overset{\frown}{b_1c_1}$、$\overset{\frown}{b_2c_2}$；I_B的轨迹为$\overset{\frown}{b_2C}$、$\overset{\frown}{b_1C}$；I_C的轨迹为$\overset{\frown}{c_2B}$、$\overset{\frown}{c_1B}$.

15. 设三角形有一边固定，他两边之比为常数，求这三角形的重心的轨迹.

探求：由例题64知，设固定的一边为BC，则A点的轨迹为一圆，其直径PQ在BC直线上且P、Q两点为合乎所给常数k关于BC的内、外分点.

令D是BC的中点，G是$\triangle ABC$的重心，过G作$GE\parallel AB$，$GF\parallel AC$，有

$$\frac{DG}{GA}=\frac{DE}{EB}=\frac{DF}{FC}=\frac{1}{2},\ \frac{GE}{AB}=\frac{DG}{DA}=\frac{GF}{AC}.$$

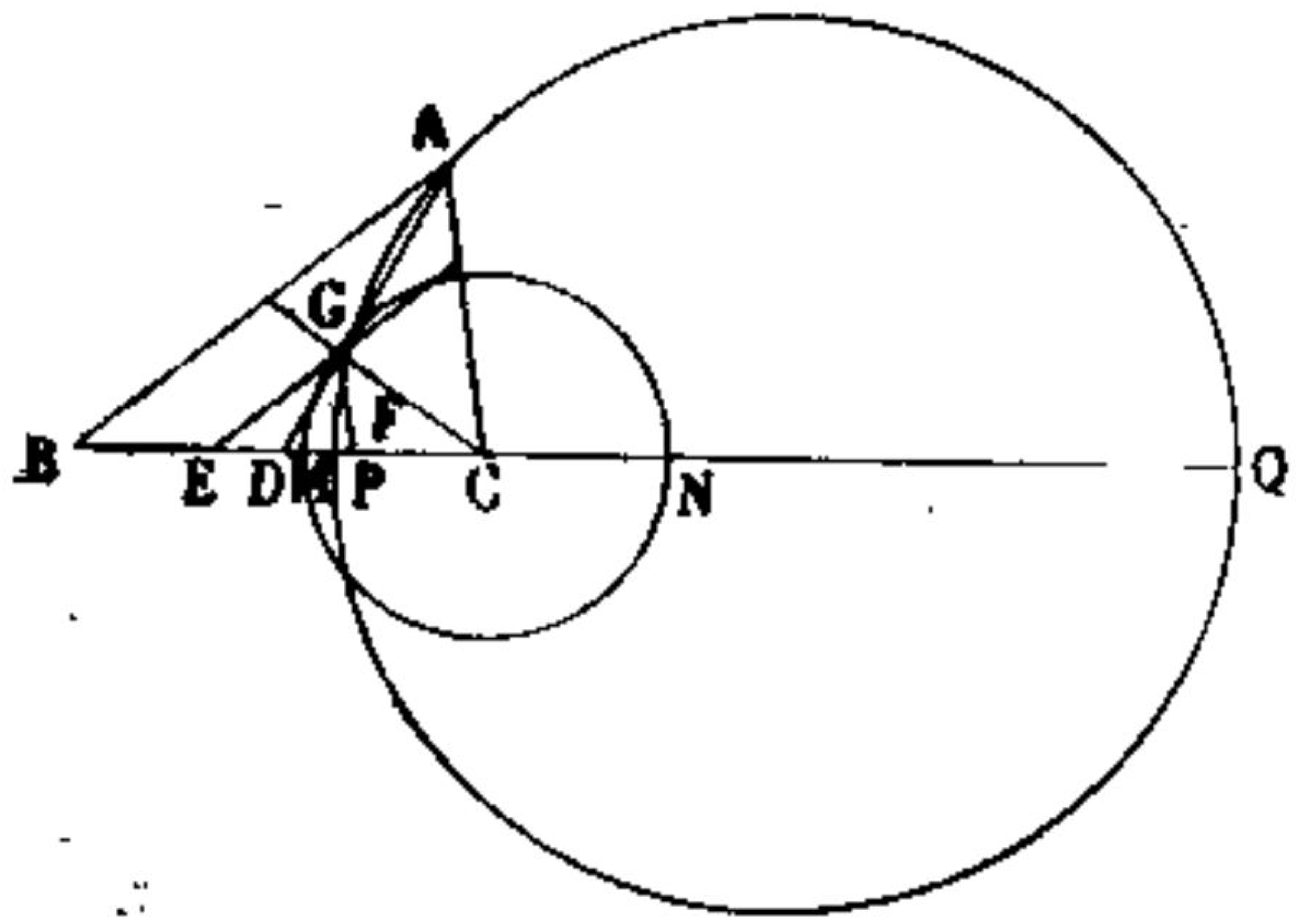


图23—15

故 E、F 为定点，且 $\frac{GE}{GF}=\frac{AB}{AC}=k$ 因而 G 点的轨迹可能是一圆．

令 M、N 为 $\angle EGF$ 在 BC 上的内、外分点，则以 MN 为直径的圆可能是 G 点的轨迹，M、N 两点为极限点．（证明略）

16．设 AB 是圆⊙O 的定直径，P 是这圆上的动点，引 $PQ\perp AB$ 于 Q，求△OPQ 内心的轨迹．

探求：当 P 点在 $\overset{\frown}{MB}$ 上时，有 $\triangle BIO\cong\triangle PIO$．

$\therefore\ \angle BIO=\angle PIO=135°$

由于 O、B 均系定点，故 I 点的轨迹可能是 $\overset{\frown}{OIB}$，当 P 在 $\overset{\frown}{BN}$、$\overset{\frown}{AM}$、$\overset{\frown}{AN}$ 上时，亦有类似结果．（证明略）

故 P 点的轨迹为四个弓形弧 $\overset{\frown}{AO}$、$\overset{\frown}{BO}$．其内接角均为

135°，A、O、B三点为临界点．

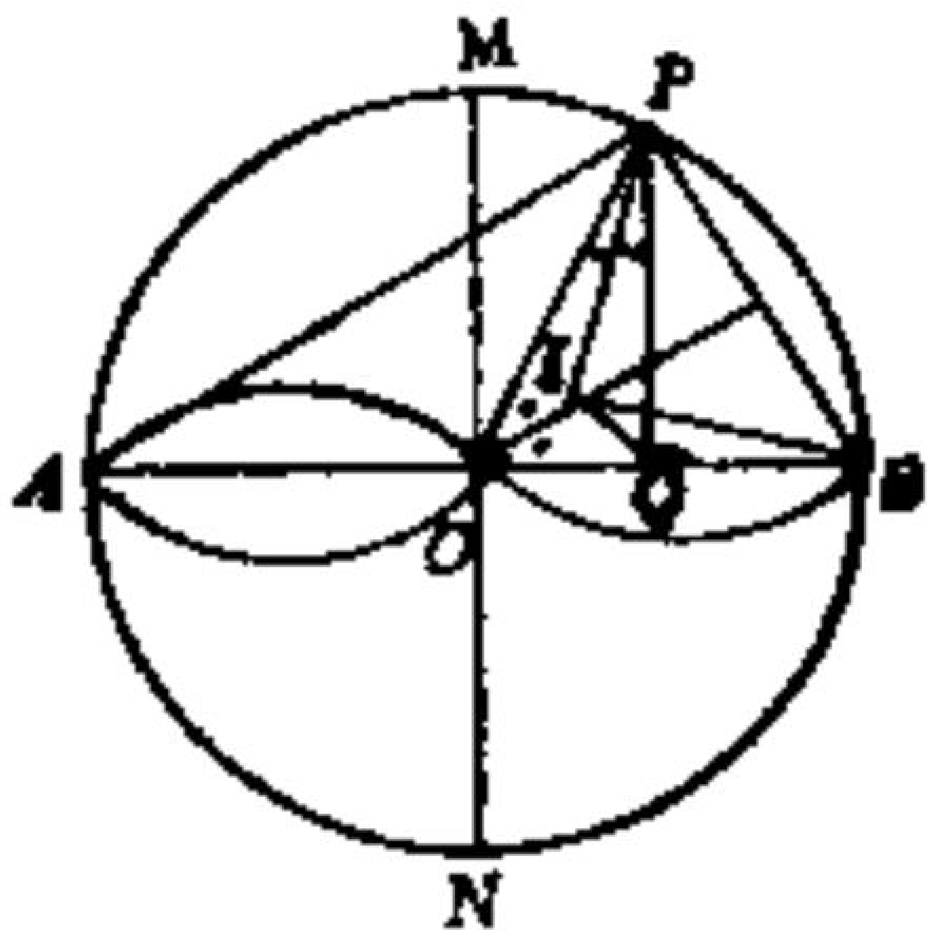


图23—16

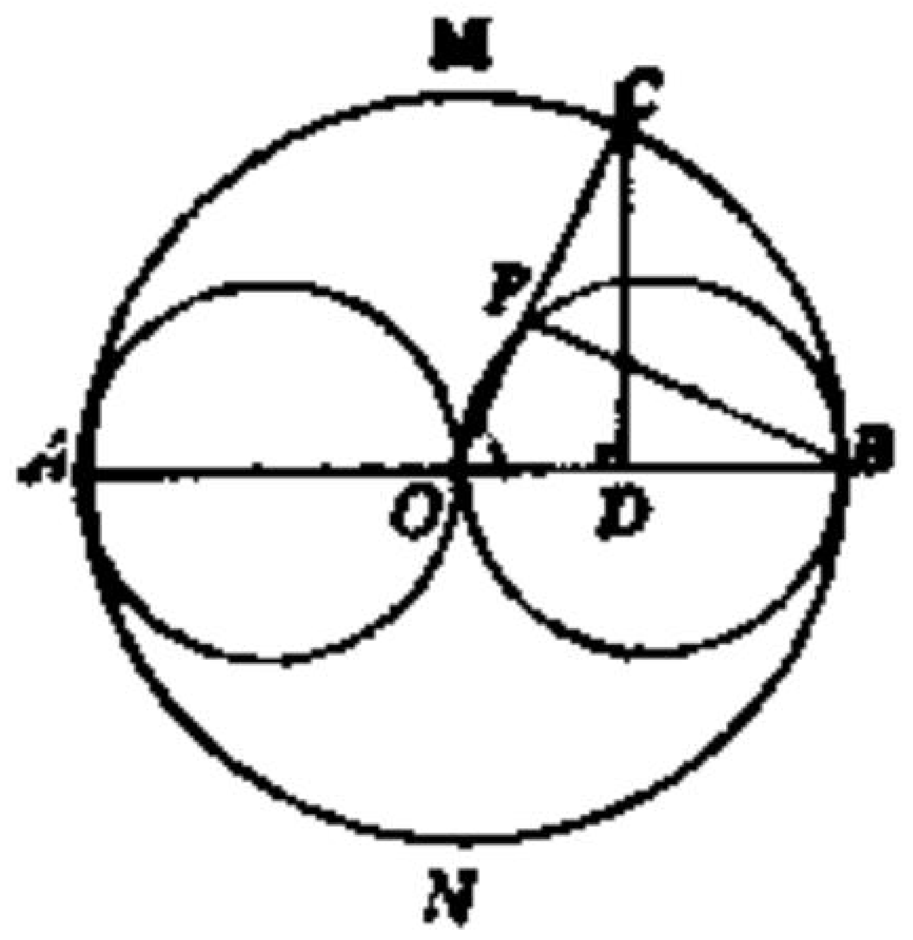


图23—17

17．设 AB 是定圆⊙O 的定直径，C 是这圆上的动点，引 $CD \perp AB$ 于 D，并在线节 OC 上截 $OP=OD$，求 P 点的轨迹．

探求：当 C 在 $\overset{\frown}{MB}$ 上时，有△OPB≌△ODC．

∴ $\angle OPB=\angle ODC=90°$．故 P 点在以 OB 为直径的圆上．

当 C 点重合于 M、B 时，P 点亦与 M、B 重合．故 P 点的轨迹可能是以 OB、OA 为直径的两圆．（证明略）

18．设 AB 是定圆的定直径，AC 是动弦，若

(1) 延长 AC 至 P，使 $CP=BP$，求 P 点的轨迹；

(2) 在半线 CA 上截 $CQ=CB$，求 Q 点的轨迹；

(3) 在半线 AC 上截 $AR=BC$，求 R 点的轨迹；

(4) 延长 CA 至 S，使 $AS=BC$，求 S 点的轨迹．

解：(1)，因AB为直径，故△PBC为等腰直角三角形，∴∠APB=45°。

当C点与A点重合时，为AC的极限位置，此时P点与D点重合，故P点的轨迹可能为$\widehat{BD}$。当AC在AB下方时，P点的轨迹为弧$\widehat{BE}$，（证明略）即P点的轨迹为两弓形弧$\widehat{BD}$与$\widehat{BE}$，其内接角为45°。

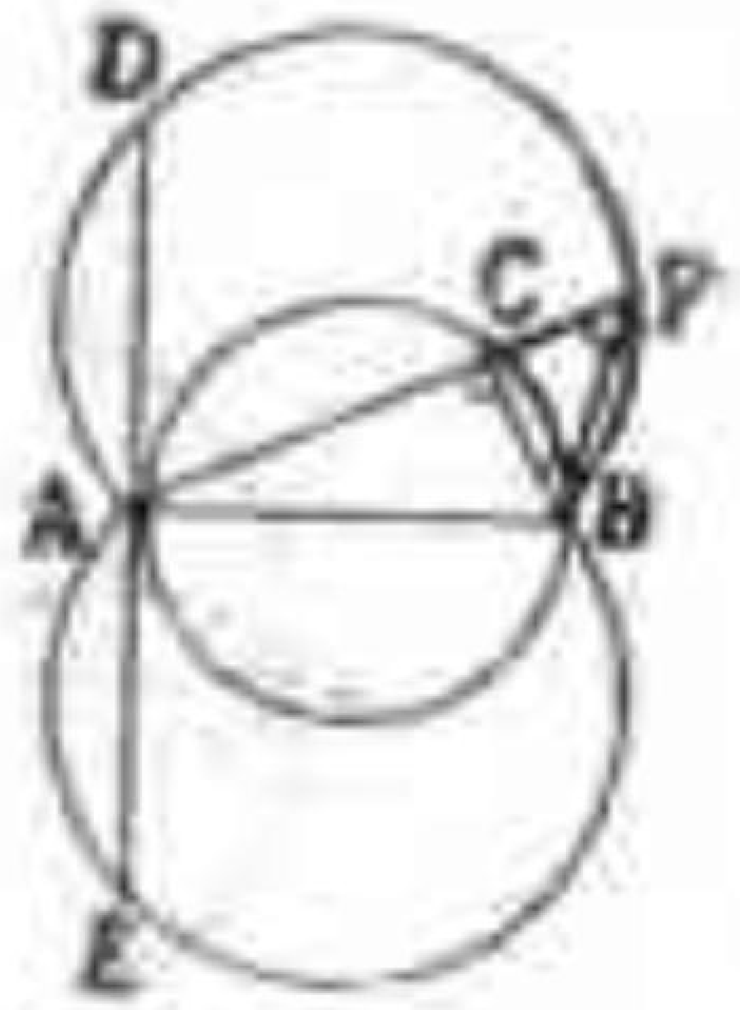


图23—18(1)

(2)，因AB为直径，当C，C'分别在$\widehat{MB}$，$\widehat{MA}$上时，△CQB与△C'Q'B均为等腰直角三角形，故∠AQB=135°

∠AQ'B=45°

当C点与A点重合时，为AC的极限位置，此时Q点与A点重合，故Q点的轨迹可能是以N、M为圆心，NA、MA为半径画的圆的两弧$\widehat{BAE}$，$\widehat{BAF}$，M、N为$\widehat{AB}$的中点。（证明略）

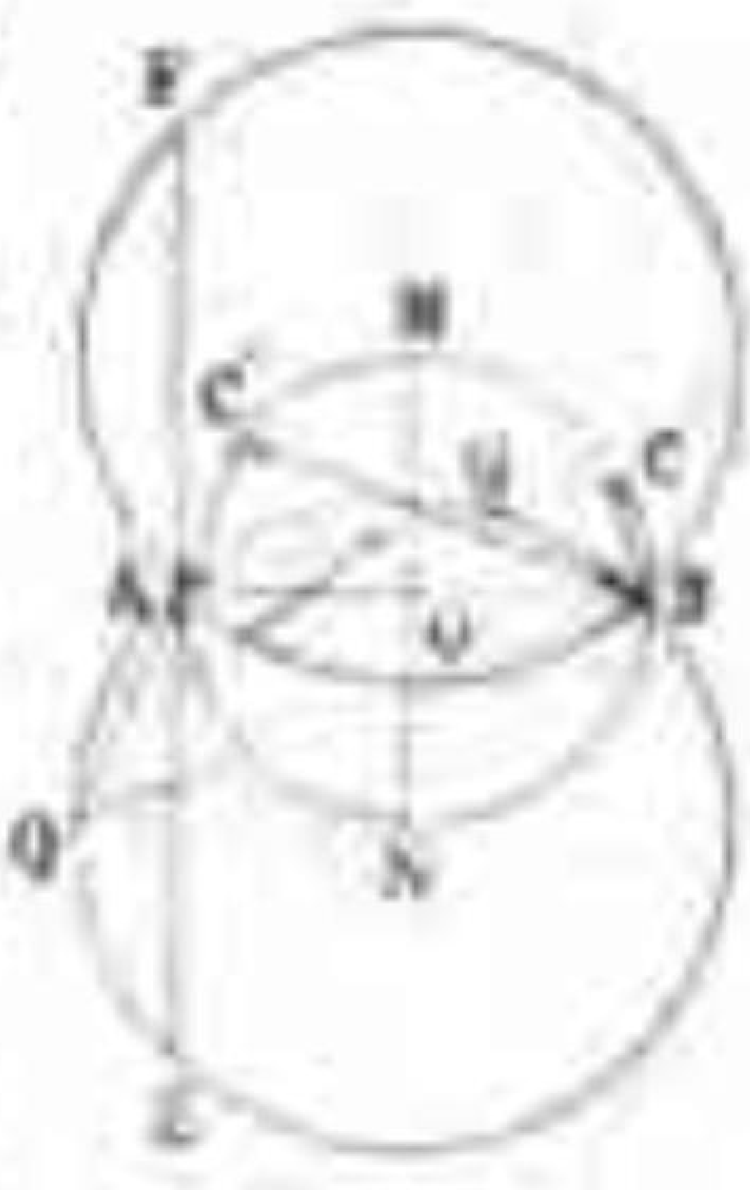


图23—18(2)

(3)，当C在B点时，R与B点重合；当C在$\widehat{AB}$的中点M时，R与M重合；当C点与A点重合时为AC的极限位置，此时R在F点且AF=AB。

当C、C'在$\widehat{BM}$、$\widehat{MA}$上时，有

△ARF≌△BCA，△$AR'F$≌△$BC'A$，

∴ ∠ARF=∠BCA=90°，

∠$AR'F$=∠$BC'A$=90°。

故R、R'在AF为直径的半圆上。

∴ R点的轨迹可能是以AF、AE为直径的两半圆的两弧$\widehat{AMF}$与$\widehat{ANE}$。（证明略）

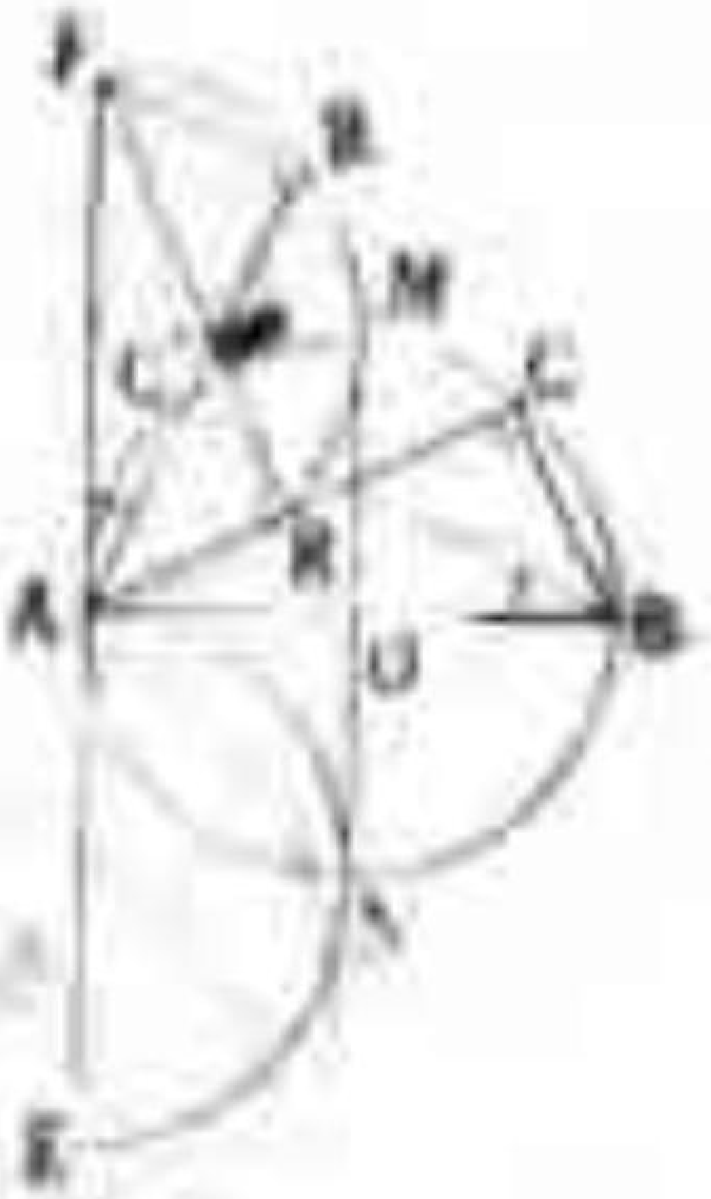


图21—18(3)

(4)、当C在B点时，S与A点重合，当C点与A点重合时为CA的极限位置，此时S在E点，且$AE=AB$。

当C在$\widehat{BMA}$上时，有

△ASE≌△BCA，

∴ ∠ASE=∠BCA=90°，

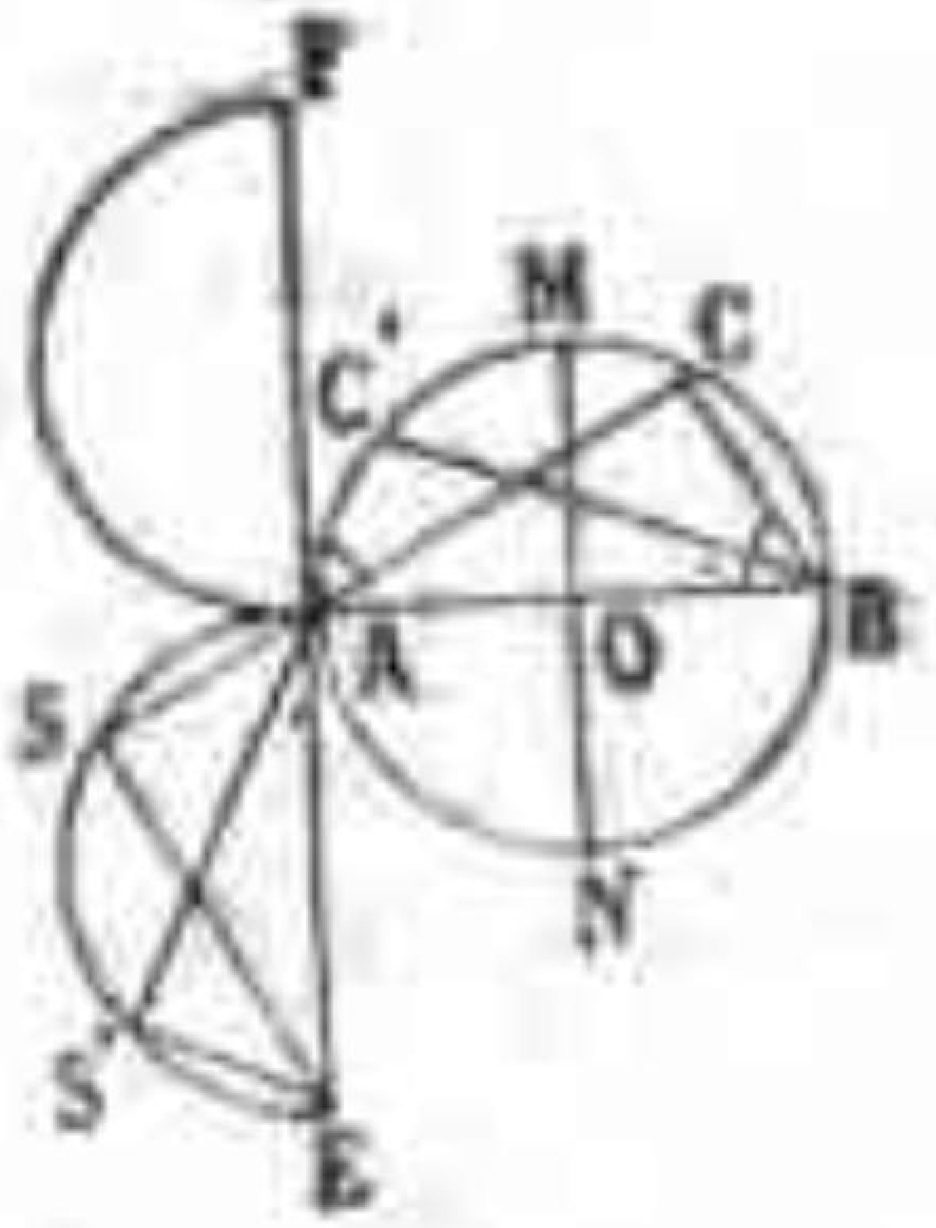


图21—18(4)

故S在AE为直径的半圆上。

∴ S点的轨迹可能是以AE、AF为直径的两半圆的两弧，$\widehat{ASE}$与$\widehat{AF}$。（证明略）

19、设△ABC内接于定圆且BC边固定，求AC边的中点在AB直线上的射影的轨迹。

探求：N是AC的中点，N、C两点在AB上的射影为P、D，当A点在⊙O上运动时，D点的轨迹为以BC为直

径的圆，其圆心为 BC 的中点M.

由于P是 AD 的中点，由习题二十一第17题知P点的轨迹为一圆，其圆心为 OM 的中点 O'，半径为 $O'B$.

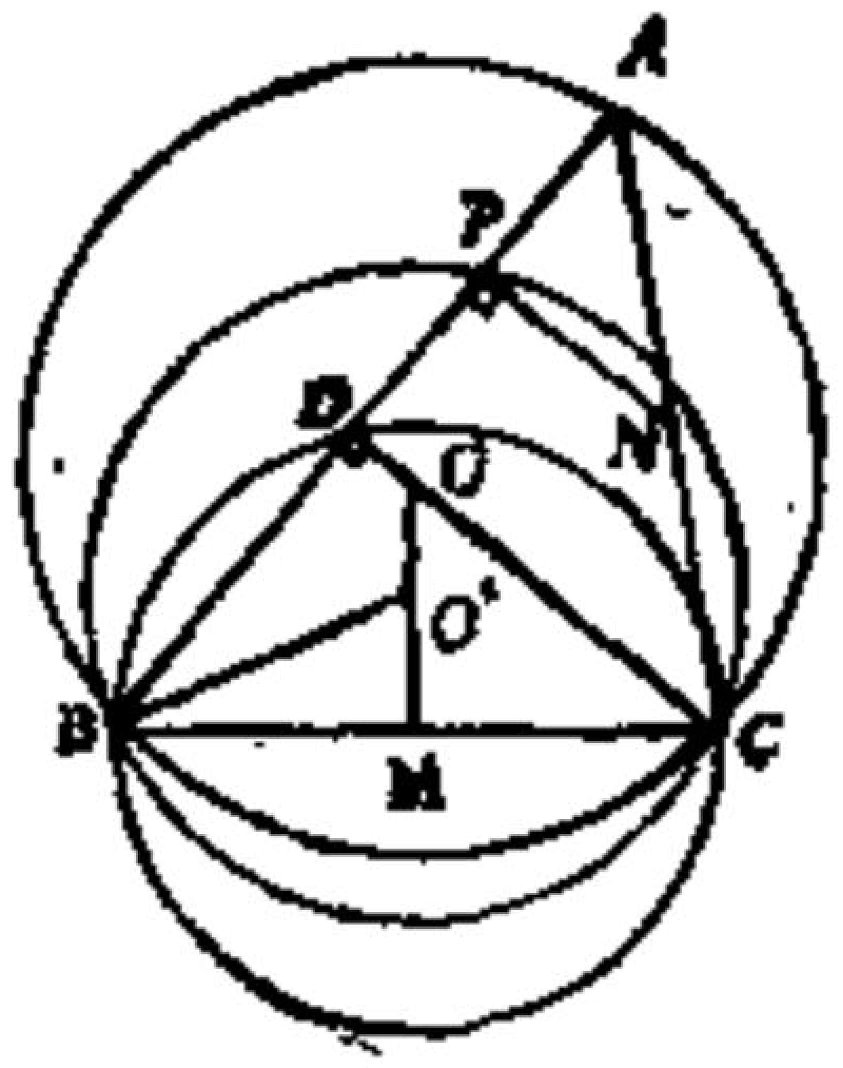


图23—19

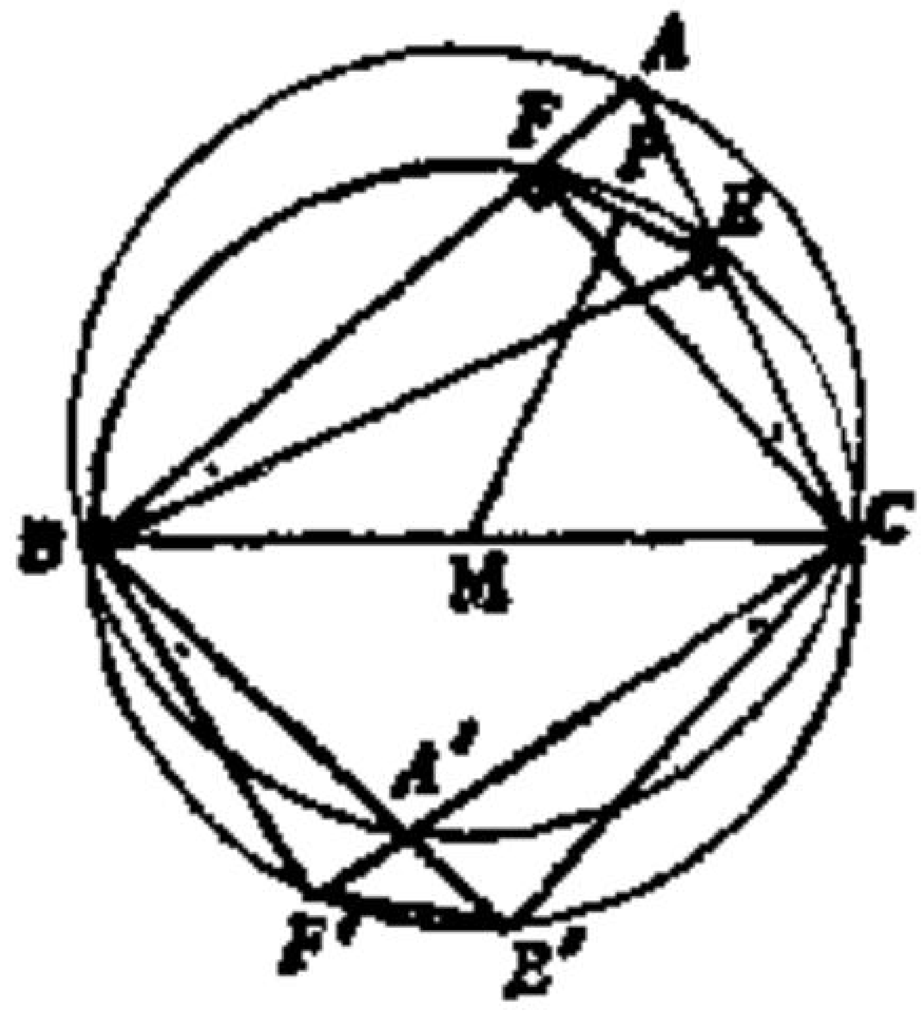


图23—20

20. 设△ABC 内接于定圆且 BC 边固定，引 $BE\perp AC$ 于 E，$CF\perp AB$ 于 F，求线段 EF 的中点的轨迹.

探求：令 BC 弦的中点为M. 当A在定圆上运动时，恒有 B、C、E、F 四点共圆，其直径为 BC，圆心为 BC 的中点M.

由于$\angle FBE=\angle FCE=90^\circ-\angle A$

∴ EF 有定长，故 MP 亦有定长，即 EF 的中点P的轨迹可能是以M为圆心，MP 为半径的圆.（证明略）

21. 设△ABC 内接于定圆且 BC 边固定，在半线 BA上截 $BM=m$，又在半线 CA 上截 $CN=n$，m、n都是定线段，求线段 MN 的中点的轨迹.

探求：令以B为圆心，BM 为半径的圆截 BC 于M_1，截过B点的切线于 b_1、b_2；以C为圆心，CN 为半径的圆截 BC 于 N_1，截过C点的切线于 c_1、c_2.

又D、P、P'、E、E'分别为BC、MN、$M'N'$、BN、BN'的中点，于是有：

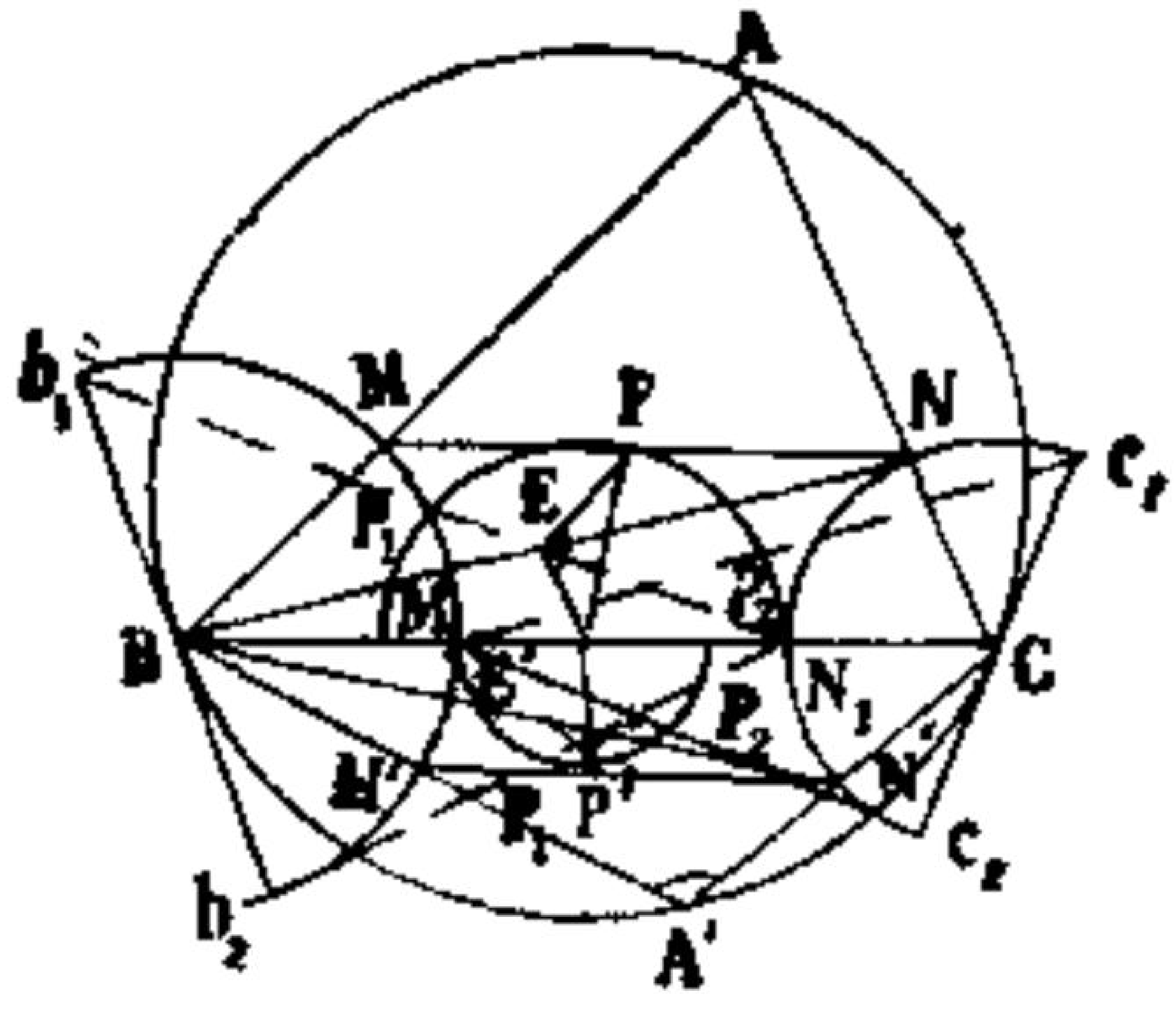


图23—21

$$PE=P'E'=\frac{1}{2}m,$$

$$DE=DE'=\frac{1}{2}n.$$

且$\angle PED=\angle A'$，$\angle P'E'D=\angle A$.

故PD、$P'D$均有定长且D为定点，因而P点的轨迹可能在以D为圆心，DP为半径的半圆上；P'点的轨迹可能在以D为圆心，DP'为半径的半圆上.

由于当A点与B、C两点重合时，BA、CA均为极限状态，故P点的轨迹可能是$\overset{\frown}{P_1P_2}$与$\overset{\frown}{P_1'P_2'}$.

P_1、P_2、P_1'、P_2'为b_1N_1、c_1M_1、b_2N_1、c_2M_1的中点.（证明略）

22．$\triangle ABC$固定，M、N各是半线BA、CA上的点，P是线段MN上的点，若这三点适合条件$MP=MB$且$NP=NC$，求P点的轨迹.

探求：令I是$\triangle ABC$的内心，过I作$DE\parallel BC$.

则有　$DI=DB$，$EI=EC$.

故点I是合乎条件的点.

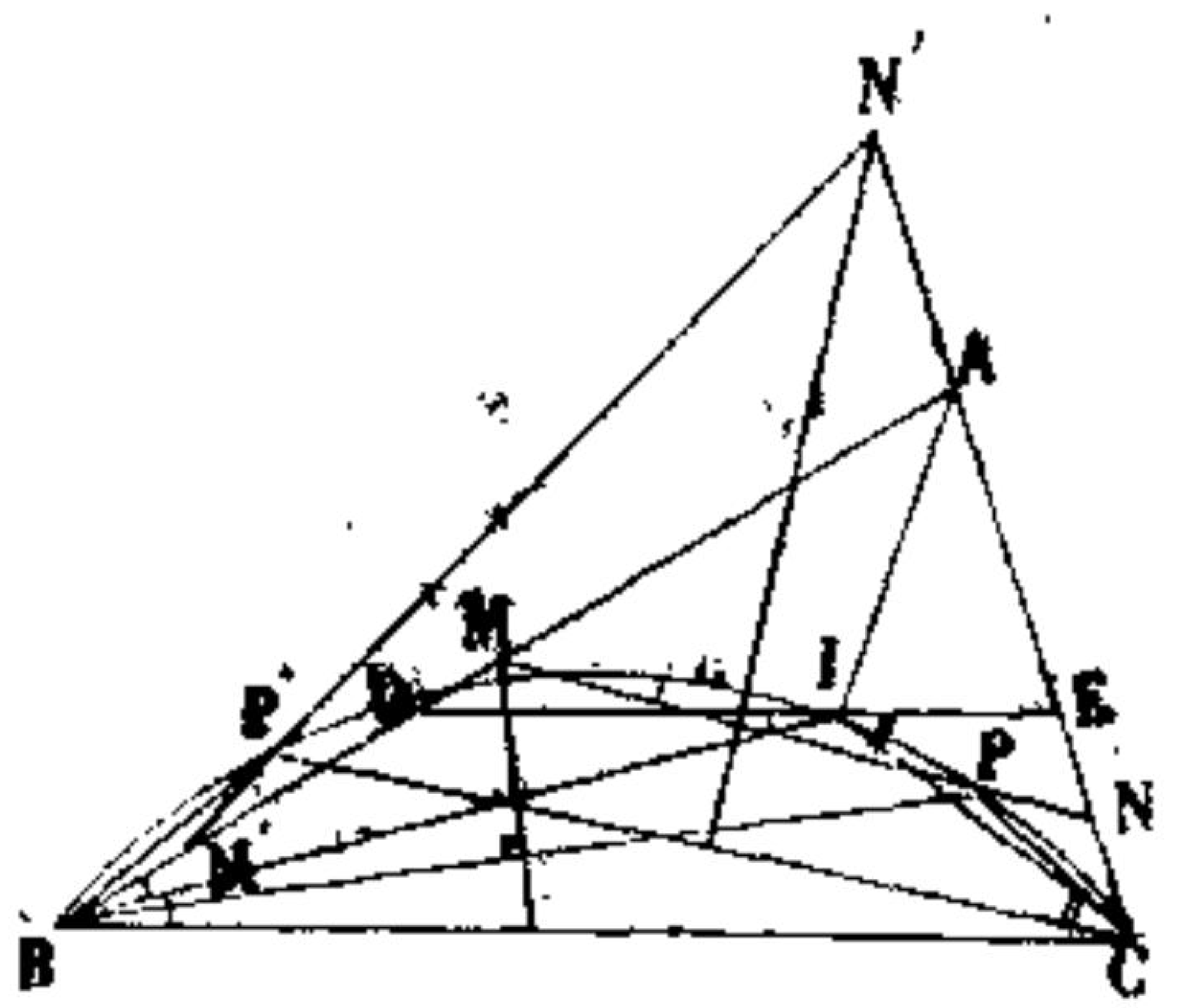


图23—22

当M点重合于B时，则P点也重合于B，N在BC边的中垂线与CA的交点；当N点重合于C时，则P点也重合于C，M在BC边的中垂线与BA的交点．故B、C两点也合乎条件．且由习题二第21题知$\angle BIC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$，为定角，故$P$点的轨迹可能是以$BC$为弦，内接角为$90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$的弓形弧$\overset{\frown}{BIC}$.

取$\overset{\frown}{BIC}$上两点P，P'．并作PB、PC、$P'B$、$P'C$的中垂线使分别交BA、CA于M、N，M'、N'连PM、PN、$P'M'$、$F'N'$，有

$$
\begin{aligned}
&\angle BPC+\angle BPM+\angle CPN\\
&=(90^\circ+\tfrac{1}{2}\angle A)+\angle PBM+\angle PCN\\
&=(90^\circ+\tfrac{1}{2}\angle A)+(\angle B-\angle PBC)+(\angle C-\angle PCB)\\
&=180^\circ.
\end{aligned}
$$

及 $\angle M'P'C+\angle N'P'C=(\angle BP'C-\angle BP'M')$

$+\angle N'CP'=\angle BP'C-\angle M'BP'+\angle N'CP'$

$=(90^\circ+\frac{1}{2}\angle A)-(\angle P'BC-\angle B)+(\angle C-\angle P'CB)$

$=180^\circ$.

故M、P、N及M'、P'、N'均三点共线，即P、P'均合乎条件．因而P点的轨迹可能是$\overset{\frown}{BIC}$．(证明略)

23．已知一定圆和圆外一定点，过这定点作等于定圆的圆，求所作圆与定圆的公弦的中点轨迹．

探求：因两圆有相等的半径r．

故AB与OO'的交点G为OO'的中点，取OP的中点M．则$MG=\frac{1}{2}r$为定长，由于G总在$\odot O$的内部，故G点的轨迹可能为$\odot M(\frac{1}{2}r)$的弧$\overset{\frown}{RS}$．R、S两点为$\odot M$与$\odot O$的交点．(证明略)

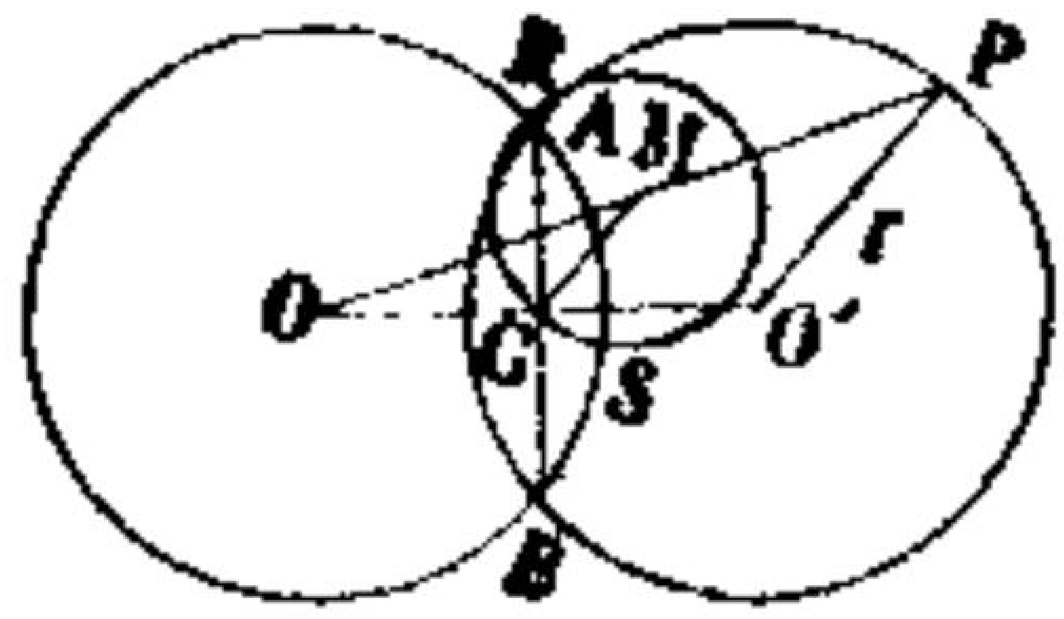


图23—23

讨论：1° 当$OP=3r$时，轨迹为弧立点；

2° 当$OP>3r$时，无轨迹．

24．一已知圆绕其周上一定点旋转，按一定的方向作动圆的切线，求切点的轨迹．

探求：设所给一定方向是水平的，过圆上定点P作互相垂直的两直线．使其方向平行与垂直定向直线，取其上四点O_1、O_2、O_3、O_4使$PO_1=PO_2=PO_3=PO_4=r$．当$\odot O$绕P点旋转至$\odot O_1$、$\odot O_2$时，其切点为P、T_1、T_2、T_3．且有$O_1T_1=O_1P=O_1T_2$．

又对于$\odot O$上的切点T有$OT\mathrel{\underline{\parallel}}PO_1=r$．

$\therefore \quad O_1T=PO=r$.

故切点 T 的轨迹可能是两圆 $\odot O_1(r)$、$\odot O_3(r)$.（证明略）

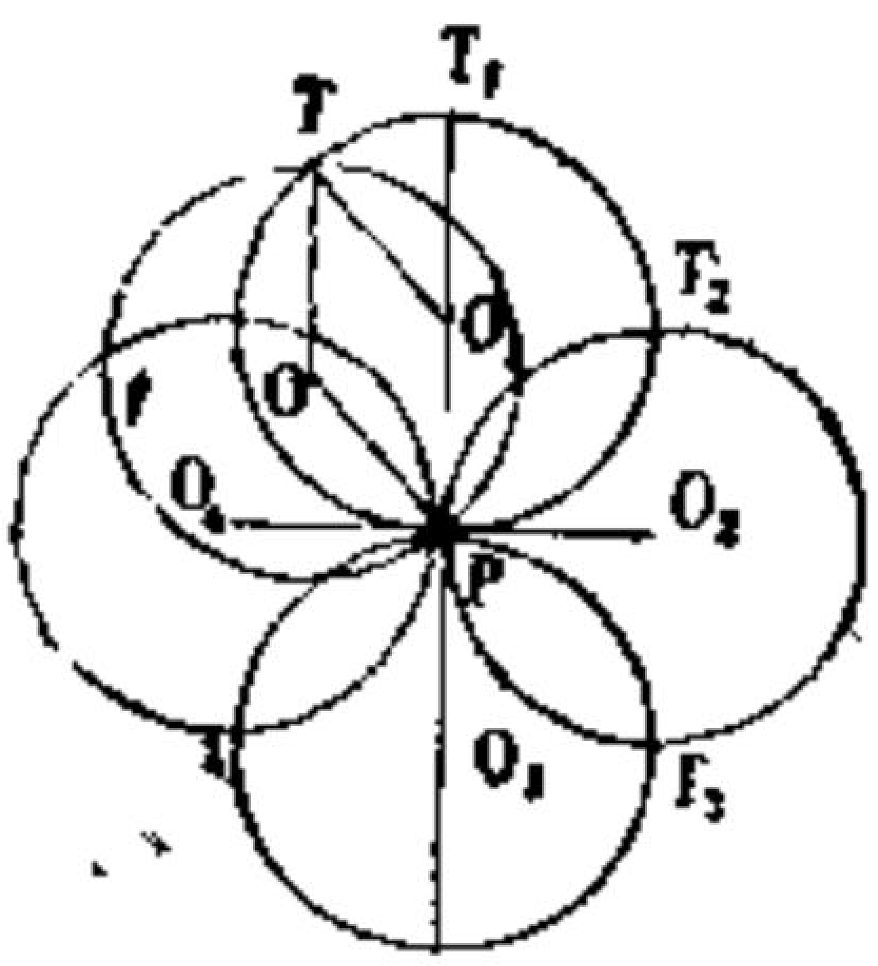


图23—24

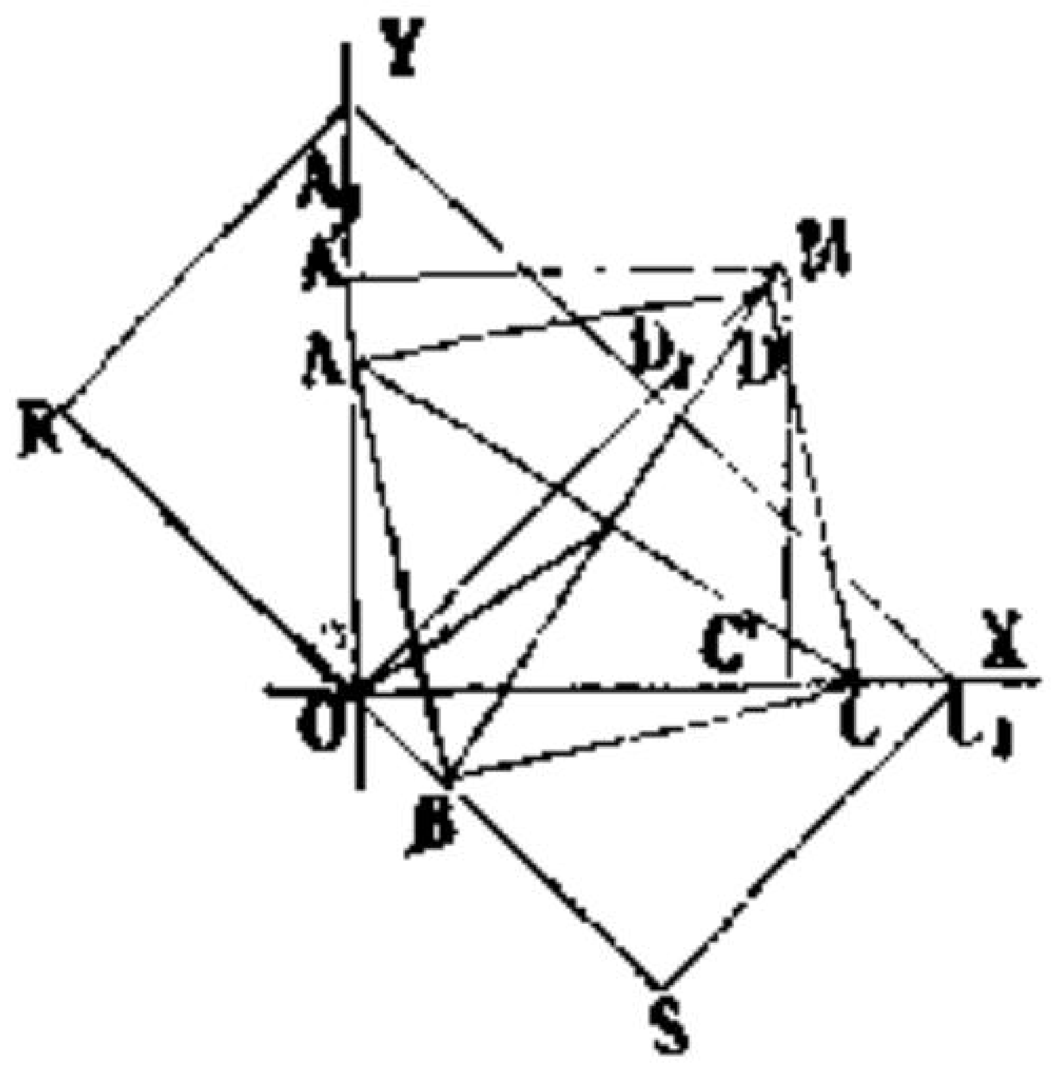


图23—25

25．设一已知大小的正方形有一双对顶点分别着于定直角的两边上而移动，求另一双对顶点的轨迹．

探求：设正方形 $ABCD$ 为已知边长为 a 的正方形，当 B 点与 O 点重合时，A、C、D 在 A'、C'、M；M 在 $\angle YOX$ 的内角平分线上；当 A 点与 O 点重合时，C 点在 C_1，B、D 两点位于 $\angle YOX$ 的外、内角平分线上的 S、D_1 处；当 C 点与 O 点重合时，A 点在 A_1，D 点在 D_1，B 点位于 $\angle YOX$ 外角平分线上的 R 处．

由于 A、C、D、O、B 五点共圆，有

$\angle DOC=\angle DAC=45^\circ$，$\angle BOC=\angle BAC=45^\circ$．

故 D、B 在 $\angle YOX$ 的内、外角平分线上．

又　$OD<NO+ND=NB+ND=BD$，故 D 点的轨迹可能是 $\angle YOX$ 内角平分线上的线段 D_1M；B 点的轨迹可能是 $\angle YOX$ 外角平分线上的线段 RS.（证明略）

26. 设一平行四边形各顶点顺序落在一个定四边形的四边上，且前者的边分别平行于后者的两对角线，求平行四边形的中心的轨迹.

探求：令定四边形 $EFGH$ 两对角线的中点为 M、N. 取□$ABCD$ 为顶点在各边中点的平行四边形，其中心 O 在 AC 的中点，且 O 点亦为□$AMCN$ 的中心.

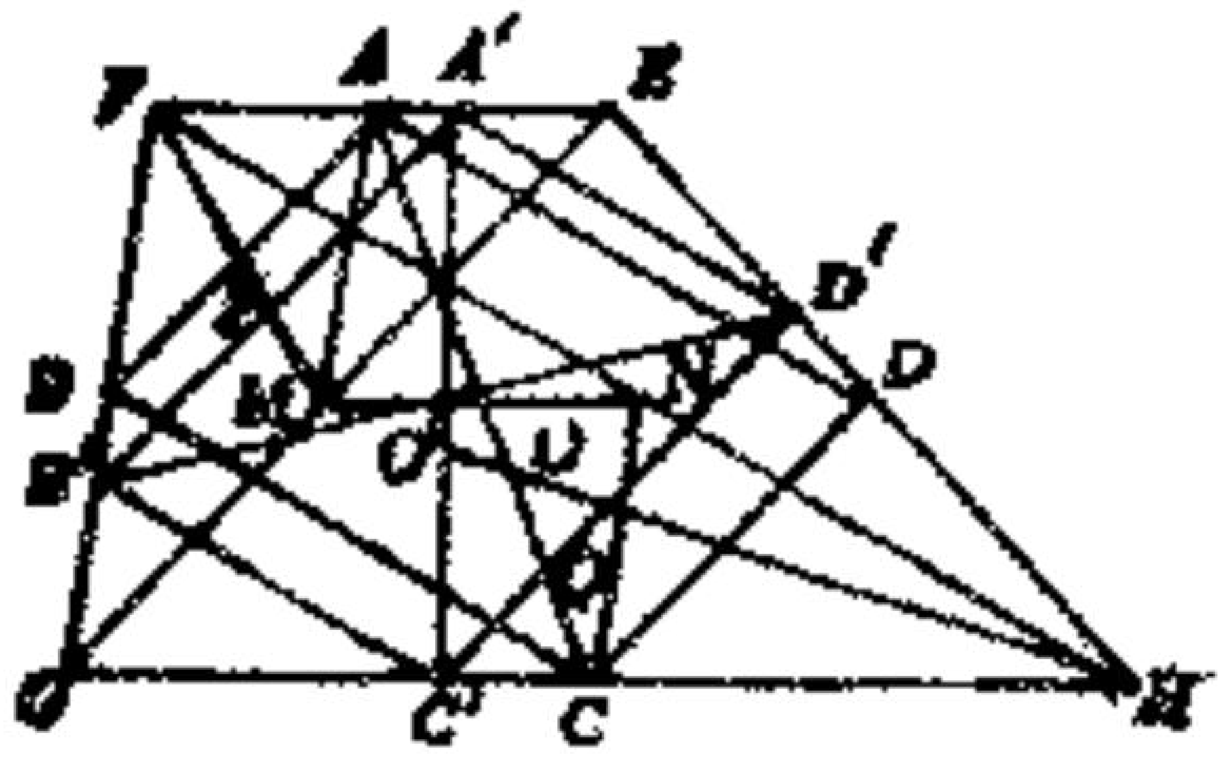


图23—26

当□$ABCD$ 趋于极限位置 EG 或 FH 时，其中心 O 重合于其中点 M、N.

当□$A'B'C'D'$ 为一般场合时，连 MF、MH，其与 $A'B'$、$C'D'$ 的交点为 P、Q，连 PQ，交 MN 于 O'.

由$\triangle FB'A' \backsim \triangle FGE$，$\triangle HC'D' \backsim \triangle HGE$，

且 M 为 GE 的中点，有 P、Q 是 $A'B'$、$C'D'$ 的中点.

$\therefore$ $PQ /\!/ FH$ 故 PQ 与 MN 的交点 O' 为 PQ 的中点. 此点即□$A'B'C'D'$ 的中心.

故平行四边形中心 O 的轨迹可能是线段 MN，且 M、N 为临界点.（证明略）

27. 设$\triangle ABC$ 相似于定三角形 $\triangle A'B'C'$，且 A 点固定，B 点在定直线 l 上移动，求 C 点的轨迹.

探求：当 B 点在直线 l 上移动时，C 点将随 B 点无穷远去而趋向无穷远，故 C 点的轨迹可能是半线或直线.

过A点作$AH\perp l$，作相似三角形$\triangle AB_1C_1$、$\triangle AB_1'C_1'$、$\triangle AHC_2$、$\triangle ABC$使均相似于$\triangle A'B'C'$，则B_1、C_1、B_1'、C_1'、C_2均为定点。

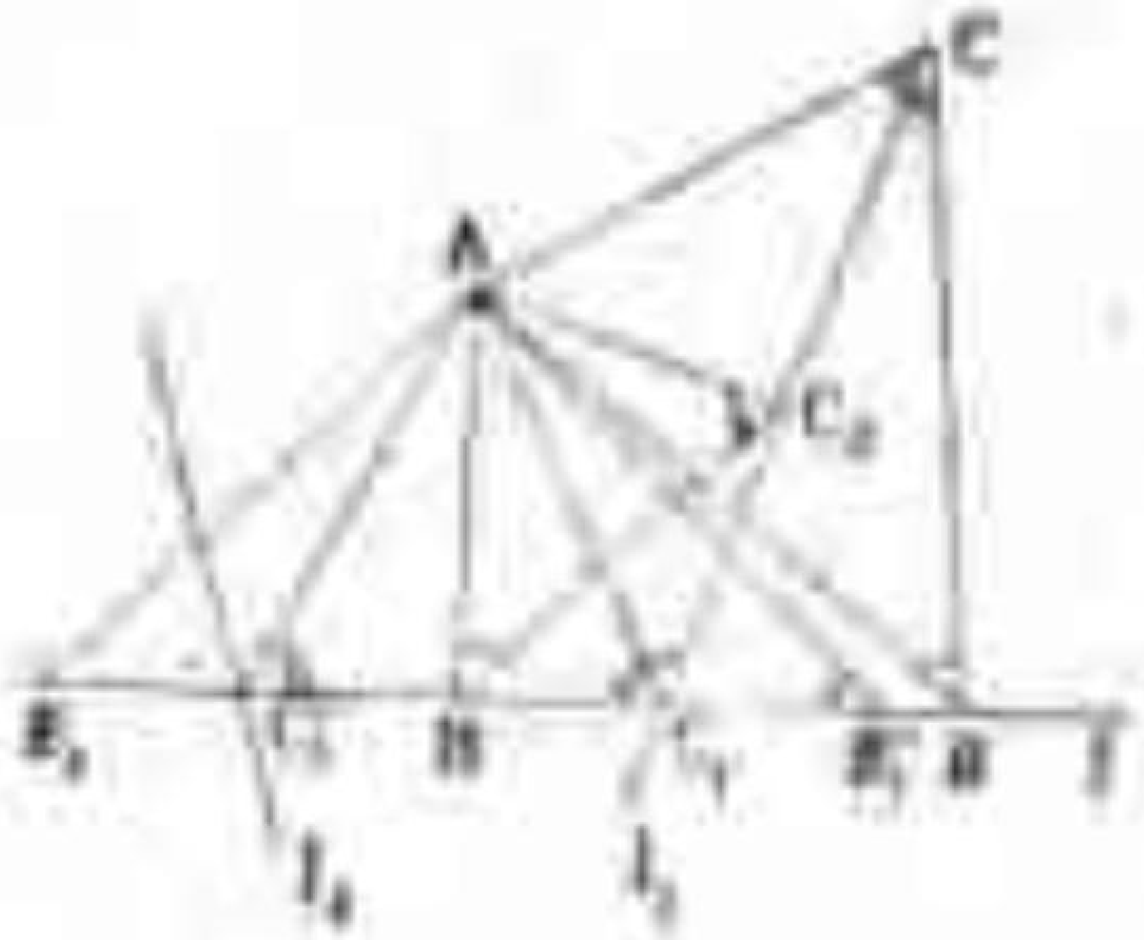


图23—27

只有A、B、C_1、C_2，A、C_1、H、C均四点共圆。

∴ $\angle AC_1C=\angle ABC=\angle AHC_2=\angle AC_1C_2$，

∴ C_1、C_2、C三点共线。故C点的轨迹可能是由C_1、C_2所确定的直线l_1，由对称关系，l_1关于AH的对称直线l_2也可能为C点的轨迹。（证明略）

28. 设四边形$ABCD$相似于定四边形$A'B'C'D'$，且A、B、C三点分别在三条定直线上移动，求D点的轨迹。

提示：设三条定直线a、b、c相交于P、Q、R。

∵ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$

由习题十七第18题知，三点A、B、C关于$\triangle PQR$的密克点O和三点A'、B'、C'关于$\triangle PQR$的密克点重合，且

$$\angle AOC=\angle P+\angle R=\angle A'OC'，$$
$$\angle ACO=\angle A'C'O，\angle CAO=\angle C'A'O，$$

∴ 四边形$ABCO\backsim$四边形$A'B'C'O$

且 $\triangle ACO\backsim\triangle A'C'O$

∴ $\triangle OAD\backsim\triangle OA'D'$、$\triangle OCD\backsim\triangle OC'D'$且有$O$为定点。

故由上题知D点的轨迹为直线d。（证明略）

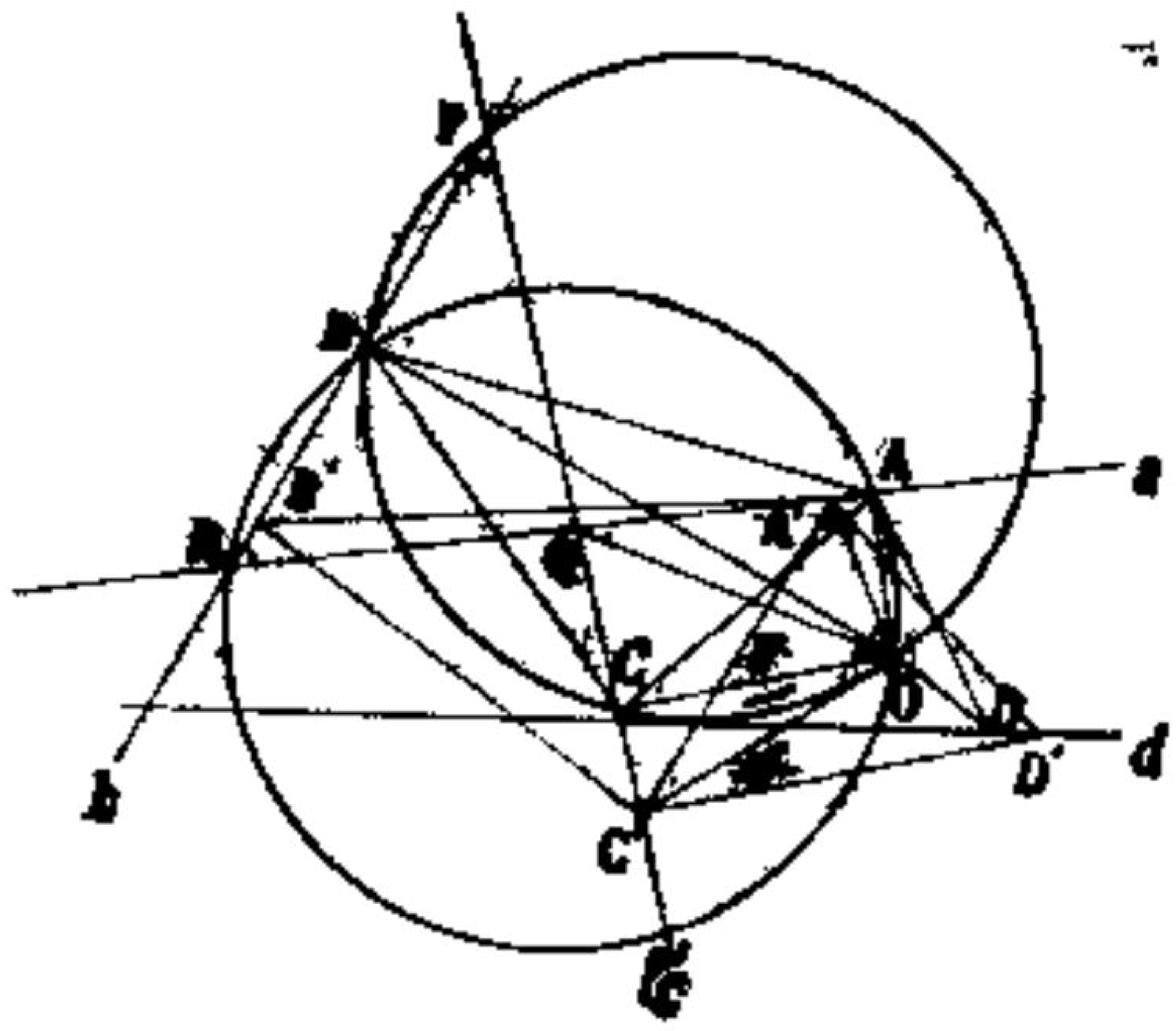


图23—28

29．求在定三角形与三边（所在直线）的距离和为定长的点的轨迹。

探求：设 P 到三边距离和 $d_1+d_2+d_3=l$（定长）由习题十二第18题知

$$h_a<l<h_b$$

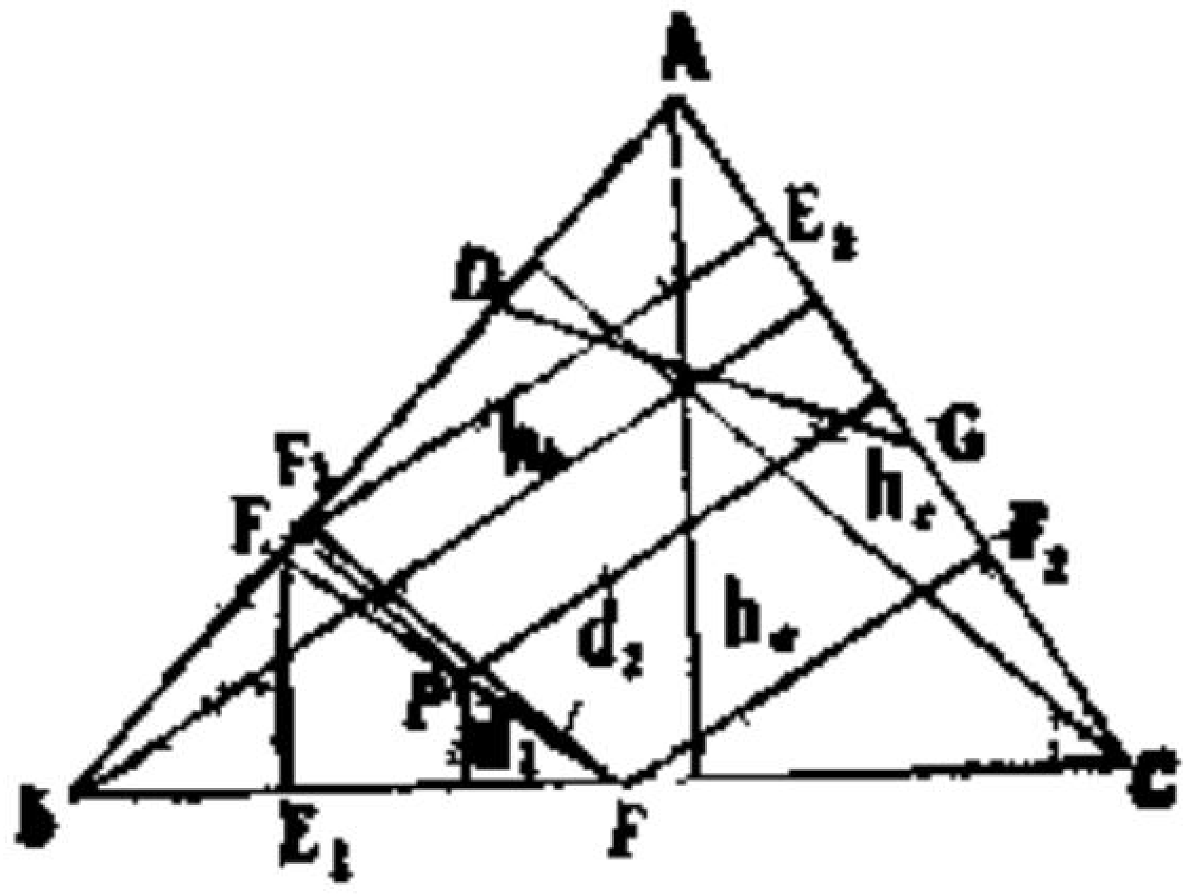


图23—29

当 $h_c<l<h_b$ 时，在 BA、BC 上存在两点 E、F，且

$EE_1-EE_2=FF_1+FF_2=l$；

当 $h_a<l'<h_c$ 时，在 AB、AC 上存在两点 D、G，且由其所作两垂线之和均等于 l'。

取 EF 上任一点 P，令 $\frac{PE}{PF}=\lambda$，由定理119，得

$$d_1=\frac{EE_1}{1-\lambda},\quad d_2=\frac{EE_2-\lambda\cdot FF_2}{1-\lambda},\quad d_3=\frac{-\lambda\cdot F_1F}{1-\lambda}.$$

$$\therefore\quad d_1+d_2+d_3=\frac{EE_1+EE_2-\lambda(FF_2+F_1F)}{1-\lambda}=l.$$

即P点是轨迹上的点，且在EF线段上，故P的点轨迹可能为线段EF.（证明略）；若所给定长l'合于$h_a<l'<h_c$时，则P点的轨迹可能为线段DG.（证明略）

30．一已知大小的圆$\odot O(r)$切于定半线AX而滚动，自A另引半线切该圆于B，在这半线上有一点C合于

$\overline{AB}\cdot\overline{BC}=r^2$，求$C$点的轨迹。

探求：作$OM\parallel XA$交AB于M.

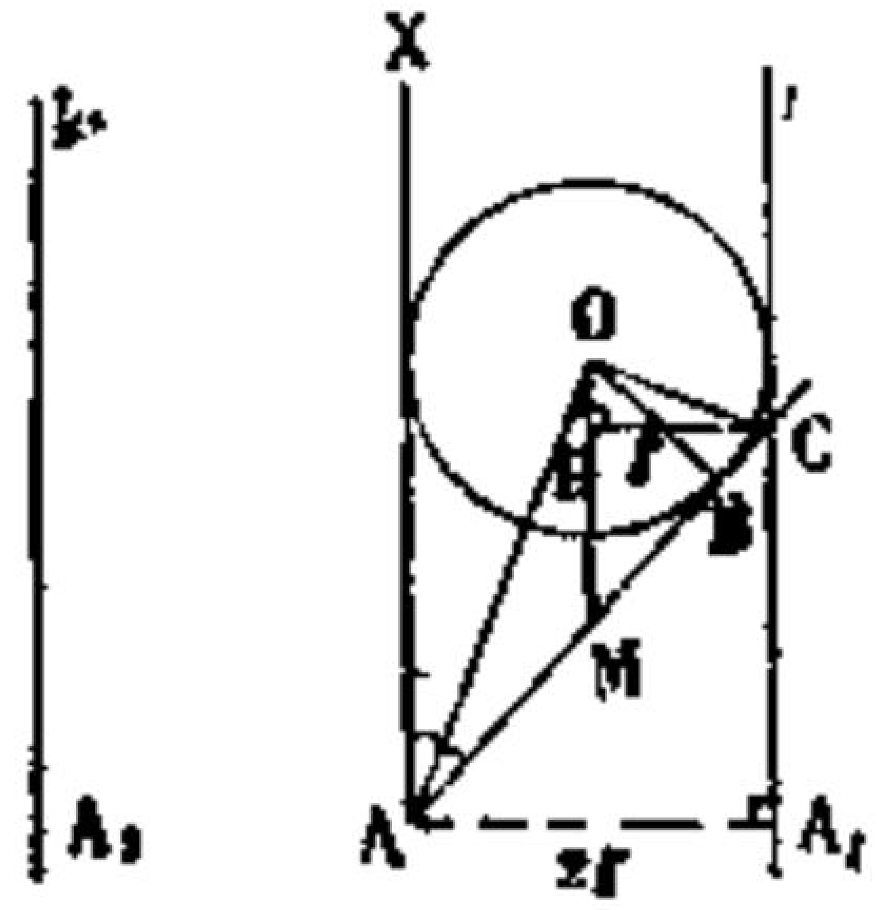


图23—30

$CD\perp OM$于D,

由$\overline{AB}\cdot\overline{BC}=r^2$

有$\dfrac{\overline{AB}}{\gamma}=\dfrac{\gamma}{\overline{BC}}$

$\therefore\quad\triangle ABO\backsim\triangle OBC$

故　$\angle AOC=90^\circ$.

$\therefore\quad MA=MO=MC$.

且　$CD=OB=r$，故C点的轨迹可能为距AX为$2r$的直线l_1，当$\odot O$在AX左侧时，l_2亦为C点的轨迹，其与AX的距离为$2r$.（证明略）

31．在$\triangle ABC$中，设BC边固定，$AD\perp BC$于D，而$AB^2=BC\cdot BD$，求A点的轨迹。

探求：由$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BD}{AB}$

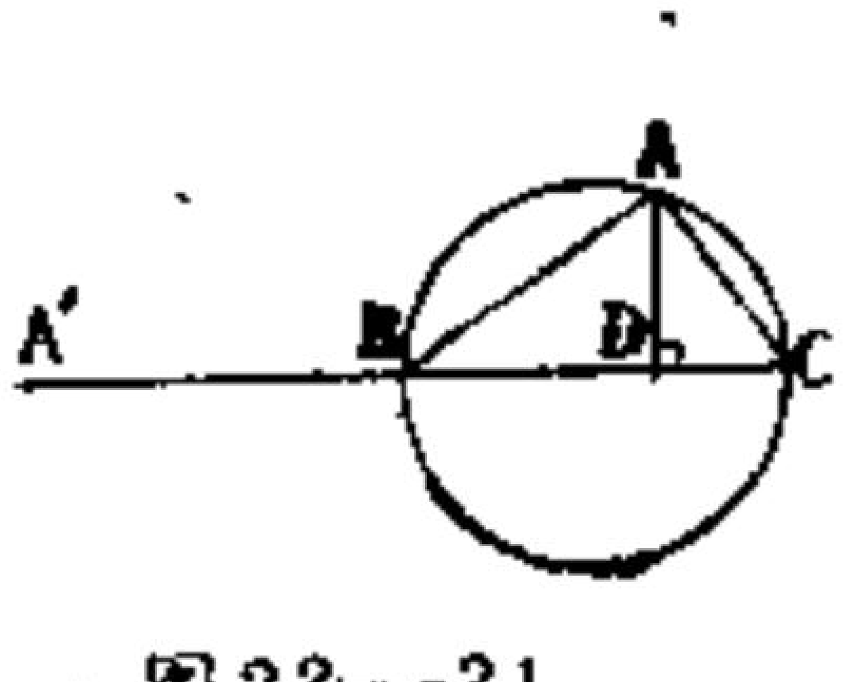


图23—31

有$\triangle BAC\backsim\triangle BDA$.

$\therefore\quad\angle BAC=\angle BDA=90^\circ$

故 A 点的轨迹可能是以 BC 为直径的圆。（证明略）当 A' 在 CB 的延长线上且 $BA'=BC$ 时，孤立点 A' 亦为 A 点的轨迹。

32．在 $\triangle ABC$ 中，设 BC 边固定，$AD\perp BC$ 于 D，而 $\frac{AB^2}{AD^2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$，求 A 点的轨迹。

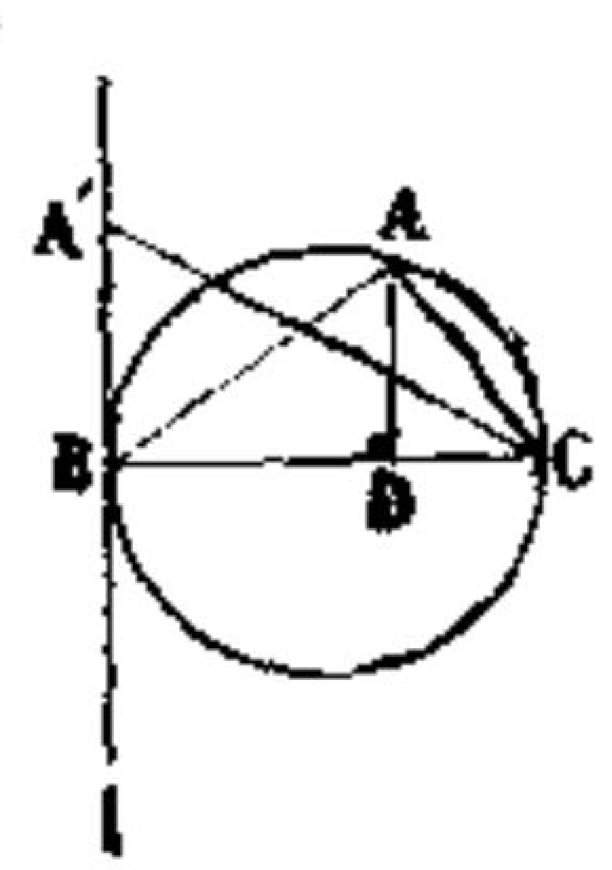


图23—32

探求：由 $AD^2=\overline{BD}\cdot\overline{DC}$

$AB^2\cdot\overline{DC}=AD^2\cdot\overline{BC}$

有 $AB^2=\overline{BC}\cdot\overline{BD}$

由上题知，A 点的轨迹为以 BC 为直径的圆。

又直线 $l\perp BC$ 于 B，取 l 上任一点 A'，则 D 点重合于 B，$\therefore$ $A'B=A'D$，$BC=DC$。

故有 $\frac{AB^2}{AD^2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}=1$，直线 l 亦为 A 点的轨迹。

故 A 点有合成轨迹，B、C 两点为极限点（证明略）。

33．$\triangle ABC$ 固定，M、N 各是 AB、AC 两边的中点，过 A 作直线 l，引 BE、$CF\perp l$ 于 E、F，连 EM 与 FN 设交于 P，今将 l 绕 A 自原位置起旋转一直角而止，求 P 点的轨迹。

探求：过 A 作 l_1 于特殊位置，使 $CF_1\perp l_1$ 于 F_1 且 F_1 在 MN 上；过 A 作 l_3 于特殊位置，使 $BE_3\perp l_3$ 于 E_3 且

E_3在NM上；此时有P点在M、N处，过A作l_2时，有

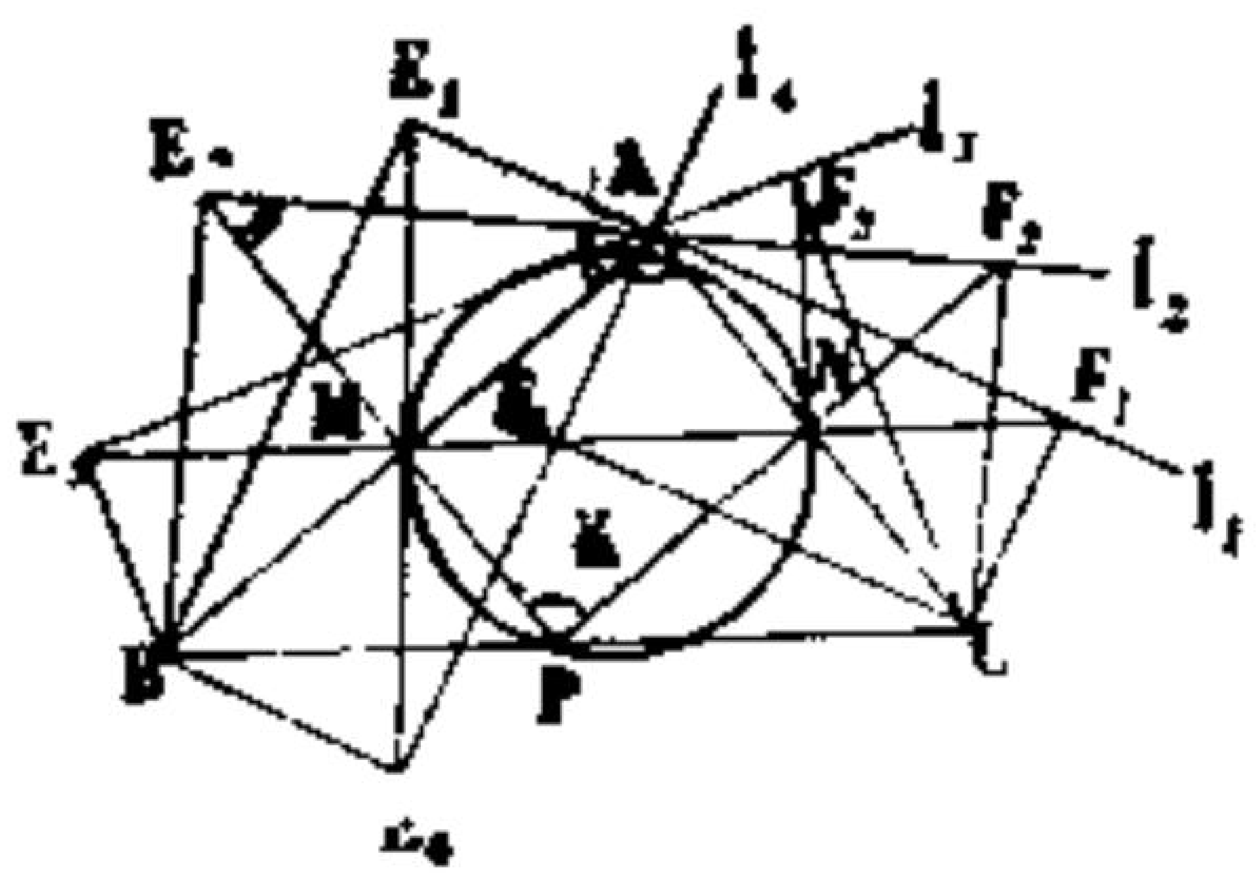


图23—33

$\angle MPN=\angle BAC$为定角，故P点的轨迹可能为$\triangle ABC$的九点圆。

又当$l_4 \perp l_1$时，P点恰好绕圆周一圈与M点重合。（证明略）

34．过两定圆$\odot O$与$\odot O'$的一交点A作直线l交两圆于P与P'，连PO与$P'O'$设交于Q，今将l绕A由原位置起旋转一直角而止，求Q点的轨迹。

探求：过A作P_1P_1'、P_3P_3'使P_1'、P_3在OO'上，则Q点在O、O'处；

过A作P_2、P_2'使P_2、P_2'在BO、BO'上，则Q点在B处；

过A作PP'，令PO交$O'P'$于Q，有

$$\begin{aligned}\angle OQO' &= \angle O'P'A-\angle APO=\angle O'AP'-\angle OAP\\ &=\angle O'AP_1'+\angle P'AP_1'-\angle OAP\\ &=\angle O'AP_1'+\angle PAP_1-\angle OAP\\ &=\angle O'AP_1'+\angle OAP_1\\ &=180^\circ-\angle OAO'=180^\circ-\angle OBO'\end{aligned}$$

$\therefore$ O、B、O'、Q四点共圆。

故Q点的轨迹可能为$\odot OBO'$（证明略），且当l绕A自原位起旋转一直角，Q点恰绕成一圆周。

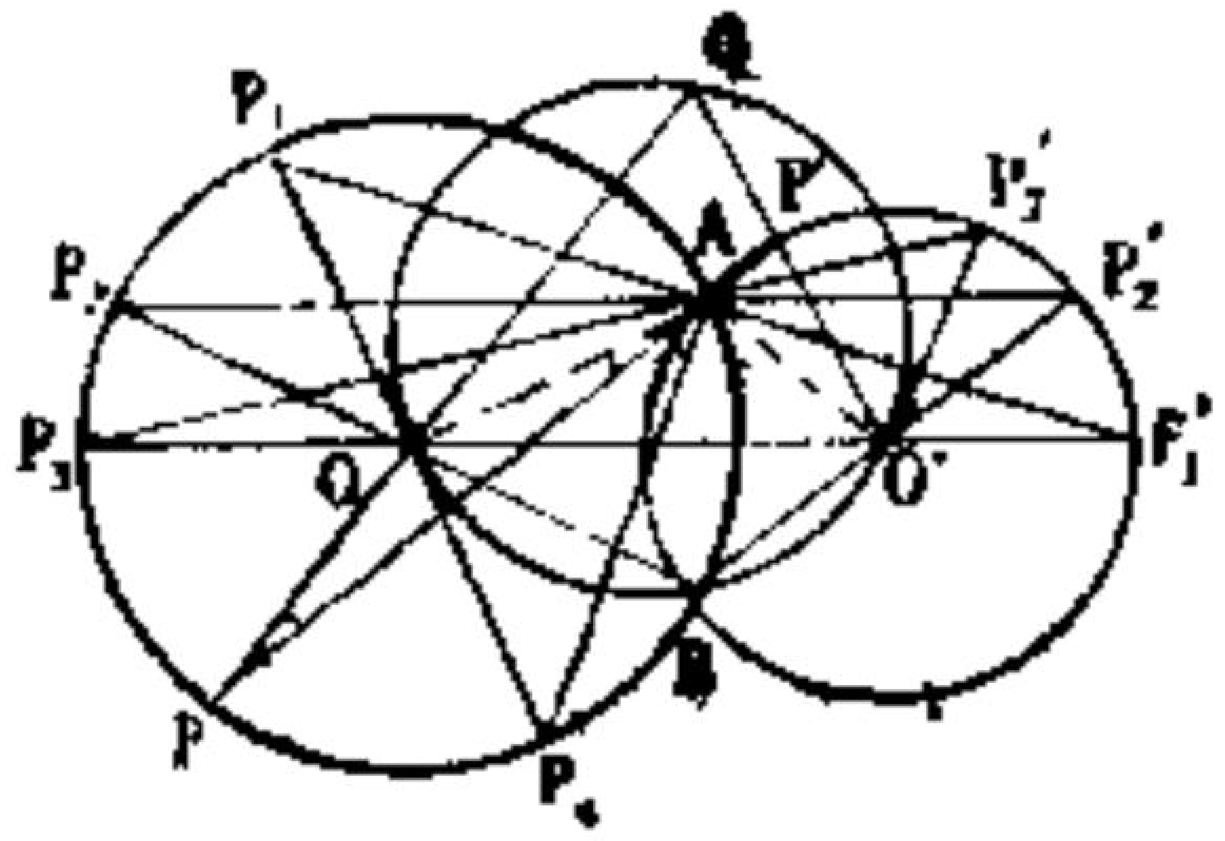


图23—34

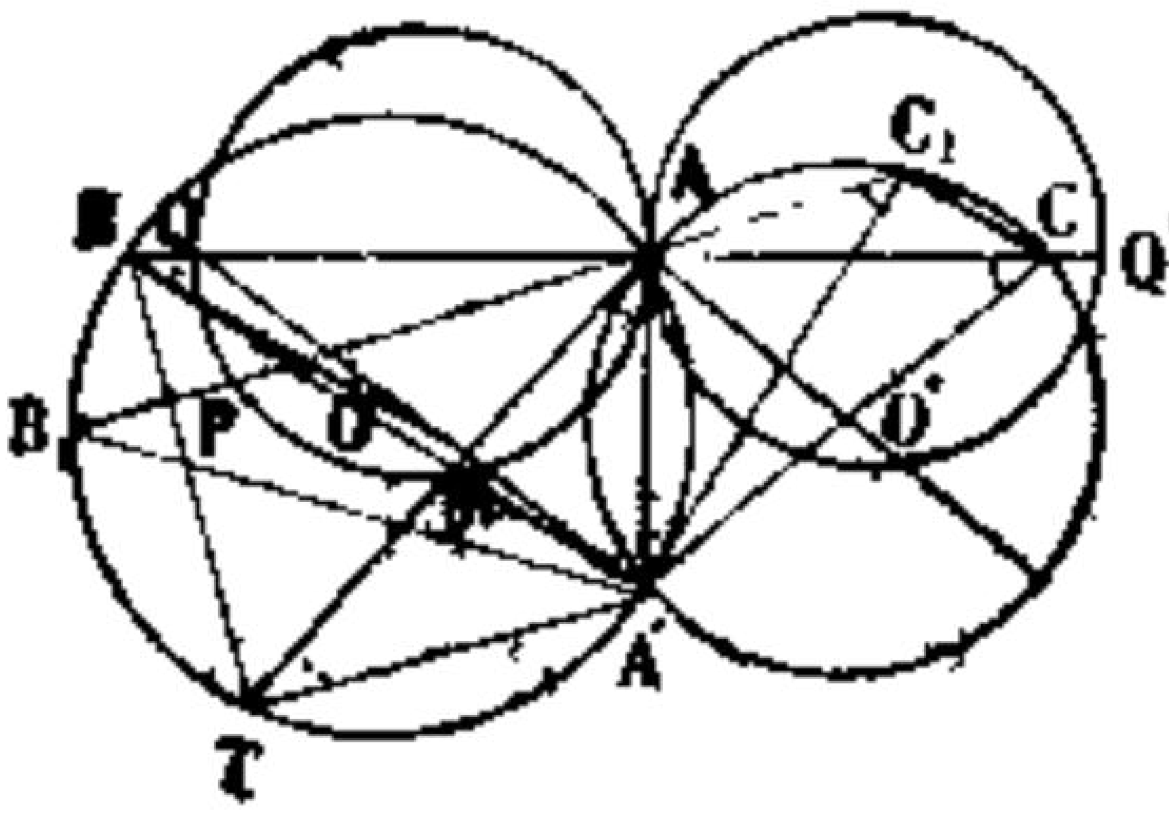


图23—35

35．过两定圆的一交点作直线 l 交两圆于 B、C，在 l 上截线段 $AP=\frac{1}{2}BC$，求 P 点的轨迹。

探求：作 $BC\perp A'A$ 于 A 且 $AQ=AQ'=\frac{1}{2}BC$.

过 A 作 B_1C_1 且 $AP=\frac{1}{2}B_1C_1$.

过 A 作 $\odot O'$ 的切线 AT 且 $AM=\frac{1}{2}AT$.

由 $\triangle A'BC\backsim\triangle A'B_1C_1\backsim\triangle A'TA$

有 $\dfrac{A'C}{A'C_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}B_1C_1}=\dfrac{AQ}{AP}$,

又 $\angle CA'C_1=\angle CAC_1=\angle QAP$

$\therefore\ \triangle A'C_1C\backsim\triangle APQ$　　故 $\angle APQ=\angle A'C_1C=90^\circ$.

及 $\dfrac{A'B}{A'T}=\dfrac{BC}{TA}=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}TA}=\dfrac{AQ}{AM}$　　又 $\angle BA'T=\angle QAM$

$\therefore\ \triangle A'TB\backsim\triangle AMQ$　　故 $\angle AMQ=\angle A'TB=90^\circ$

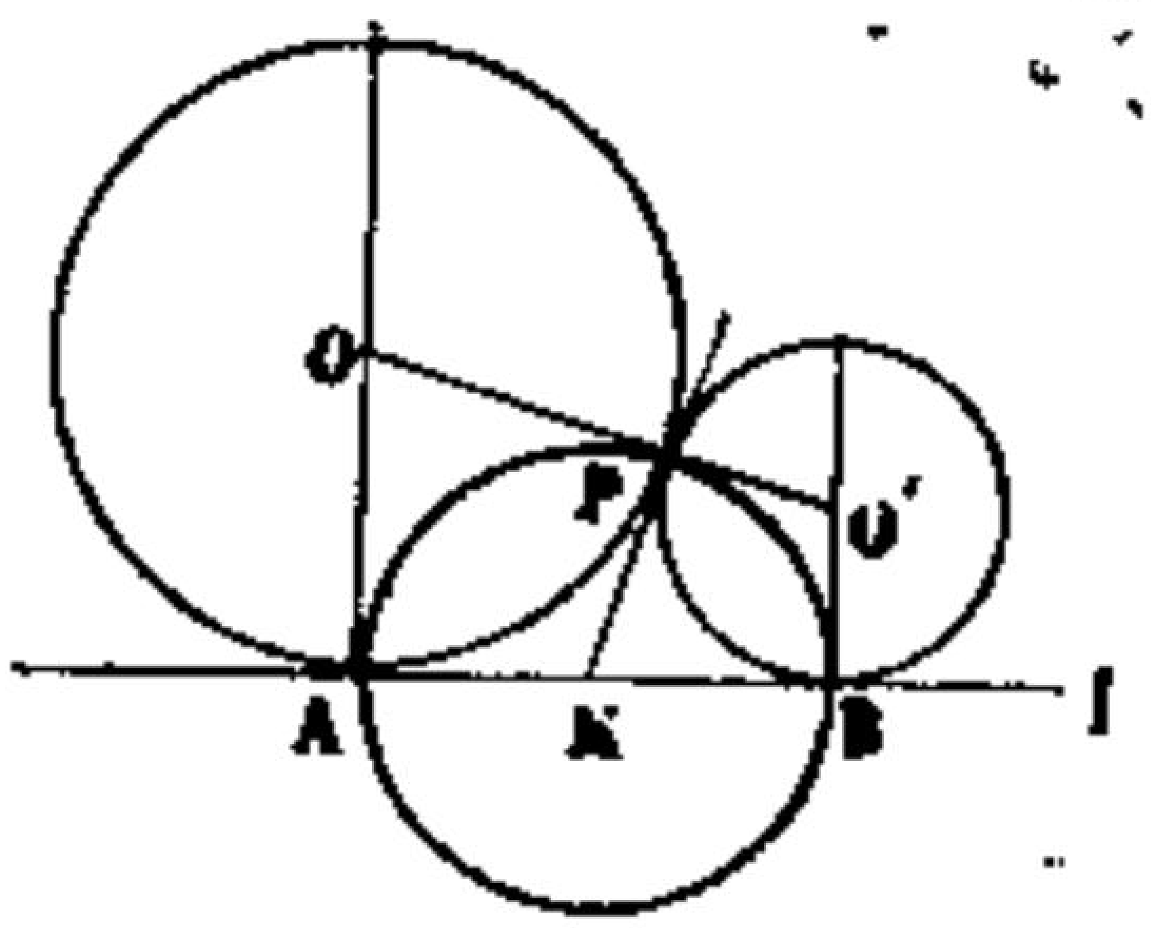
因 A' 是两圆的公共点，即 B、C 重合于 A'，故 A 点即 P 点。

$\therefore$ P 点的轨迹为以 AQ、AQ' 为直径的两圆。（证明略）

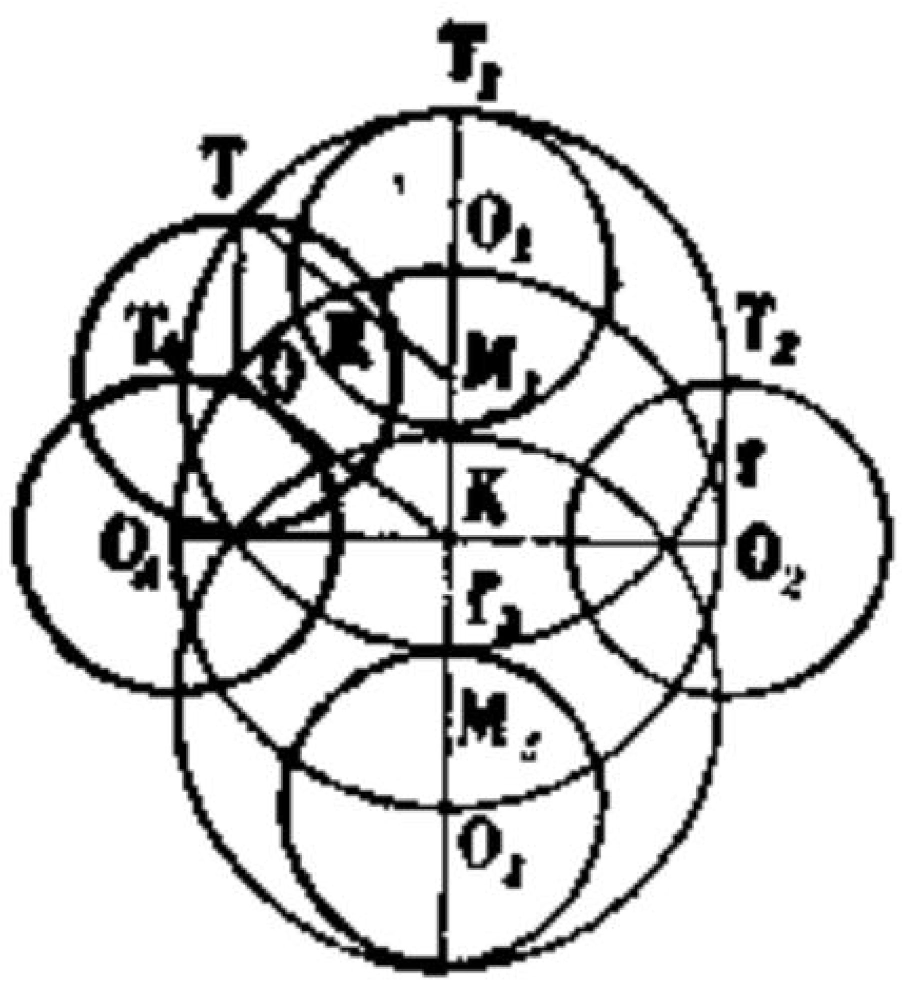
复 习 题 四

1．两圆互相外切且又同切一定直线各于定点，求证两圆切点的轨迹是一圆。

探求：A、B 是⊙O、⊙O' 在 l 上的切点，过两圆的切点 P 作公切线 PM，有 $MA=MP=MB$，即 M 是 AB 的中点，故 P 点的轨迹可能是⊙M，A、B 两点为极限点（证明略）



图复四—1



图复四—2

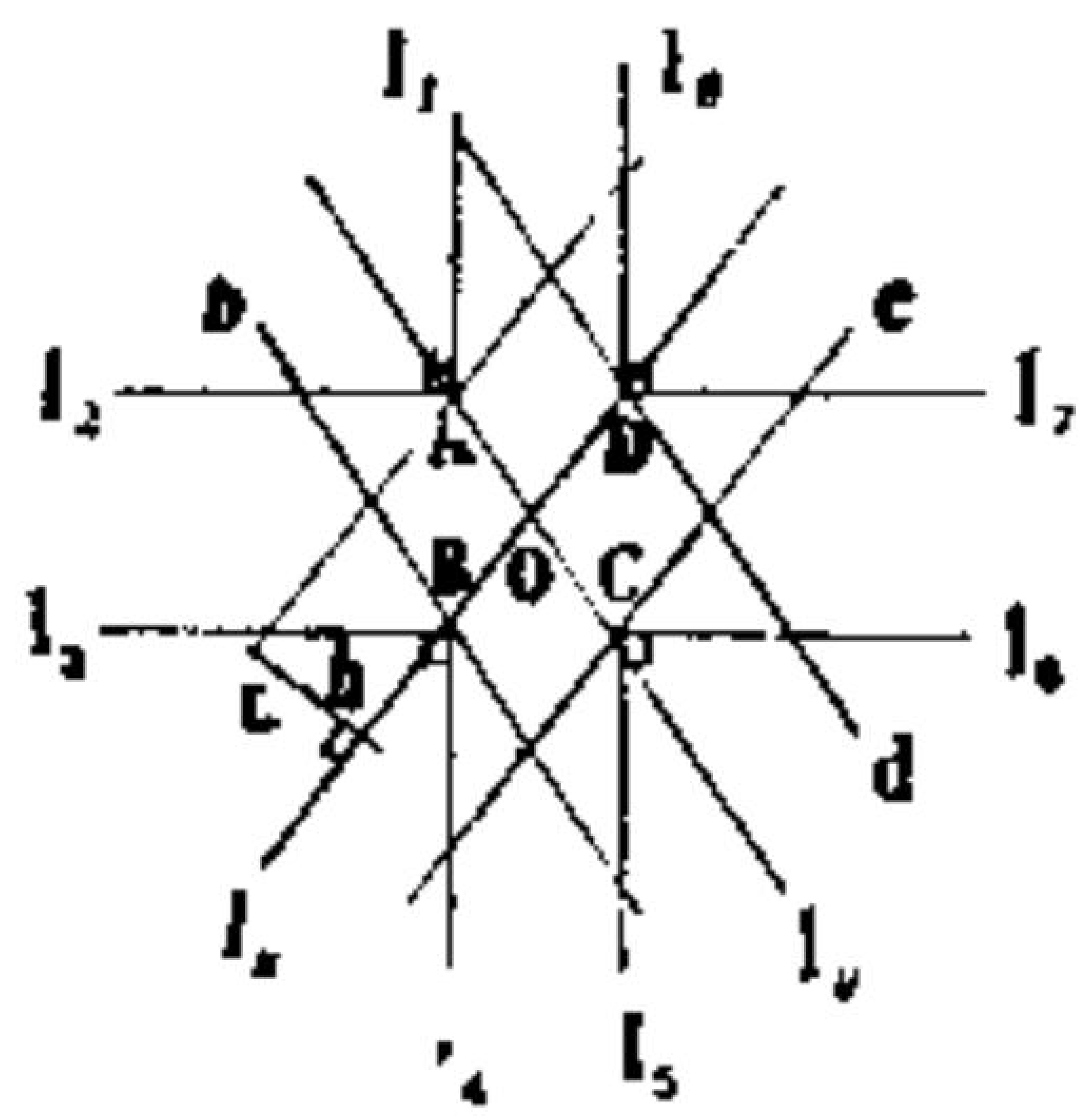
2．以定圆上的点为心作定半径的圆，并作这圆的定向切线，求证切点的轨迹是两个等圆。

探求：设所给定向切线是水平的，过定圆⊙$K(R)$ 的中心 K 作互相垂直的两直线，使其方向平行与垂直定向的方向，其与⊙K 的交点为 O_1、O_2、O_3、O_4，以这四点为圆心，作半径为 γ 的圆得八个切点。在圆的上方四切点为 T_1、T_2、T_3、T_4，则圆心 M_1 应在距 K 为 γ 处。

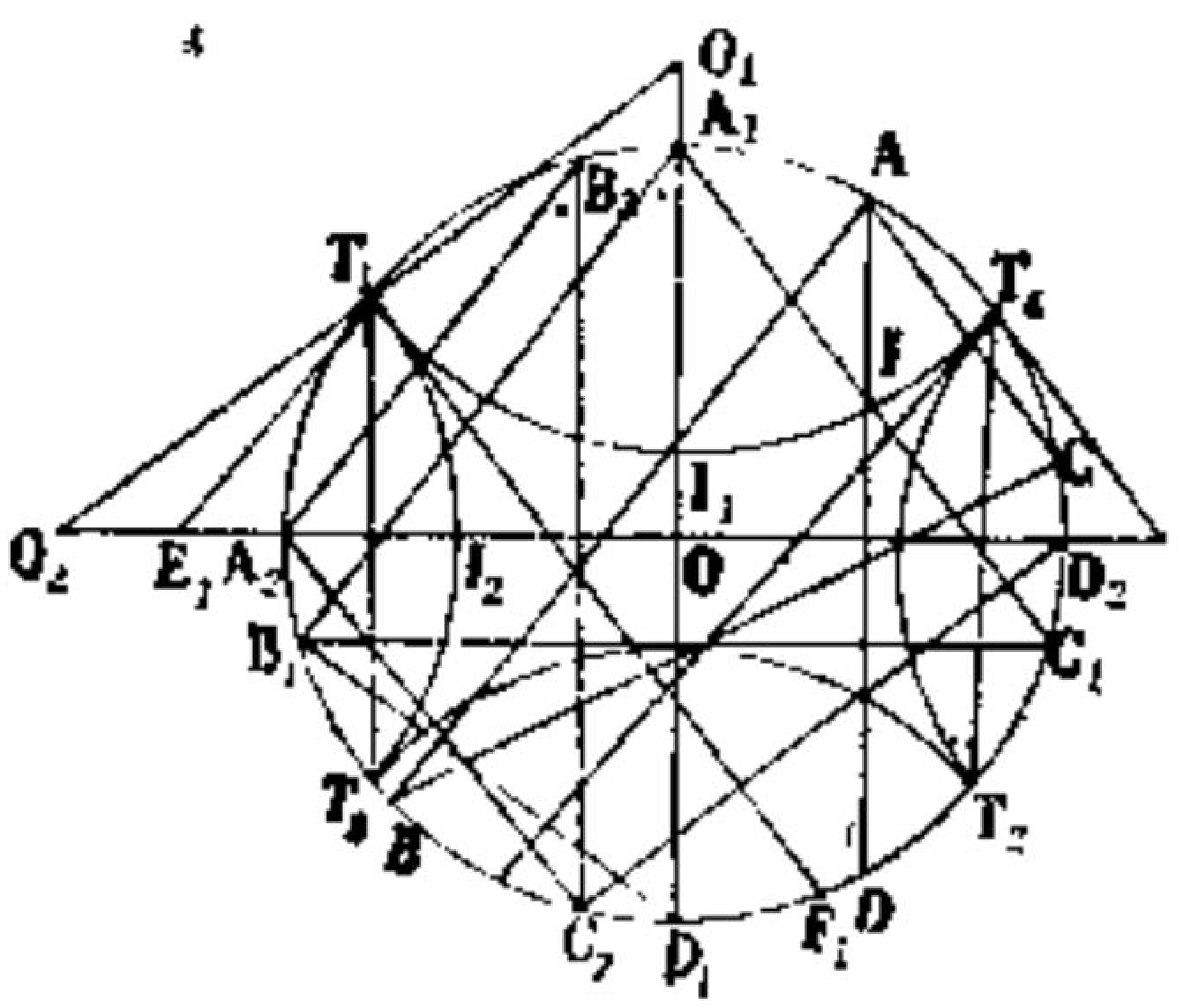
在⊙K 上任一点 O 作⊙$O(\gamma)$，其上方的切点为 T，由 M_1KOT 为平行四边形，得 $M_1T=KO=R$，故 T 点的轨迹可能为⊙$M_1(R)$，而其在各圆下方的切点轨迹为⊙$M_2(R)$（证明略）。

3. 设一点至相交两定直线的距离差（绝对值）一定，则该点的轨迹是八条半线兼其端点。

探求：两定直线 l_x、l_y 相交于 O，令距离差为 h，作四直线 a、b、c、d 使与 l_x、l_y 的距离为 h，交点为 A、B、C、D，则过顶点 A、B、C、D 作所成角的交角平分线的八条半线 l_1、l_2、l_3、l_4、l_5、l_6、l_7、l_8 为所求轨迹，且有 $l_1 \perp l_2$，$l_3 \perp l_4$，$l_5 \perp l_6$，$l_7 \perp l_8$．（证明略）



图复四—3



图复四—4

4. 内接于定圆且两边各有定向的三角形，它的内心的轨迹是四个轮廻相切的圆弧．

探求：设内接三角形$\triangle ABC$ 的 AB、AC 有定向，过定圆的圆心 O 作 $A_1D_1 \perp A_2D_2$ 且使 A_1D_1、A_2D_2 平行于$\triangle ABC$ 的内、外角平分线．

过 A_1、A_2 作符合定向条件的三角形$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$，则 A_1D_1、A_2D_2为这两三角形的内角平分线，由复习题一第18题，I_1、I_2 为两三角形的内心，且有

$$D_1I_1 = D_1B_1 = D_1C_1,\quad D_2I_2 = D_2B_2 = D_2C_2$$

由于$\angle A$的两边 AB、AC 有定向，故$\angle A$ 为定角，则$\frac{1}{2}\angle A$ 亦为定角，且内角平分线A_1D_1、A_2D_2均有定向，且D_iI_i有定长。

令T_1、T_2为AB在$\odot O$上的切点；T_3、T_4为AC在$\odot O$上的切点，当A点在$\overset{\frown}{T_1T_4}$时，有$D_iI_i=DI$，故内心I在$\overset{\frown}{T_1IT_4}$上且$\overset{\frown}{T_1IT_4}=\overset{\frown}{T_3D_1T_2}$；

当A点在$\overset{\frown}{T_1T_3}$时，有$D_iI_i=D_2I_2$，故内心I在$\overset{\frown}{T_1I_2T_3}$上且$\overset{\frown}{T_1I_2T_3}=\overset{\frown}{T_4D_2T_2}$；

当A点在$\overset{\frown}{T_3T_2}$、$\overset{\frown}{T_2T_4}$时，内心I在$\overset{\frown}{T_3I_3T_2}$、$\overset{\frown}{T_2I_4T_4}$上。

以上关于I的四段圆弧之和即$\odot O$的周长。令定圆的半径为R，则$O_1I_1=O_2I_2=R$

$\therefore\quad O_1T_1+O_2T_1=2R$，且$OO_2=D_2I_2=D_2C_2$，

$OO_1=D_1I_1=O_1B_1=C_2A_2$.

$\because\quad D_2C_2^2+A_2C_2^2=A_2D_2^2=(2R)^2$

$\therefore\quad OO_1^2+OO_2^2=(2R)^2-O_1O_2^2$

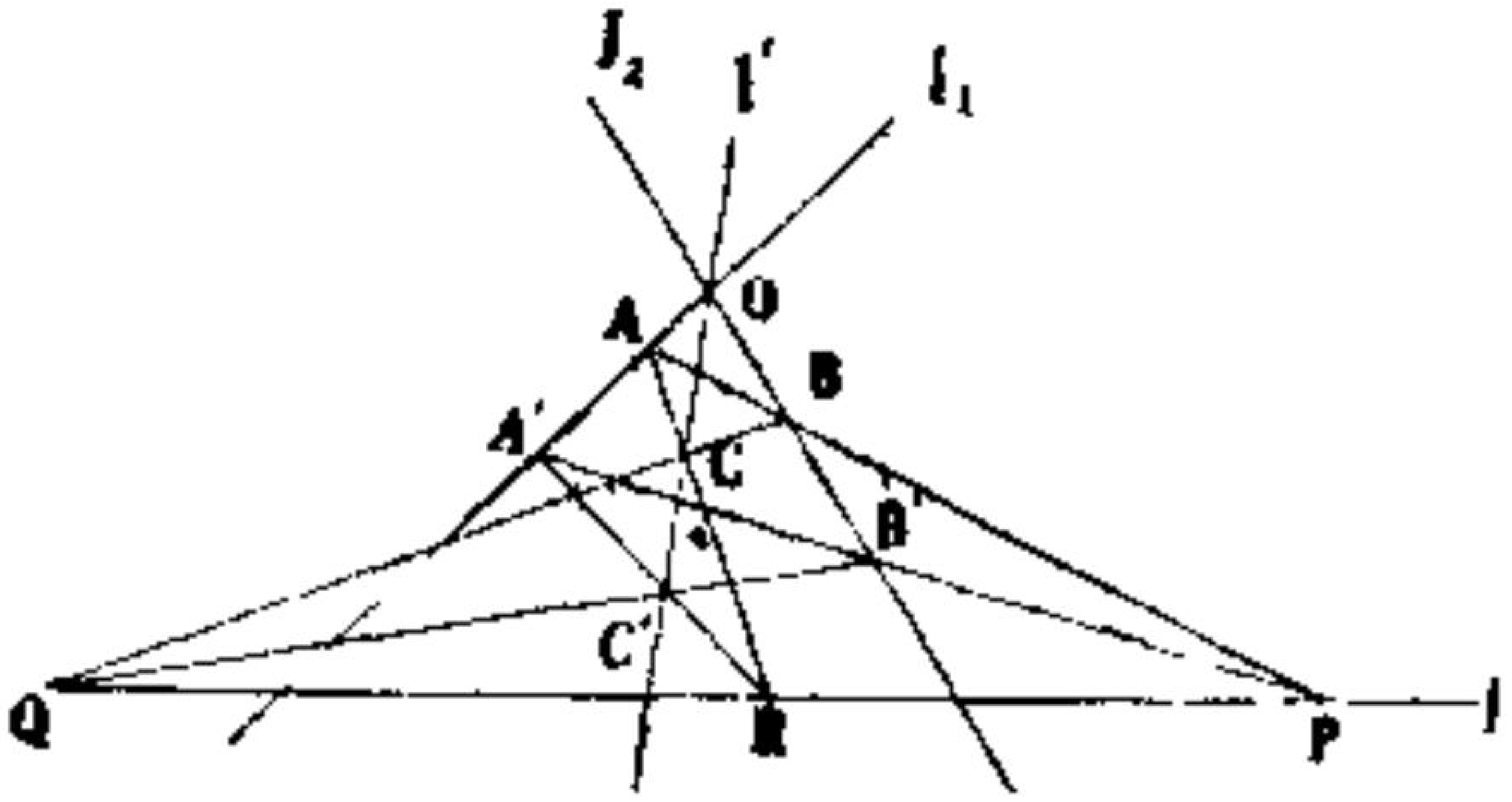
故T_1在O_1O_2上，即$\overset{\frown}{T_1I_1T_4}$与$\overset{\frown}{T_1I_2T_3}$相切于$T_1$.

所以内心的轨迹可能是四个相切的圆弧，且切点T_1、T_2、T_3、T_4为终止点.（证明略）

5．设三角形的三边（所在直线）分别通过共线三点，且有两顶点分别在两条定直线上，则第三顶点的轨迹是一条直线.

探求：作满足条件的$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$，即A、A'在定直线l_1上；B、B'在定直线l_2上，又P、Q、R三点共

线且 AB、$A'B'$ 过 P，BC、$B'C'$ 过 Q，CA、$C'A'$ 过 R。



图复四—5

由笛沙格定理知，对应顶点的连线 AA'、BB'、CC' 应共点，由于 l_1 与 l_2 已交于定点 O，故 CC' 亦应在直线 l' 上，故 C 点的轨迹可能是直线 l'．（证明略）

6．设 P、Q、R 是共线的三定点，过 R 引直线交两定平行线 a、b 于 A、B，求连线 PA 与 QB 的公共点的轨迹．

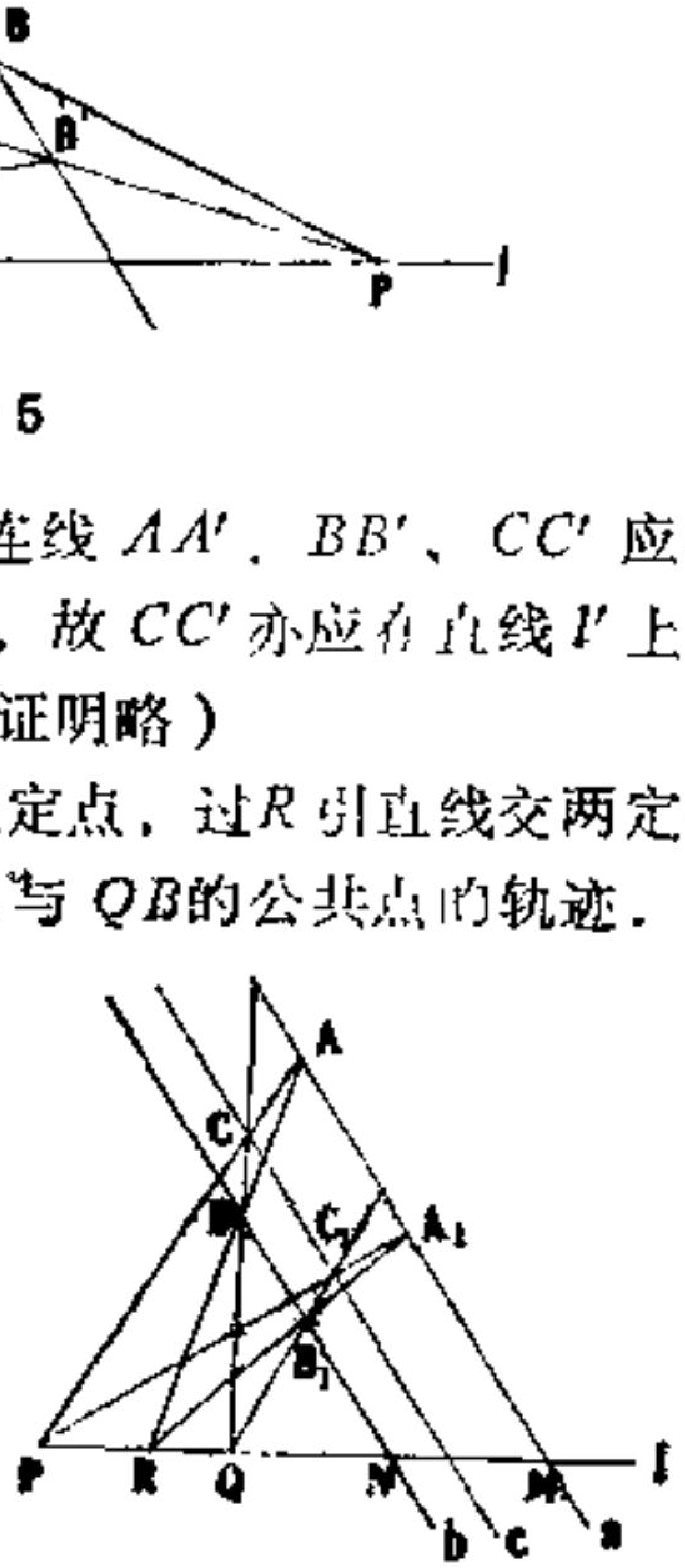
探求，由梅涅劳定理，由

$\triangle BRQ$ 与直线 PCA，

$\triangle B_1RQ$ 与直线 PC_1A_1，

有 $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}\cdot\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}}\cdot\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CQ}}=1$

$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PR}}\cdot\dfrac{\overline{A_1R}}{\overline{A_1B_1}}\cdot\dfrac{\overline{C_1B_1}}{\overline{C_1Q}}=1$



图复四—6

$\because\quad \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{MR}}{\overline{MN}}=\dfrac{\overline{A_1R}}{\overline{A_1B_1}}\qquad\therefore\quad \dfrac{\overline{CB}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{C_1B_1}}{\overline{C_1Q}}$

故有 $CC_1 /\!/ BB_1$，所以 C 点的轨迹可能是与直线 a、b 都平行的直线 c．（证明略）

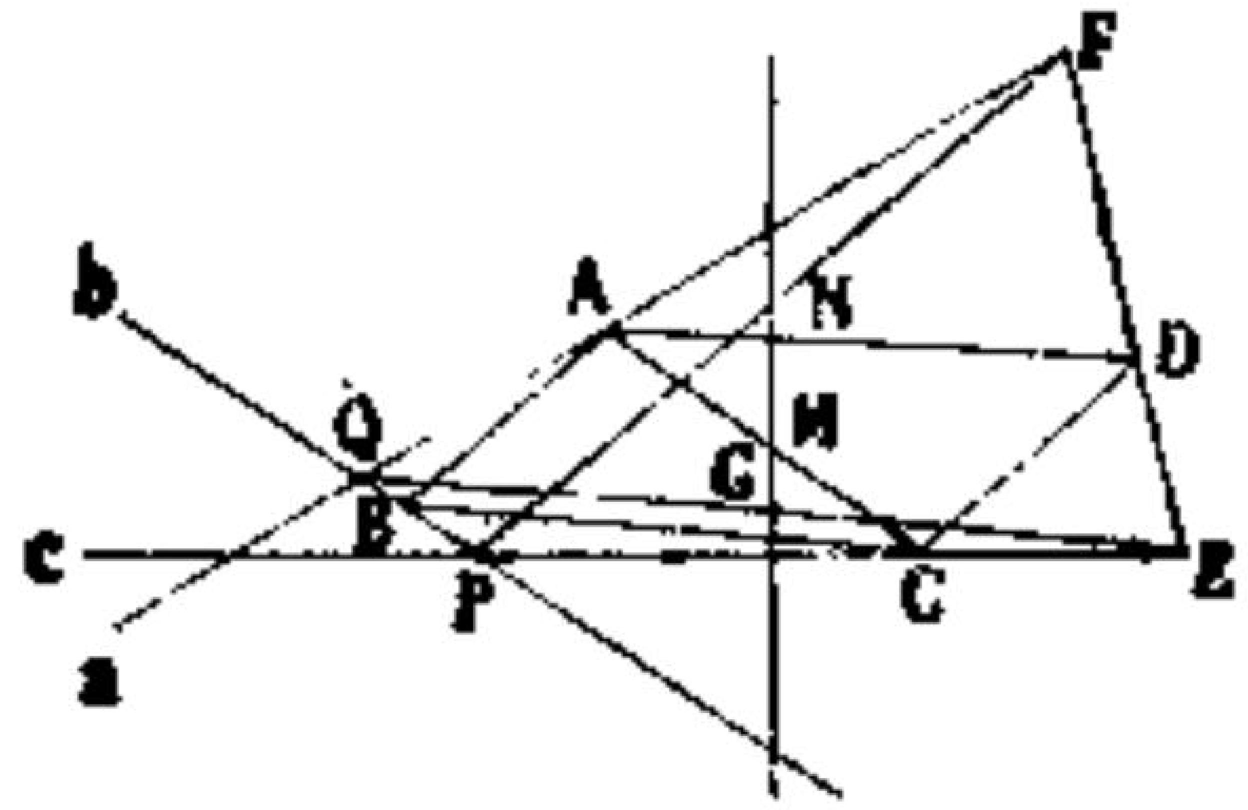
7．设三角形的三顶点分别落在三条定直线上，且两边各有定向，求第三边中点的轨迹．

探求：$\triangle ABC$ 的三边分别落在三定直线 a、b、c 上，且 BA、BC 有定向．

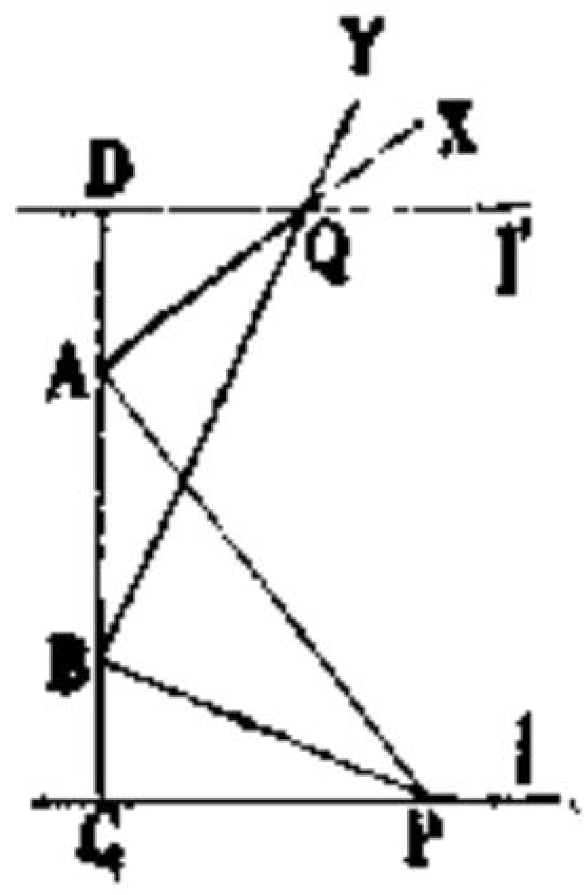
作 $QE /\!/ BC$ 交直线 c 于 E；$PF /\!/ BA$ 交直线 a 于 F．

再作 $AD /\!/ QE$，$CD /\!/ PF$ 则 $ABCD$ 为平行四边形，且有 D 在 EF 上．

由于 AC 的中点 M 即 $\square ABCD$ 的中心，令 N、G 为 PF、QE 的中点，由习题二十三第26题得，M 的轨迹为直线 NG，N、G 两点为极限点．（证明略）



图复四—7



图复四—8

8．设定线段 AB 垂直于定直线 l，在 l 上取 P 点与 A、B 相连，并作 $AX \perp AP$ 及 $BY \perp BP$，求 AX 与 BY 的交点的轨迹．

探求：当 P 点合于 C 时，$AX /\!/ BY /\!/ l$，Q 点趋于无穷远．

由 $QB^2 + PB^2 = QA^2 + PA^2$

$PA^2 - AC^2 = PB^2 - BC^2$

有 $QB^2 - QA^2 = PA^2 - PB^2 = AC^2 - BC^2$

因 A、B、C 均为定点，故 $AC^2 - BC^2$ 为定值．

由例题65，Q 点的轨迹应为垂直于 AB 的一条直线，故

需确定垂足 D 的位置．

$\because\quad AC^2-BC^2=QB^2-QA^2=BD^2-AD^2$

有 $(\overline{AC}+\overline{BC})(\overline{AC}-\overline{BC})=(\overline{BD}+\overline{AD})(\overline{BD}-\overline{AD})$

$\therefore\quad (2\overline{AC}-\overline{AB})\cdot\overline{AB}=(2\overline{BD}-\overline{BA})\cdot\overline{BA}$

有 $BD=CA$，故 D 点的位置可定．

所以 Q 点的轨迹可能是垂直 AB 于 D 的直线 l'．（证明略）

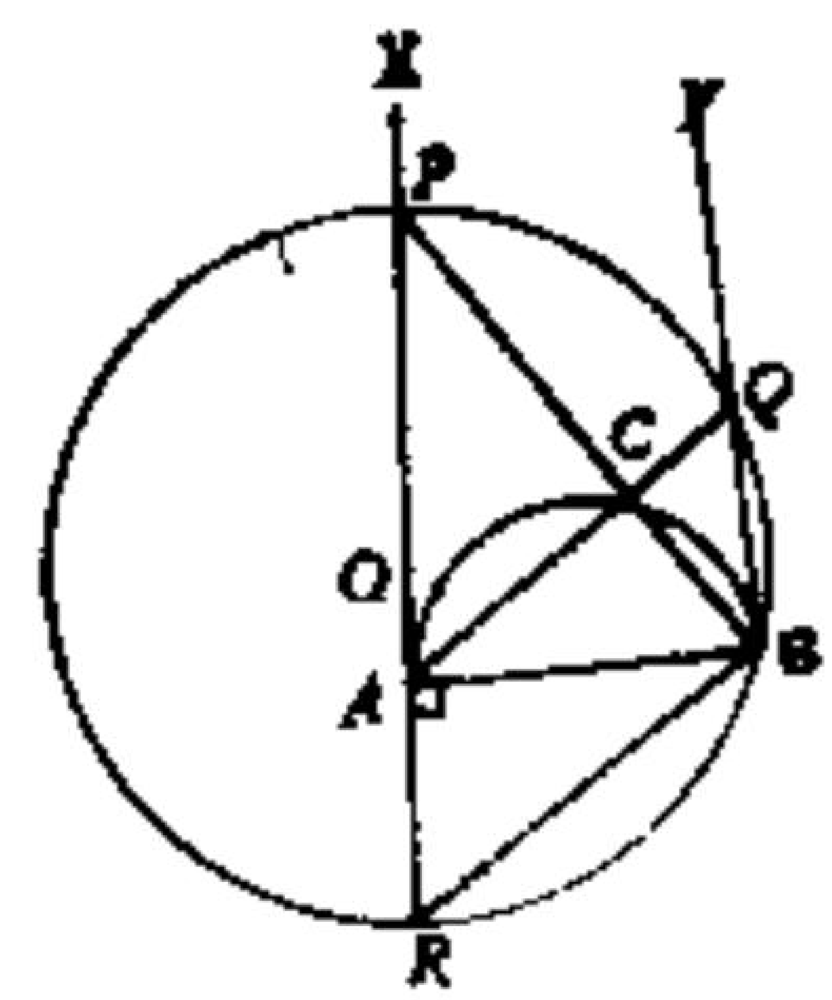
9．设半线 AX、BY 同垂直于定线段 AB 且在 AB 的同侧，在这两半线上各有 P、Q 点合于 $AP\cdot BQ=AB^2$，求 AQ 与 BP 的交点的轨迹．

探求：延长 PA 至 R，使 $AR=QB$，则 $ARBQ$ 为平行四边形且有

$AP\cdot AR=AB^2$

故 $\angle PBR=90°$，　　$\therefore\quad AQ\perp BP$．

故 C 点的轨迹可能是以 AB 为直径的半圆，A、B 两点为极限点．（证明略）



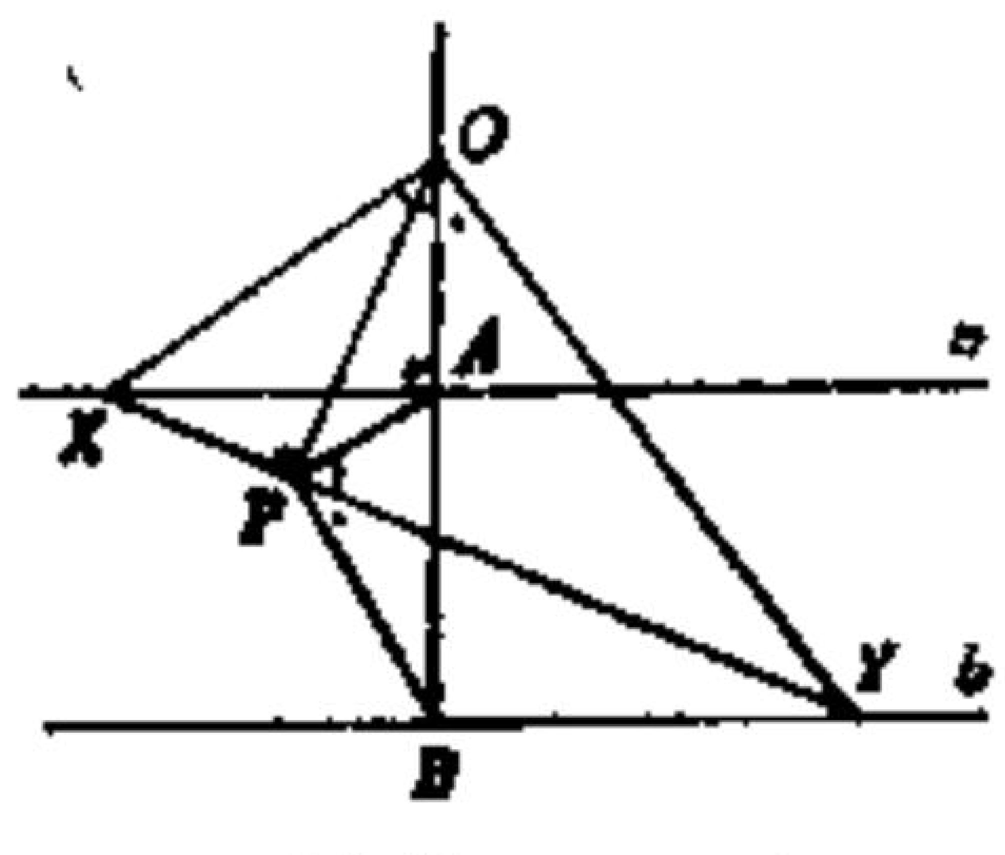
图复四—9

10．设 O 是两定平行线 a、b 外的定点，过 O 引互相垂直的两直线 x、y，命 x 与 a、y 与 b 的交点各为 X、Y，求 O 在 XY 上的射影的轨迹．

探求：P 是 O 在 XY 上的射影，由 O、A、P、X 与 O、P、B、Y 各四点共圆．

有 $\angle APY+\angle BPY$

$=\angle AOX+\angle BOY=90°$

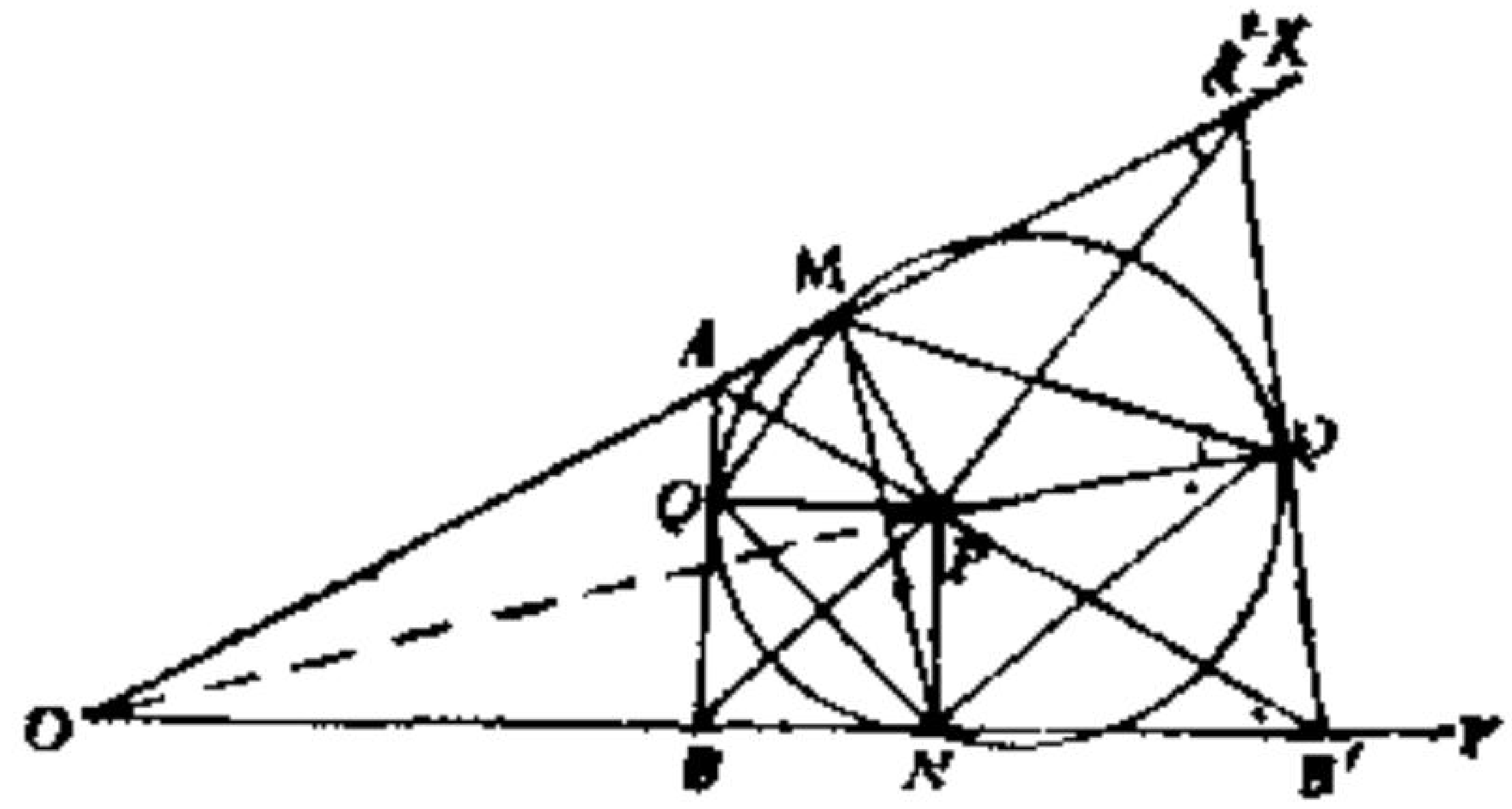


图复四—10

又当 $y\perp b$ 于 B 时，$x\parallel a$；$x\perp a$ 于 A 时，$y\parallel b$．
有 A、B 两点为 P 点的极限点，故 P 点的轨迹可能是以 AB 为直径的圆，A、B 两点为极限点．（证明略）

11．设一线段嵌于定角两边之间而移动，且对角内一定点张开一定大小的角，求定点在该线段所在直线上的射影的轨迹．

探求：设 $\angle XOY$ 为定角，P 是角内的定点，线段 AB 在定角两边移动，P 在 AB 上的射影为 Q，当 A 点与 O 点重合时，B 点在 OY 上，P 在 OY 上的射影 N 为定点；当 B 点与 O 点重合时，A 在 OX 上，P 在 OX 上的射影 M 为定点，且 M、N 均为轨迹上的点．



图复四—11

令 P 对 AB 所对定角为 α，

由 P、Q、A、M，P、Q、B、N；P、Q'、A'、M，P、Q'、B'、N 均四点共圆．

有
$$\angle MQN=\angle PAM+\angle PBN=\angle APB+\angle AOB$$
$$=\alpha+\angle AOB,$$
$$\angle MQ'N=\angle PA'M+\angle PBN=\angle A'PB-\angle AOB$$
$$=\alpha-\angle AOB.$$

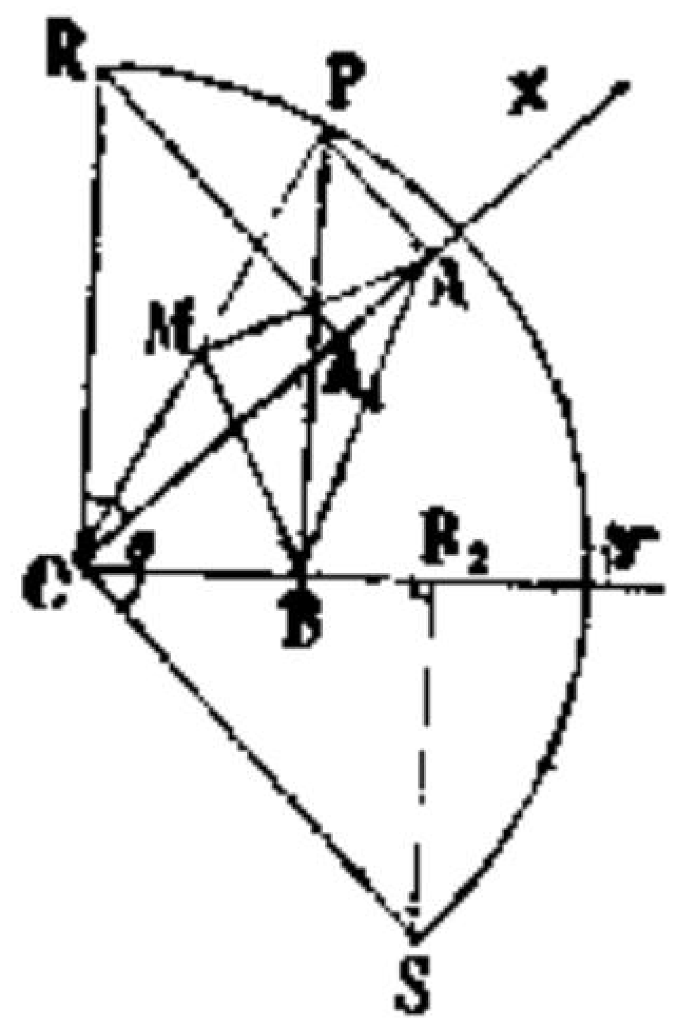
故 Q 点的轨迹可能是两段圆弧 $\overset{\frown}{MQN}$ 与 $\overset{\frown}{MQ'N}$ 其所对角分别为 $\alpha+\angle XOY$ 与 $\alpha-\angle AOB$．（证明略）

讨论：1° 当 $\alpha=90°$ 时，M、N、Q、Q' 共圆，

2　当 $\alpha \leqslant \angle XOY$ 时，$\overset{\frown}{MQ'N}$ 不存在.

12．设定长线段嵌于定角两边之间而移动，自线段的端点作所在边的垂线，求所作两垂线的交点的轨迹.

探求：设 $\angle XOY=\theta$，$AB=l$ 为定长，当 B 点重合于 O 时，A 在 A_1 处；当 A 点重合于 O 时，B 在 B_2 处，且 R、S 两点为轨迹的端点，由 R、P、S 三点判断，P 点的轨迹可能是圆弧.



图复四—12

由 $\angle ROA_1=\angle SOB_2=90°-\theta$，$OA_1=OB_2=l$，

∴　$Rt\triangle ORA_1 \cong Rt\triangle OSB_2$，

故 $OR=OS$.

且　$OS=\dfrac{OB_2}{\cos(90°-\theta)}=\dfrac{l}{\sin\theta}=l\csc\theta$.

由 A、B 在 OP 为直径的圆上，令 OP 的中点为 M，则 $MP=MO=MA=MB$，且 $\angle AMB=2\theta$

∴　$AB^2=MA^2+MB^2-2\cdot MB\cdot MA\cos2\theta$
$\qquad=2MA^2(1-\cos2\theta)=4MA^2\sin^2\theta$，

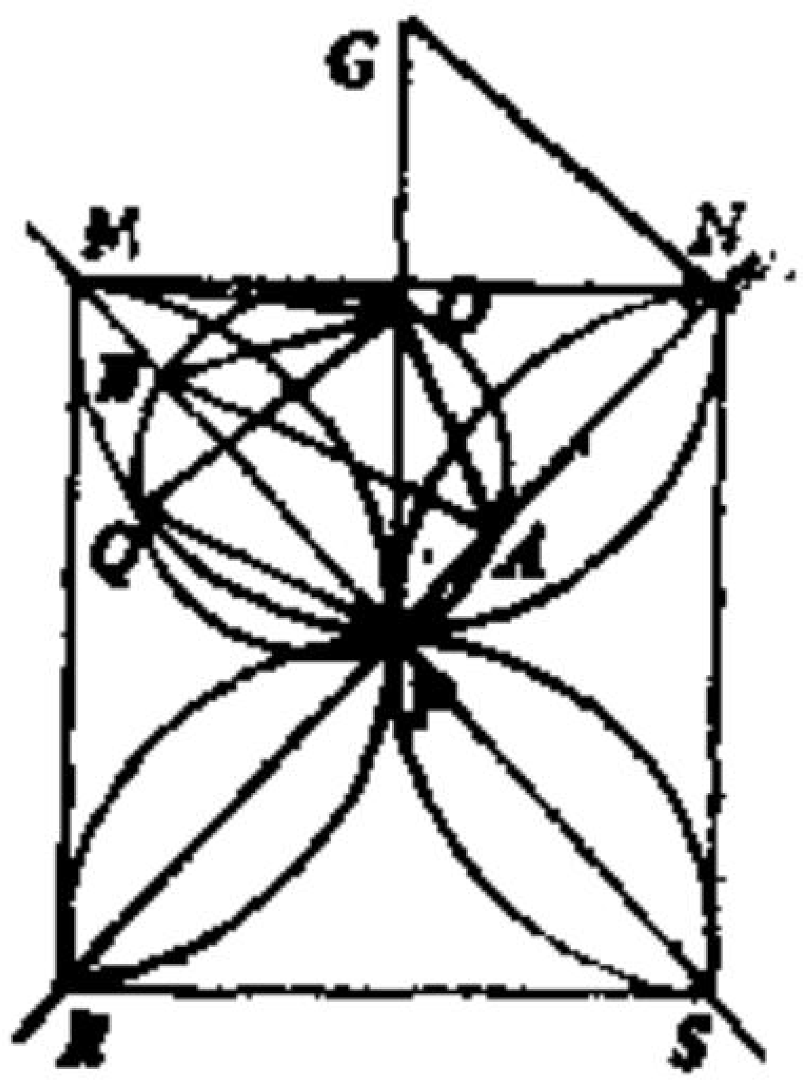
故 $2MA=OP=\dfrac{AB}{\sin\theta}=\dfrac{l}{\sin\theta}=l\csc\theta$.

因而 P 点的轨迹可能是以 O 为圆心，半径长为 $l\csc\theta$ 的圆上的圆弧 $\overset{\frown}{RPS}$.（证明略）

13．在相交于 P 点的两定直线上各取一点 A、B，使 $PA+PB$ 等于定长，再过 P 引直线平行于 AB 而交 $\odot PAB$ 于 Q，求 Q 点的轨迹.

探求：设 $PA+PB=l$ 为定长，作 M、N、R、S 四点使　$PM=PN=PR=PS=l$.

则当A、B重合于P时，有B、A将分别重合于M、S与N、R．因而M、N、R、S均为轨迹上的端点．又当A、B为PN、PM的中点时，$BA /\!/ MN$，有P点为$\odot PAB$的切点，故P亦为轨迹上的点，故所求轨迹可能为圆弧．



图复四—13

作$\angle MPN$的平分线交过N所作PN的垂线于G，则G为定点，且PG的中点O亦为定点．以O为圆心、OP为半径的圆过M、N．

作任意情况下的Q，由$\triangle OMB \cong \triangle OPA$，得$O$点在$\odot PAB$上，且有$OQ=OP$．

故Q点的轨迹可能是$\overset{\frown}{MPN}$、$\overset{\frown}{MPR}$、$\overset{\frown}{SPR}$，$\overset{\frown}{SPN}$．（证明略）

14．$\triangle ABC$内接于定圆，且BC边固定，设M是BC的中点，N是AM的中点，P是CN与AB的交点，求P点的轨迹．

探求：作特殊$\triangle A'BC$使$A'B$为$\odot O$的直径，则所得轨迹上的点Q为定点．

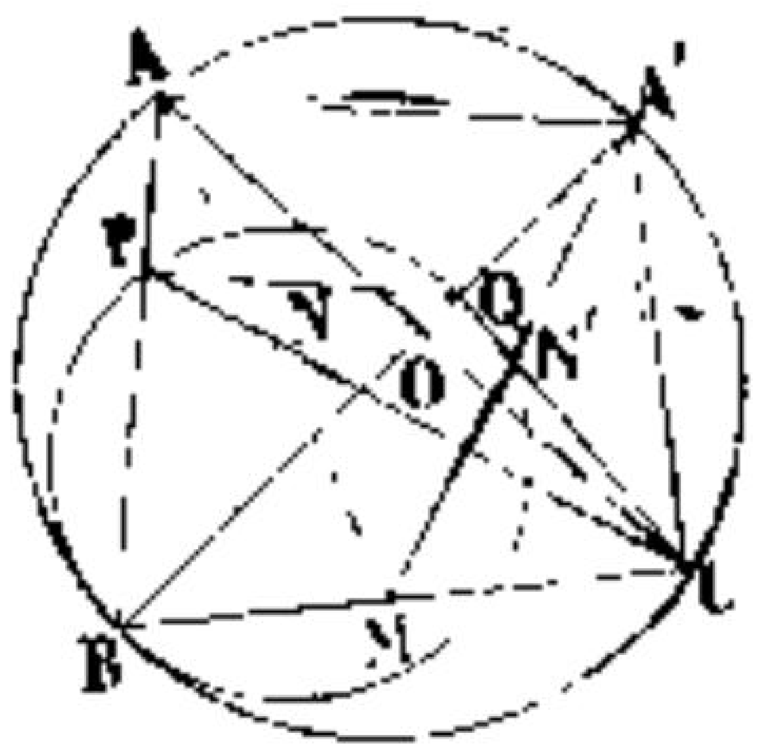
在$\triangle ABM$中，关于直线CNP由梅涅劳定理有：

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{NA}}{\overline{NM}} = 1，$$

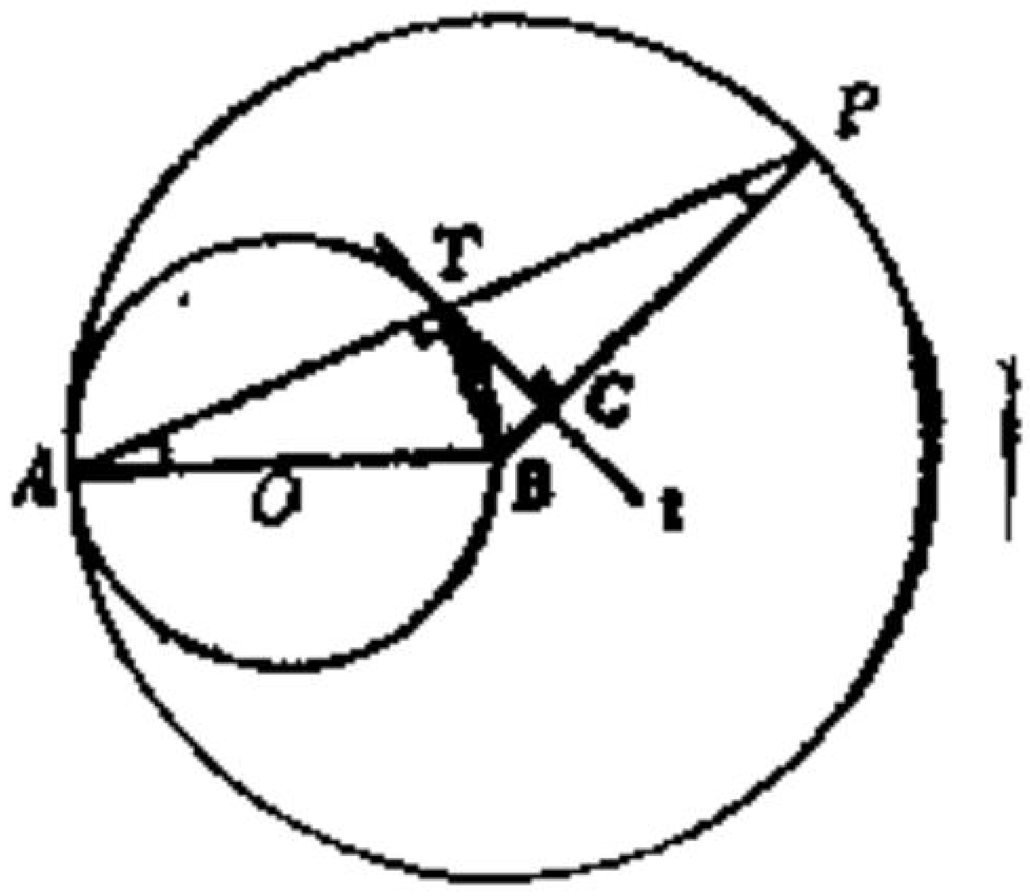
$\because \quad \frac{\overline{CM}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}，\frac{\overline{NA}}{\overline{NM}} = -1$，有 $\frac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = 2$．

可得$\frac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QA'}} = 2$ 故 $PQ /\!/ AA'$，$\angle BPQ = 90°$．

P 点的轨迹可能是以 BQ 为直径的圆，B 点为极限点．（证明略）



图复四—14



图复四—15

15．AB 是定圆的定直径，设任意切线 t 切定圆于 T，而 $BC\perp t$，求直线 AT 与 BC 的公共点的轨迹．

探求：∵ $\angle BPT=\angle BTC=\angle BAT$

∴ $BP=BA$

当 t 切⊙O 于 B 时，B 是切点而 BC 重合于 BA，且 C 点与 B 点重合，故 B 点为轨迹上的点．

则 P 点的轨迹为⊙$B(BA)$与孤立点 B．（证明略）

16、AB 是定圆的定直径，过 A 作切线 AQ，过 B 作直线交定圆于 C，在 BC 上取一点 P，引 $PQ\perp AQ$，若 $PQ=PC$，求 P 点的轨迹．

探求：取 BC 上的两点 P、P' 使满足所给条件，则有

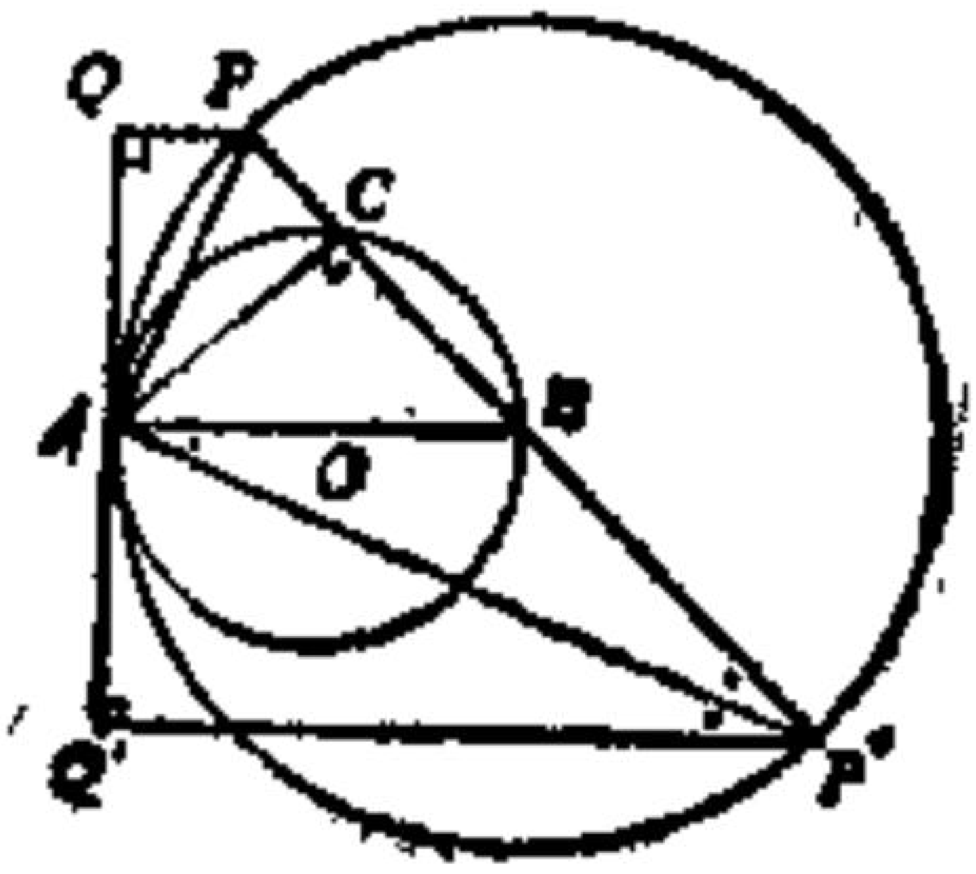
$\triangle PAQ\cong\triangle PAC$，

$\triangle P'AQ'\cong\triangle P'AC$．

且 $PQ\parallel BA\parallel P'Q'$

∴ $BP=BA=BP'$，

故 P 点的轨迹可能是以 B 为圆心，



图复四—16

BA为半径的圆，A为极限点．（证明略）

17．设A是定圆⊙O上的定点，l是过O且垂直于OA的直线，自A引直线交⊙O于B，交l于C，求过B所作⊙O的切线与过C所作l的垂线之公共点的轨迹．

探求：作$OD\perp AB$于D，由P、O、B、C四点共圆．

有$\angle POC=\angle PBC=\angle AOD=\angle ACO$，

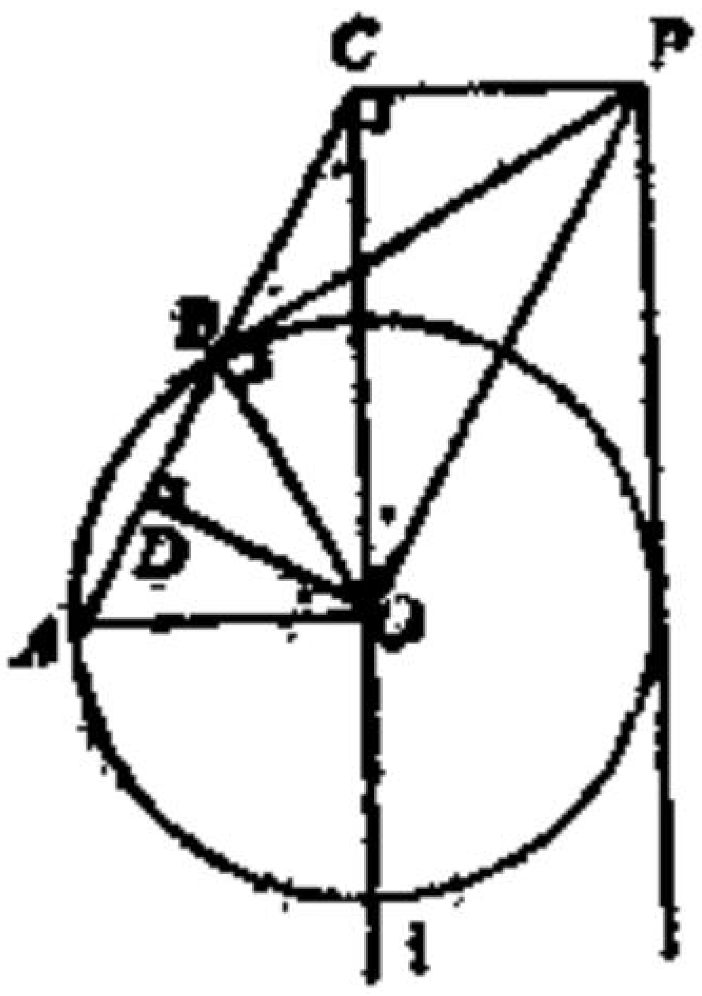
∴　$POAC$为平行四边形．

故　$PC=OA=r$

由于l是过O点的定直线，C是l上的点．

当C在l上移动时，CP有定值，

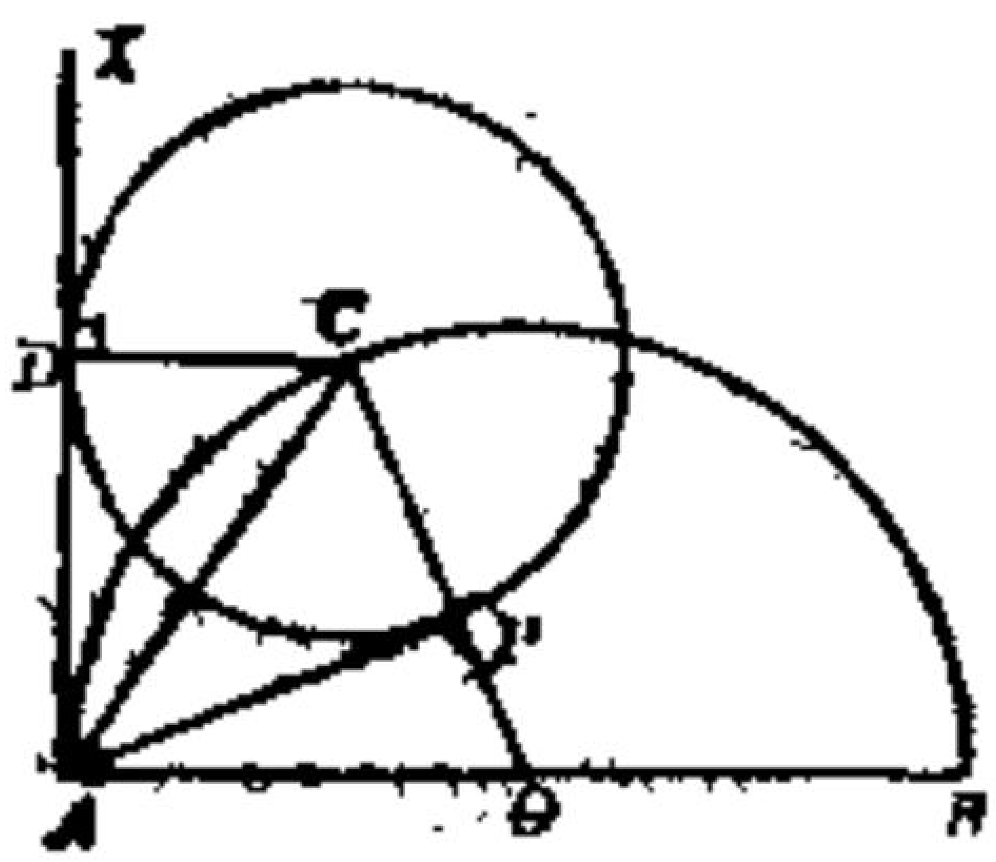
故P点的轨迹是直线l'，其与l的距离为r．（证明略）



图复四—17

18．设AB是定半圆形的直径，半线AX垂直于AB且与半圆同在AB的一侧，以半圆上的点为圆心作圆使切半线AX，再自A向所作圆另引切线，求切点的轨迹．

探求：当圆心C取在B时，则切点P重合于A，当圆心C取在半圆$\overset{\frown}{AB}$的中点时，切点P重合于O．故A、O两点是轨迹上的特殊点．



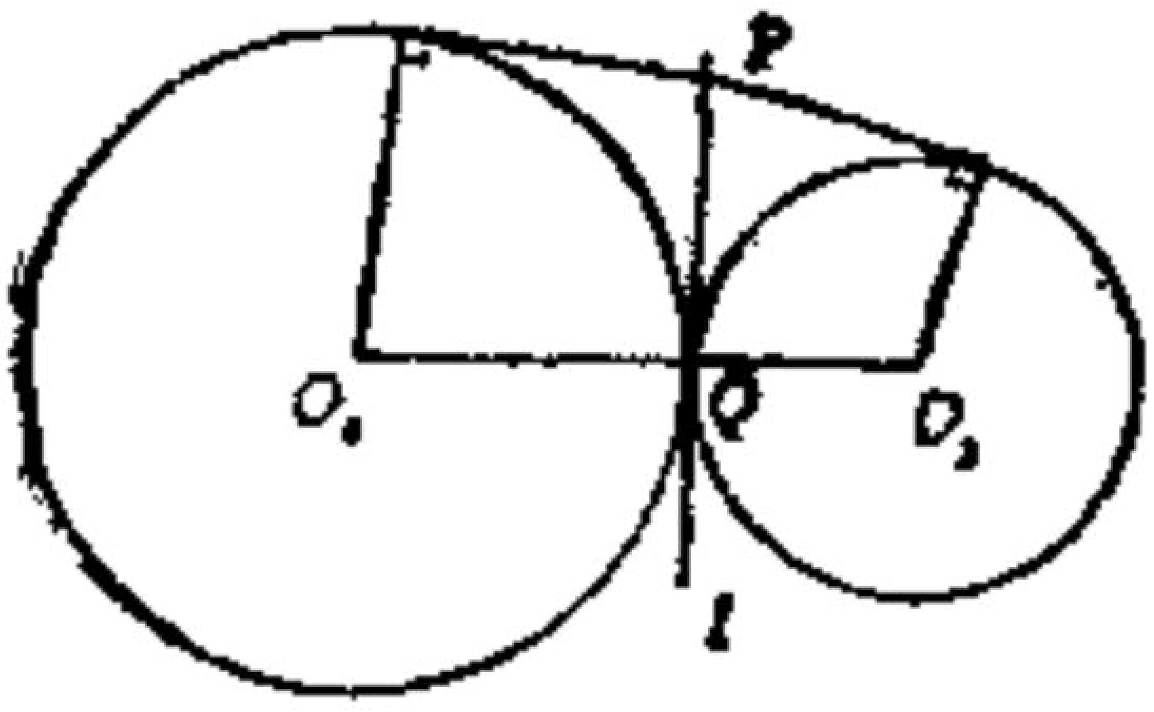
图复四—18

由$\triangle ACD\cong\triangle ACP$，且$\angle CAD$是⊙$O$的弦切角，有

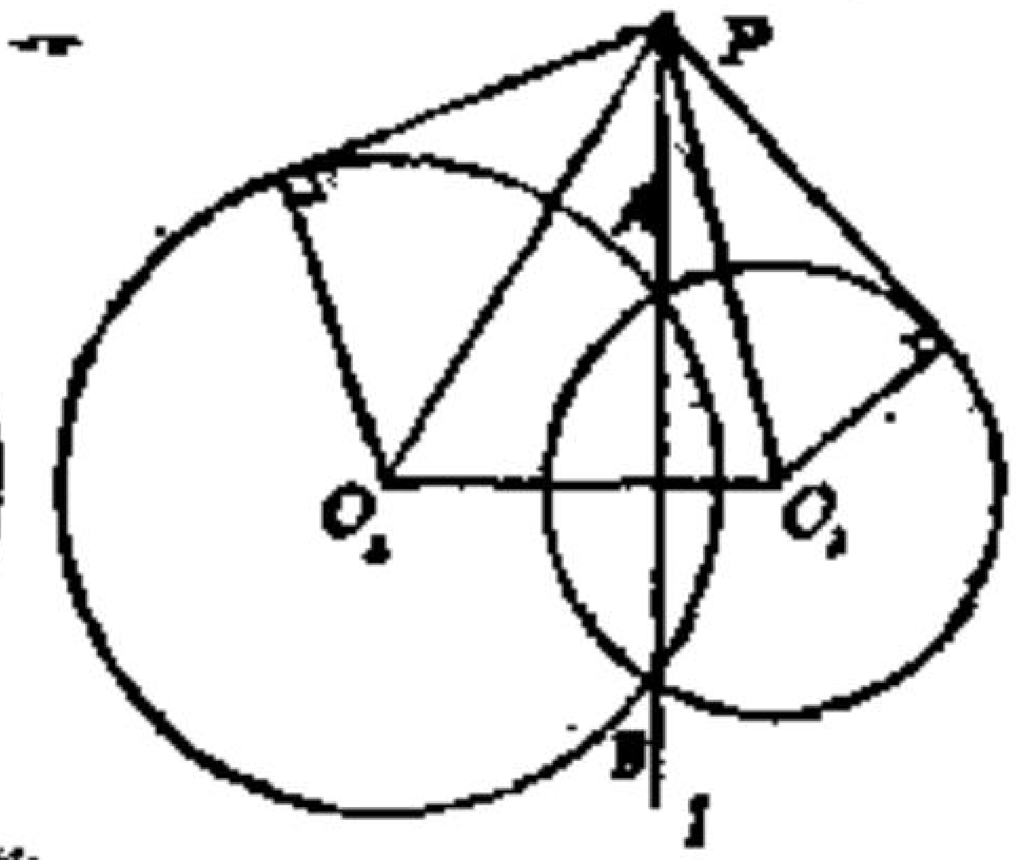
$\angle AOC=\angle DAP$　　　　∴　$\angle APO=90°$

故P点的轨迹可能是以AO为直径的圆.
(证明略)

19. 求至两定圆有相等切线的点的轨迹.

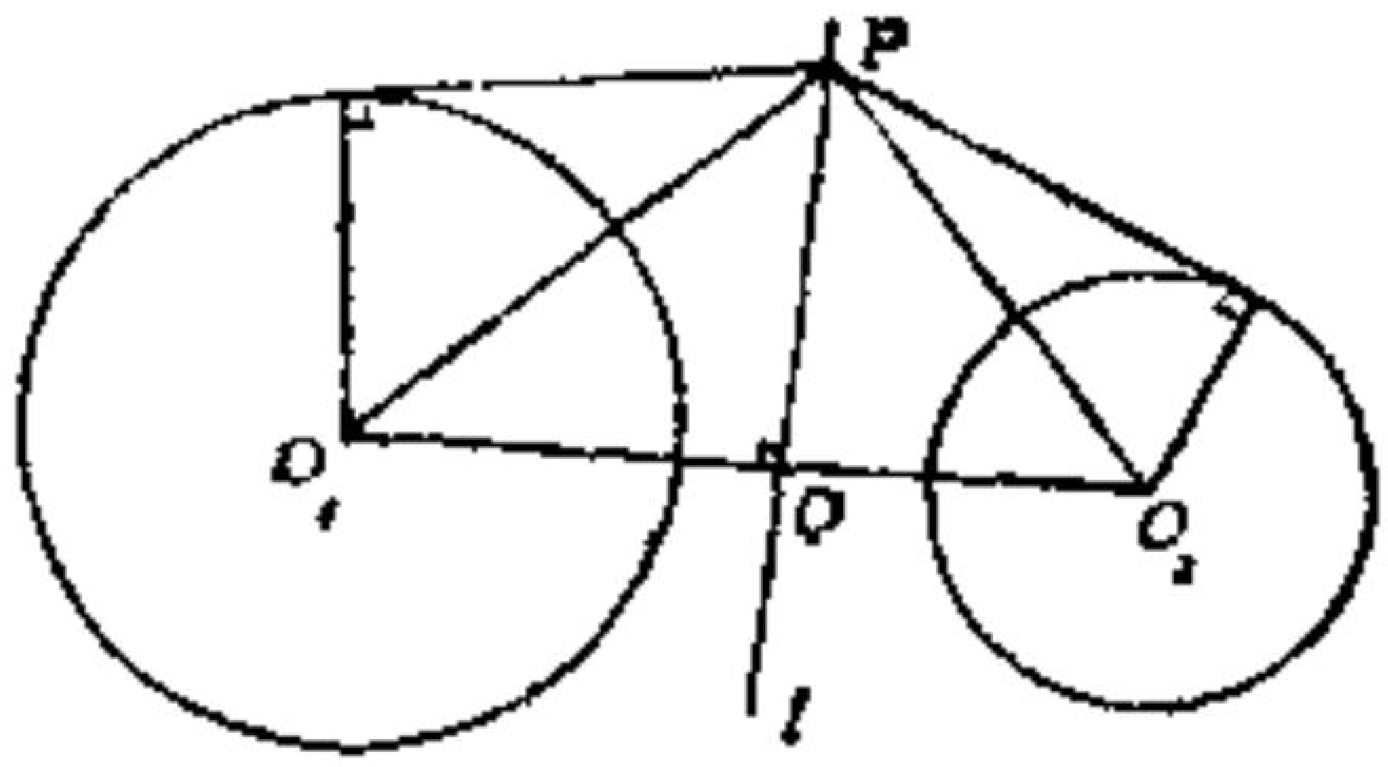


图复四—19(1)



图复四—19(2)

探求：由例题66可得有相等切线的点P的轨迹为直线l，当两定圆相交时，直线l应除去公弦AB；当两圆相离时的Q点位置类似于例题65方式处理.（证明略）



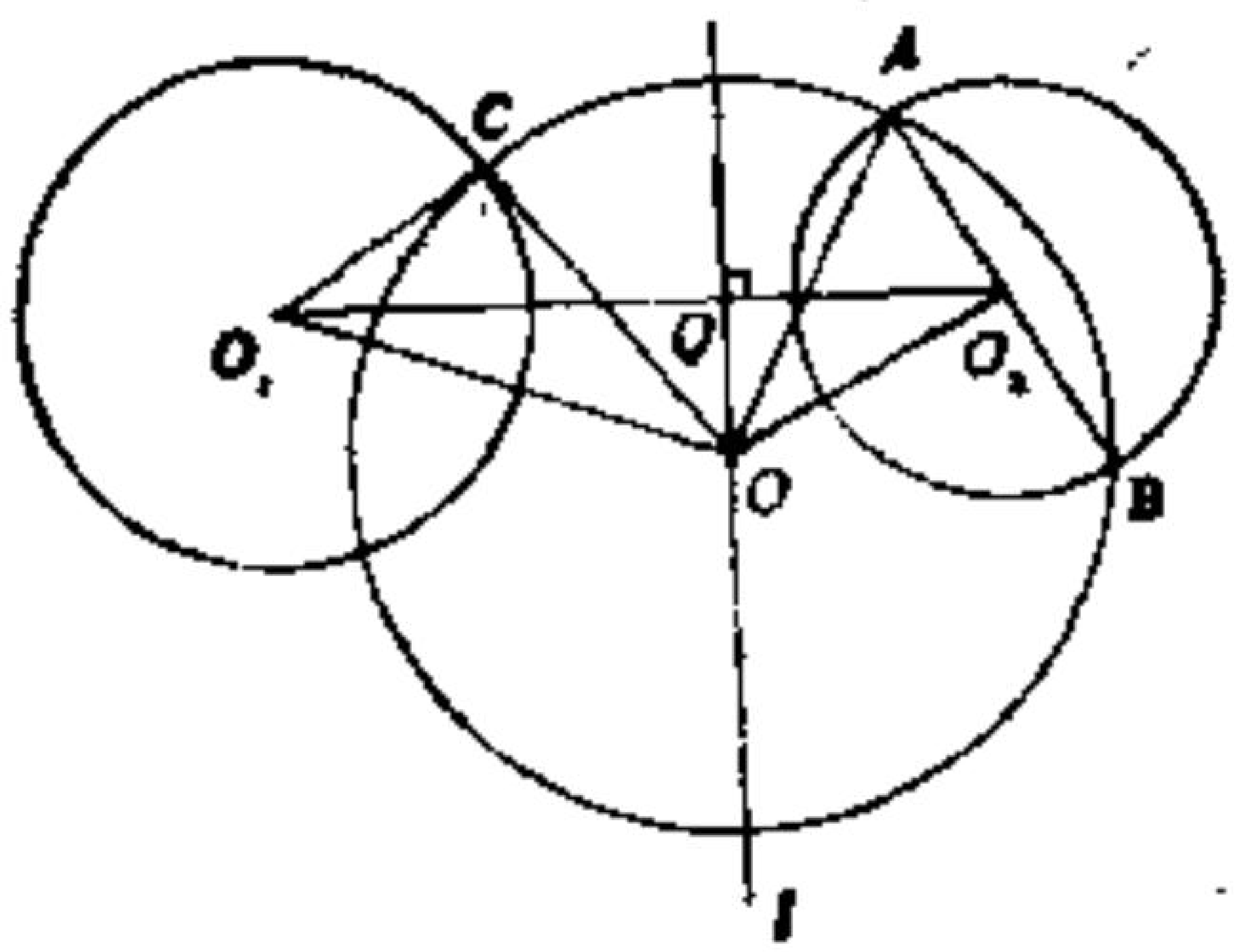
图复四—19(3)

20. 正交于一定圆而径割另一定圆的圆，求其圆心的轨迹.

探求：设$\odot O$与$\odot O_1$正交且径割$\odot O_2$. 即$OC\perp O_1C$，$\odot O$交$\odot O_2$于其直径AB.

$\therefore\ \overline{OO_1}^2=\overline{OC}^2+\overline{O_1C}^2$,

$\overline{OO_2}^2=\overline{OA}^2-\overline{O_2A}^2$



图复四—20

两式相减得 $\overline{OO_1}^2-\overline{OO_2}^2=\overline{O_1C}^2+\overline{O_2A}^2=r_1^2+r_2^2=k$

因 O_1、O_2 是定点，且 k 为定值．由例题65知，O 点的轨迹为垂直于 O_1O_2 的直线 l．（证明略）

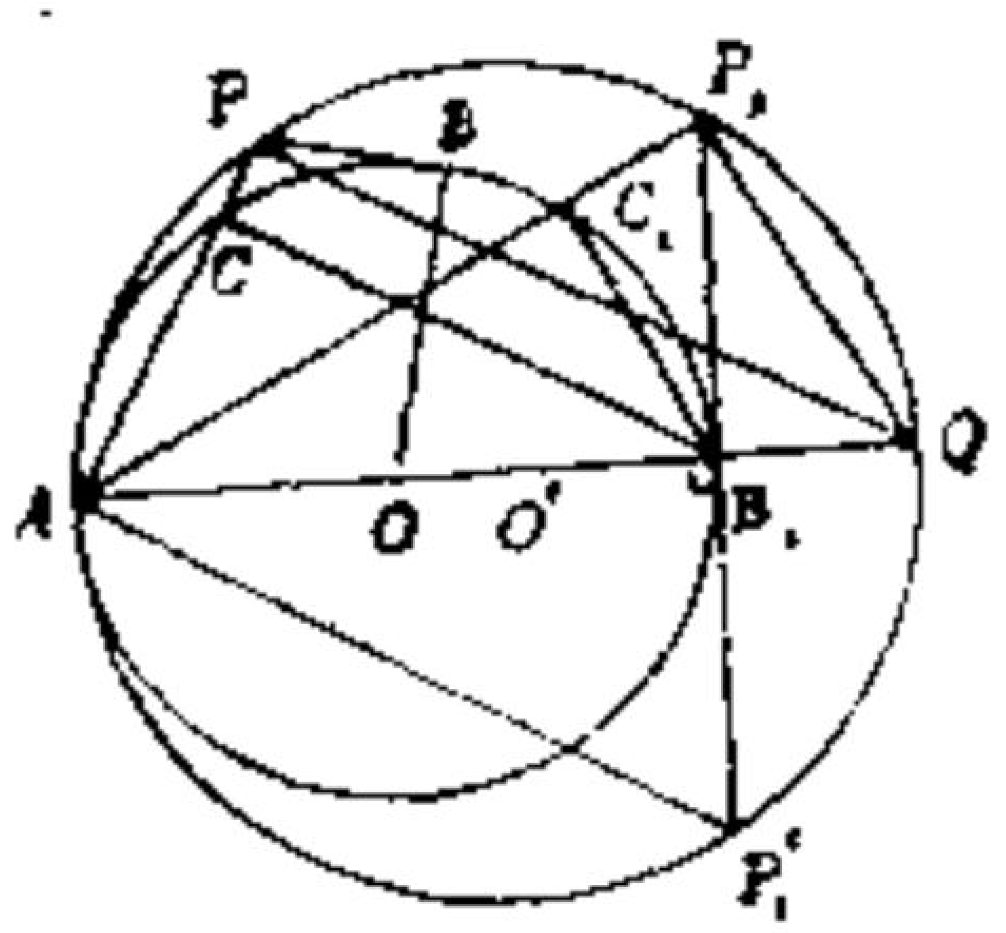
21．设 A 是定圆上的定点，B 是这圆上的动点，在过 B 的切线上有 P 点合于 $\frac{PA}{PB}=k$，k 是正常数，求 P 点的轨迹．

探求：当 B 在 B_1 时，作 P_1、P_1' 使满足比例要求，即

$$\frac{P_1A}{P_1B_1}=k,\ \frac{P_1'A}{P_1'B_1}=k,$$ 且 P_1A 交⊙O 于 C_1．

有 $P_1B_1^2=P_1A\cdot P_1C_1$

$$\therefore\ \frac{P_1A^2}{P_1B_1^2}=\frac{P_1A^2}{P_1A\cdot P_1C_1}=\frac{P_1A}{P_1C_1}=k^2.$$



图复四—21

当 B 趋于 A 时，P 也趋于 A，故 P 点的轨迹可能为圆，且圆心当在直径 AB_1 上．

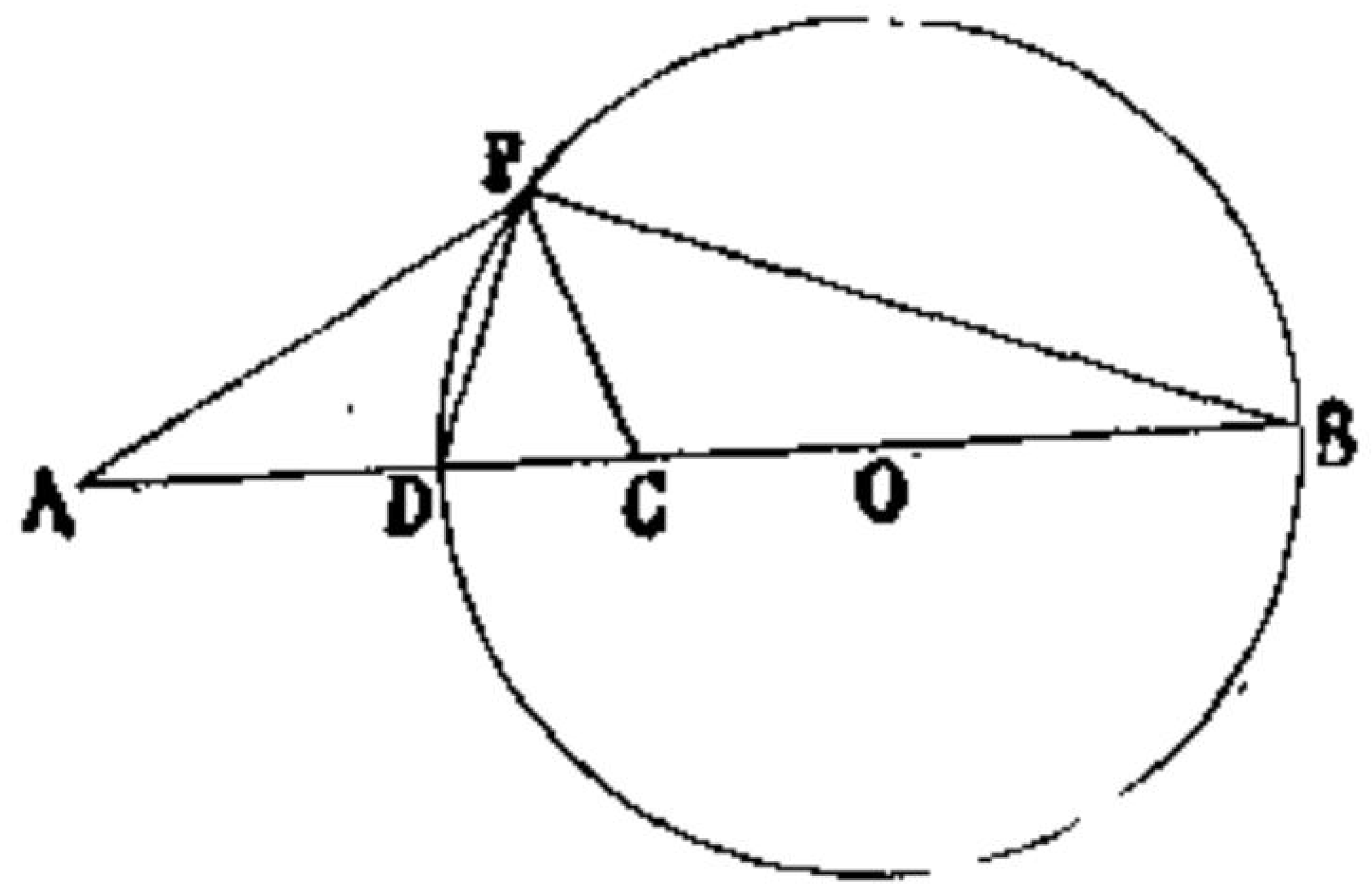
令 B_1 对应于 C_1，过 P_1 作 $P_1Q\parallel C_1B_1$ 交 AB_1 于 Q，则 Q 为轨迹上的特殊点，且 AQ 可能是 P 点所成圆的直径．

过⊙O 上任一点 B 作⊙O 的切线并取 P 点使 $\frac{PA}{PB}=k$ 且 PA 交⊙O 于 C．连 PQ、CB_1 有

$$\frac{PA}{PC}=\frac{QA}{QB_1}=k^2,$$

故 $PQ\parallel CB_1$，P 点在 AQ 为直径的圆上，所以 P 点的轨迹可能是以 AQ 为直径的圆，A 点为极限点．（证明略）

22. C 是定线段 AB 上的定点，P 是直线 AB 外的点，若$\angle APB$ 与$\angle BPC$ 互补，求 P 点的轨迹.



图复四—22

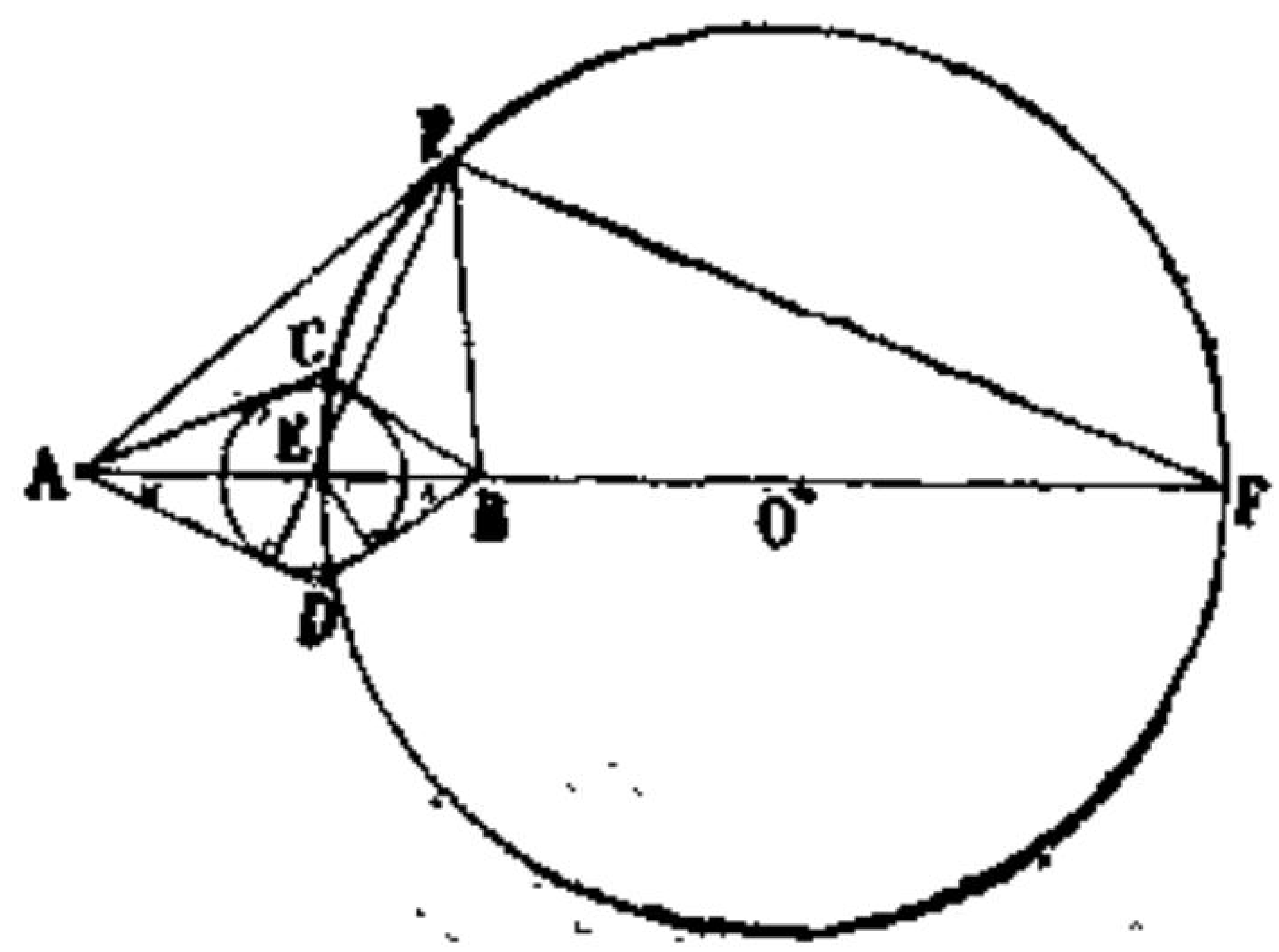
探求：因 A、C、B 均为定点，则$\frac{BA}{BC}=k$ 为定值，作 AC 的内分点 D，使$\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC}$，则 D 点亦为定点.

以 DB 为直径作圆$\odot O$，由例题64知，对圆上任一点 P，所构成的角$\angle APC$，PD、PB 为其内、外角的平分线且$\angle DPB$ 为直角. 则$\angle APB$ 与$\angle BPC$ 互补，故 P 点的轨迹可能是以 DB 为直径的圆.（证明略）

23. 设两定点对一圆的视角各等于定角，求圆心的轨迹.

探求：设两定点为 A、B，轨迹上的点 P 关于 AB 有对称性，故其轨迹可能为圆，且直径在 AB 上.

令两定角为 2α 与 2β，作筝形 $ACBD$，使$\angle CAD=2\alpha$，$\angle CBD=2\beta$，且



图复四—23

$\angle DAB=\alpha$，$\angle DBA=\beta$．由定理 100 的推论2°，等形有内切圆，作内切圆⊙E，其半径为 r，则 E 为轨迹上的在 AB 上的特殊点．且有 $EA=\dfrac{r}{\sin\alpha}$，$EB=\dfrac{r}{\sin\beta}$．

$\therefore\quad \dfrac{EA}{EB}=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=k$ 为定值．

作△APB 使 PE 为∠APB 的内角平分线，并作∠APB 的外角平分线使交 AB 于 F，由例题64知，P 点的轨迹可能是以 EF 为直径的圆．（证明略）．

24．△ABC 内接于定圆，且 BC 边固定，以 AB 为弦作圆使切于 AC，又以 AC 为弦作圆使切于 AB，求所作两圆第二交点的轨迹．

探求：在⊙ABC 上于 BC 的两侧取 A、A'．得第二交点 P、P'．

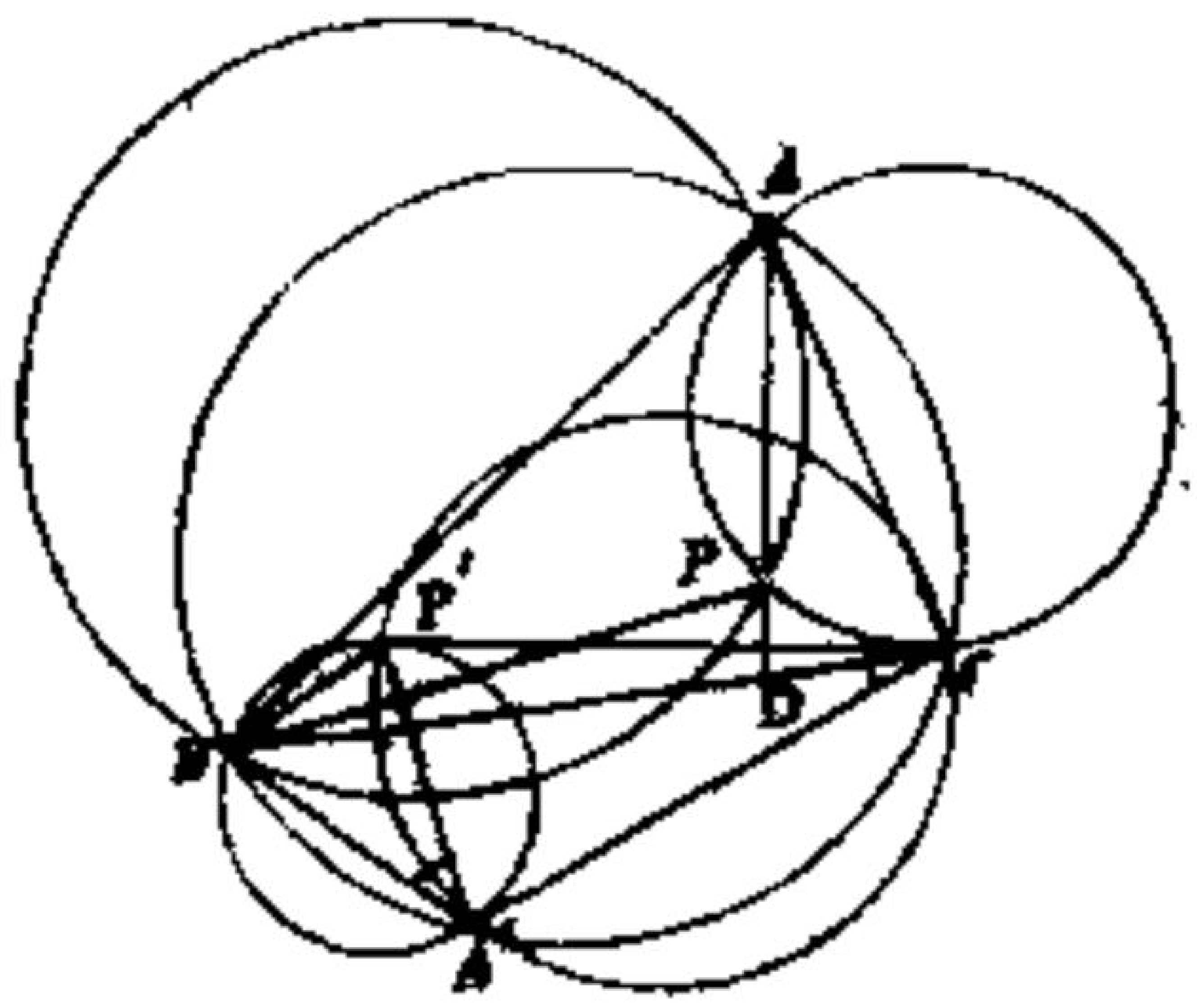
由弦切角有：

$\angle PAB=\angle PCA$，

$\angle PAC=\angle PBA$，

$\angle P'A'B=\angle P'CA'$，

$\angle P'A'C=\angle P'BA'$．



图复四—24

$\therefore\quad \angle BPC=\angle DPB+\angle DPC=\angle PBA+\angle BAC+\angle PCA=2\angle BAC$．

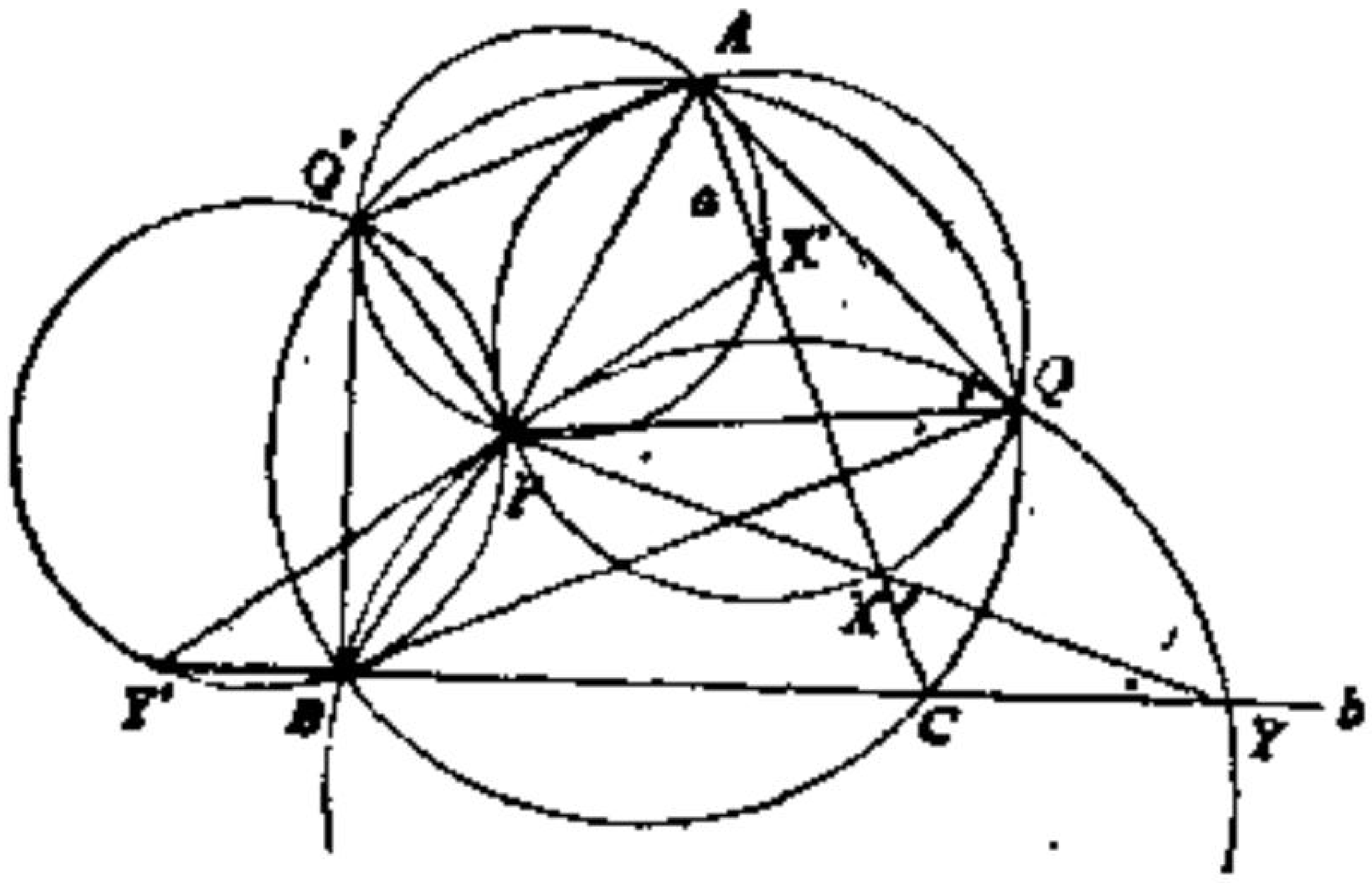
$\angle BP'C=360°-\angle P'BA'-\angle BA'C-\angle P'CA'$

$=360°-2\angle BA'C=2(180°-\angle BA'C)$

$=2\angle BAC$．

故 P 点的轨迹可能是以 BC 为弦的内接角为 $2\angle BAC$ 的弓形弧，B、C 两点为极限点．（证明略）

25．A、B各是定直线a、b上的定点，P是与A、B共线的定点，过P作直线交a、b于X、Y，求⊙PAX与⊙PBY第二交点的轨迹．



图复四—25

探求：设a、b相交于C，则C是轨迹上的点．作直线PXY与$PX'Y'$得轨迹上两点且分在AB两侧的Q、Q'，有

$$\angle AQB=\angle ACB,\ \angle AQ'B=180^\circ-\angle ACB,$$

故Q点的轨迹可能为⊙ABC，A、B两点为极限点．

（证明略）

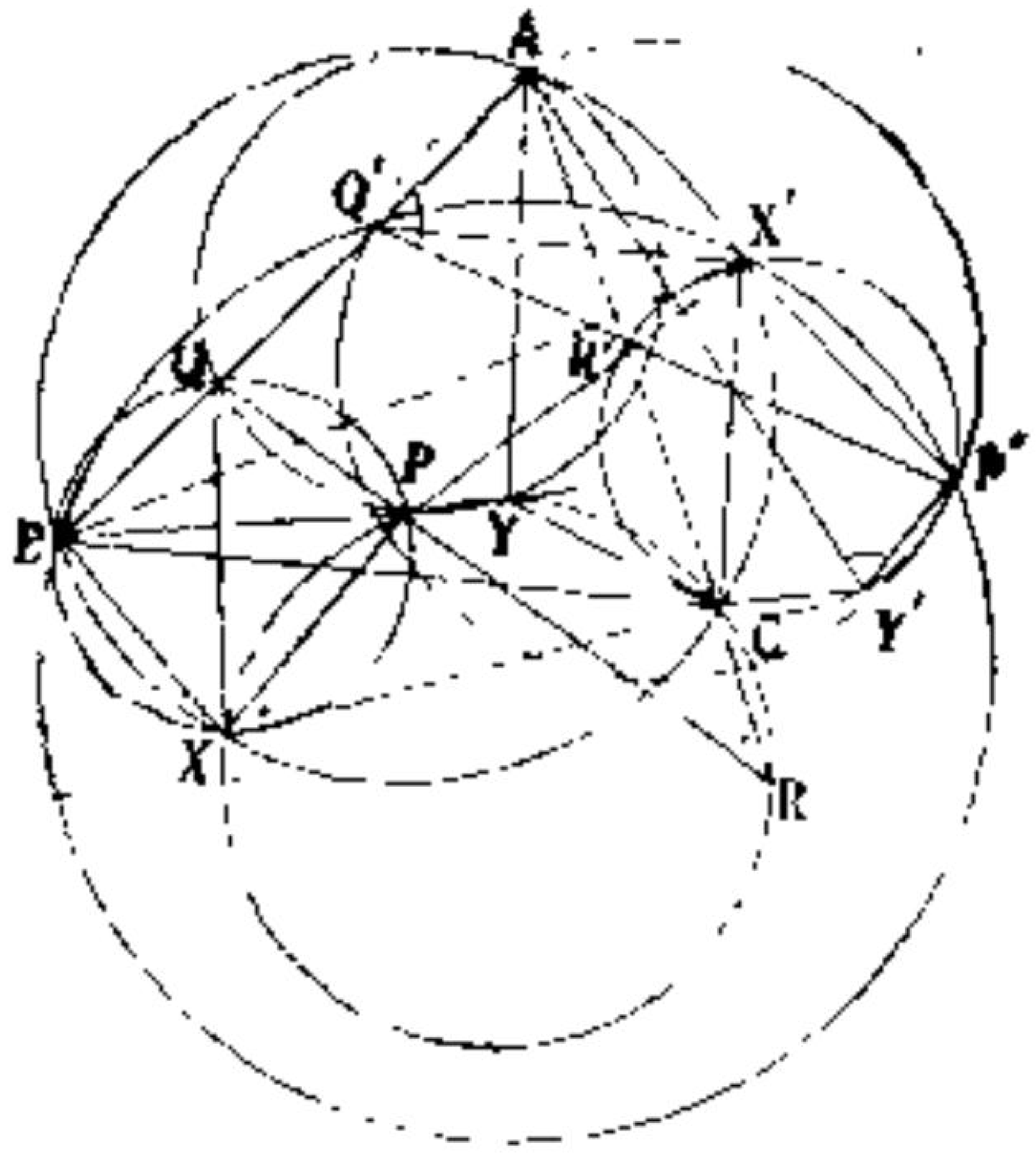
讨论：当$a\parallel b$时，轨迹为P点．

26．已知△ABC及一点P，过P作直线交直线AB、AC于Q、R．求：

（1）⊙PQB与⊙PRC；（2）⊙PQA与⊙PRC；

（3）⊙PRA与⊙PQB的第二交点的轨迹．

探求（1）：作⊙PQB与⊙PRC，⊙$P'Q'B$与⊙$P'R'C$使X、X'在BC的异侧，有



图复四—26(1—2)

$\angle BXC=\angle AQR+\angle ARQ$

$=180^\circ-\angle BAC$;

$\angle BX'C=\angle BX'P'-\angle CX'P'$

$=\angle BQ'P'-\angle CR'P'=\angle BAC$.

故X点的轨迹可能是⊙ABC．B、C为极限点．（证明略）．

（2）：作Y、Y'为⊙PQA与⊙PRC，⊙$P'Q'A$与⊙$P'R'C$的交点且在AC的异侧，有

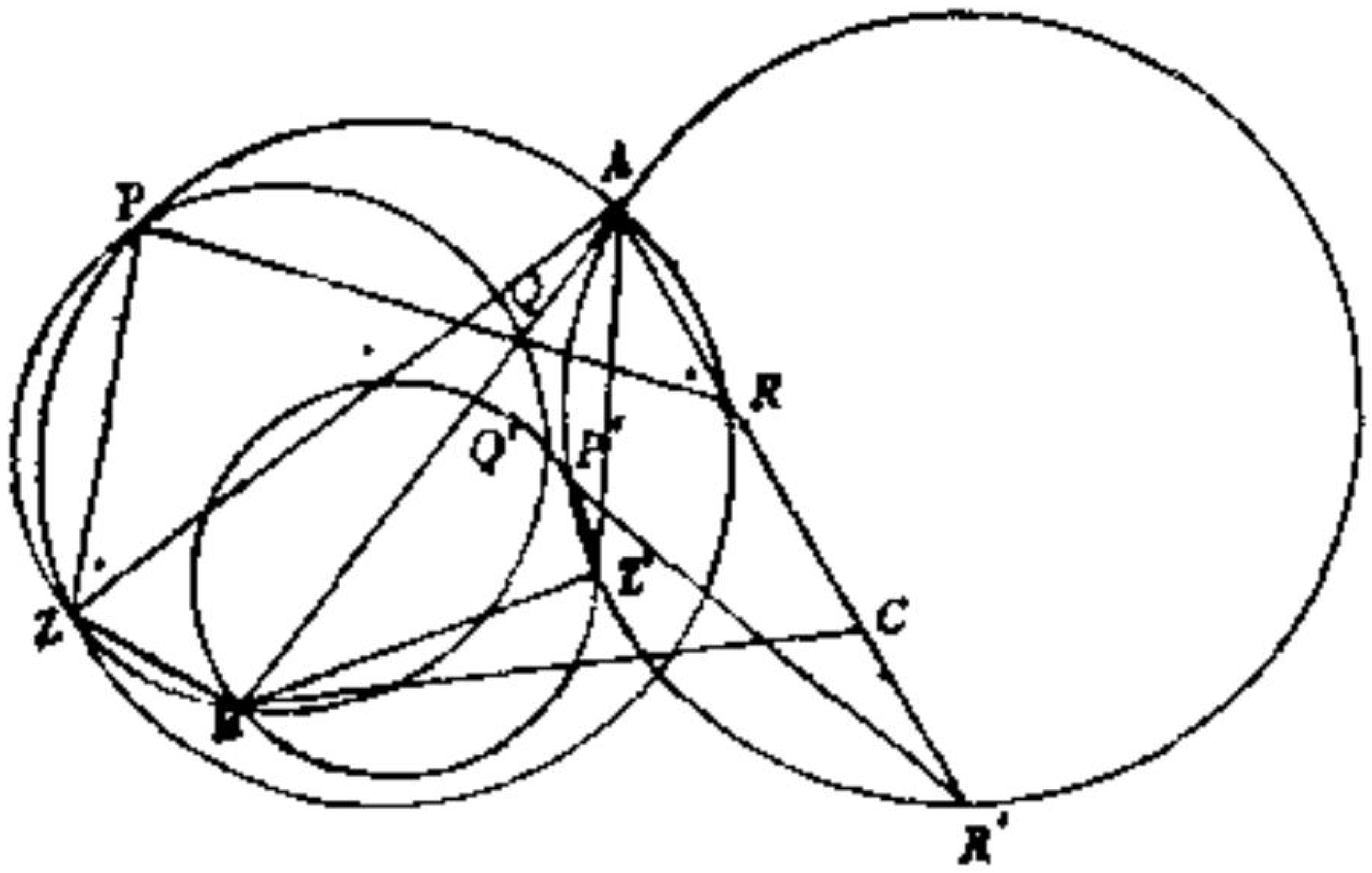
$\angle AYC=\angle AQR+\angle ARQ=180^\circ-\angle BAC$，

$\angle AY'C=\angle CY'P'-\angle AY'P'$

$=180^\circ-\angle CR'P'-\angle AQ'P$

$=\angle BAC$.

故Y点的轨迹可能是以AC为弦，且切AB于A的圆、A、C两点为极限点．（证明略）



图复四—26(3)

(3)：Z、Z′ 是⊙PRA与⊙PQB，⊙P′R′A与⊙P′Q′B的交点且在AB的异侧．有

$\angle AZB=\angle PZB-\angle PZA=180^\circ-\angle PQB-\angle PRA$

$=\angle QAR=\angle BAC$．

$\angle AZ'B=\angle AZP'+\angle BZ'P'=\angle AR'P'+\angle AQ'P'$

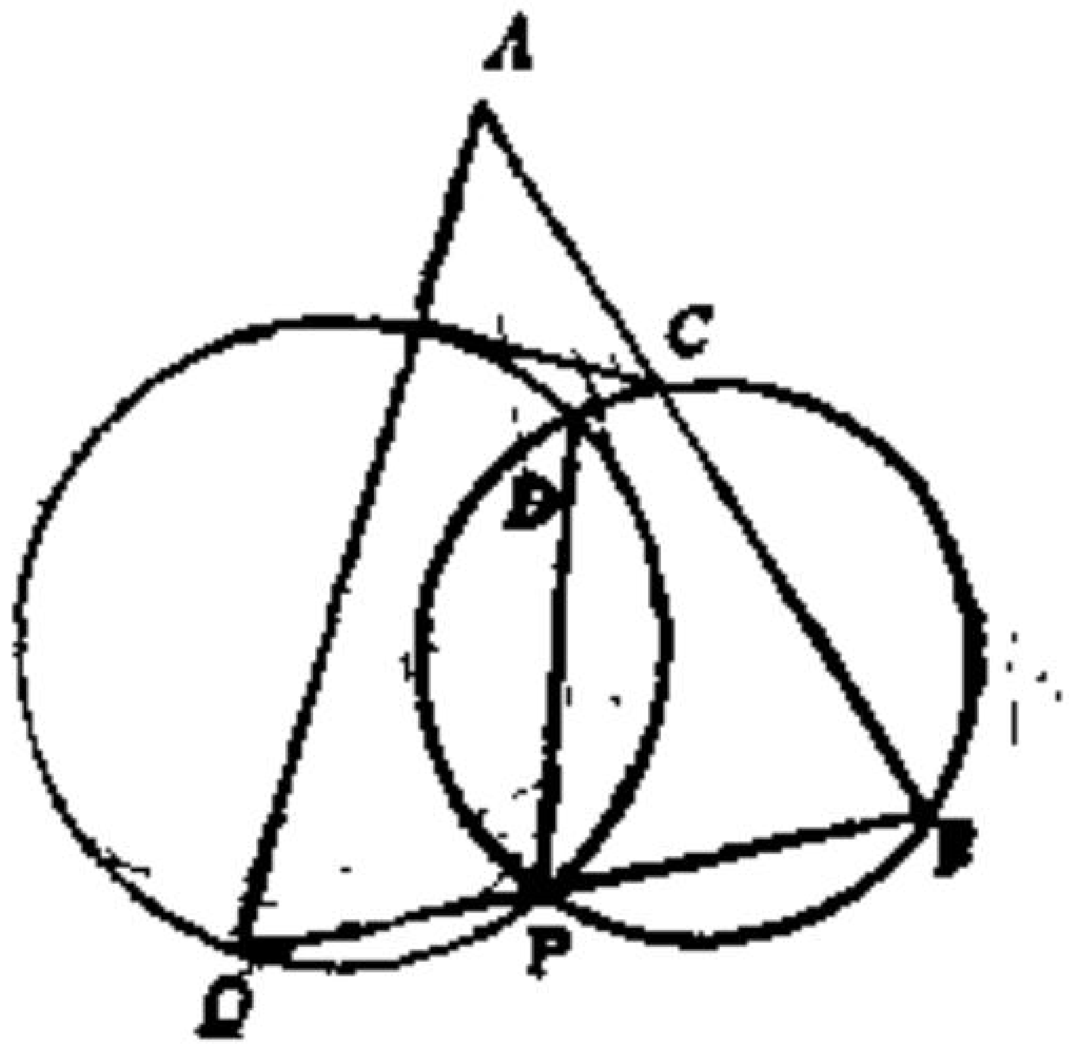
$=180^\circ-\angle BAC$．

故Z点的轨迹可能是以AB为弦，且切AC于A的圆，A、B两点为极限点．（证明略）

27．P是甲乙两定圆的一交点，B、C各是这两圆上的定点，过P作直线交甲圆于Q，交乙圆于R，求连线BQ与CR的交点的轨迹．

探求：作公弦 PD，则 D 是轨迹上的点．

因 $\angle BDC=\angle Q+\angle R$ 为定角且 $\angle A$ 与 $\angle BDC$ 互补．故 A 点的轨迹可能是 $\odot DBC$．B、C 两点为极限点．（证明略）



图复四—27

28．甲乙两定圆交于 P、Q，A 是甲圆上的动点，连 AP、AQ 交乙圆于 B、C，求 BC 弦的中点的轨迹．

探求：M 是 BC 的中点．

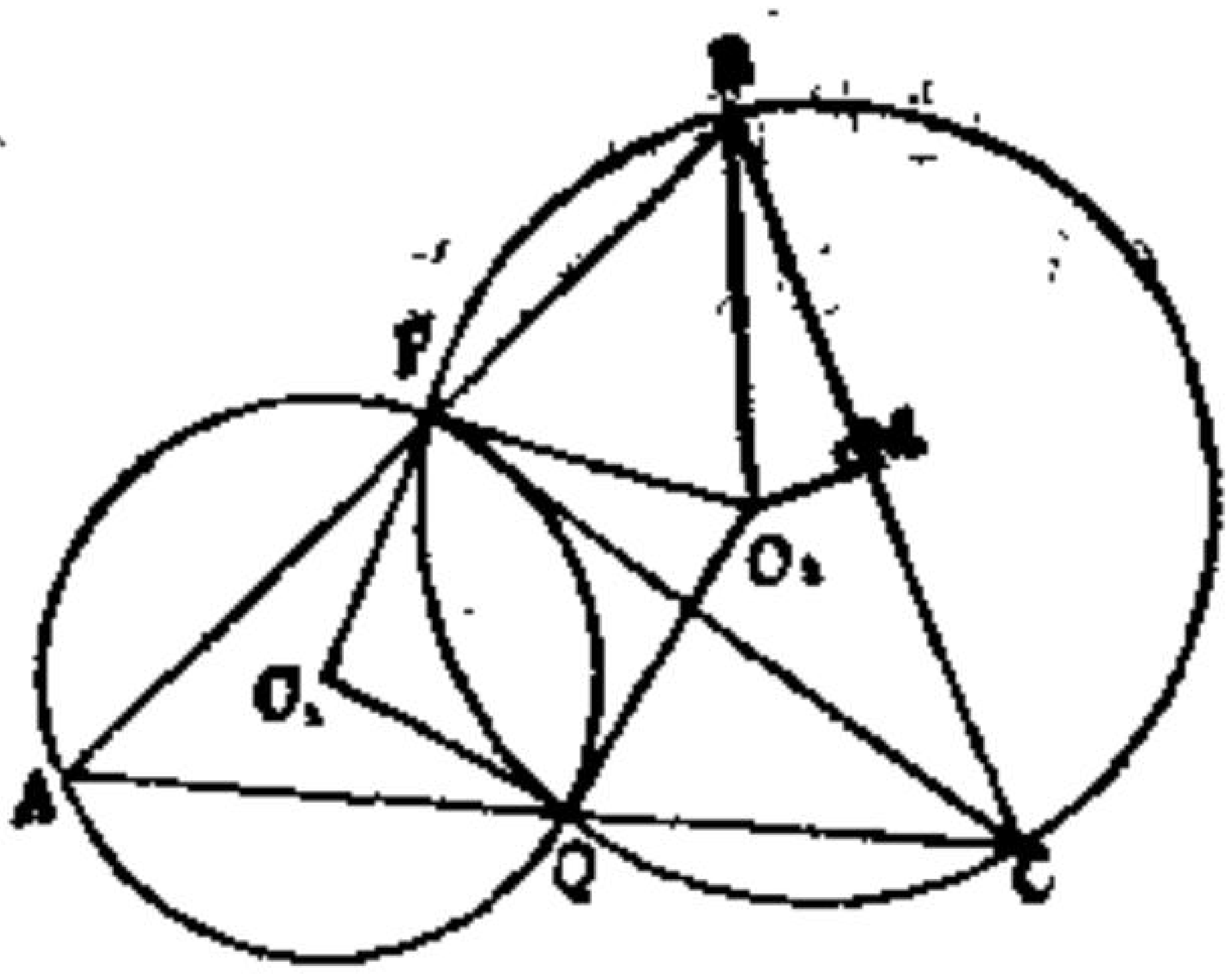
$\because\quad \angle BO_2M=\angle BPC=\angle PAC+\angle PCA$

$$=\frac{1}{2}(\angle PO_1Q+\angle PO_2Q)\text{为定值}.$$

$\therefore\quad O_2M=r_2\cos\angle BO_2M$ 为定值．

故 M 点的轨迹可能是以 O_2 为圆心，O_2M 为半径的圆．

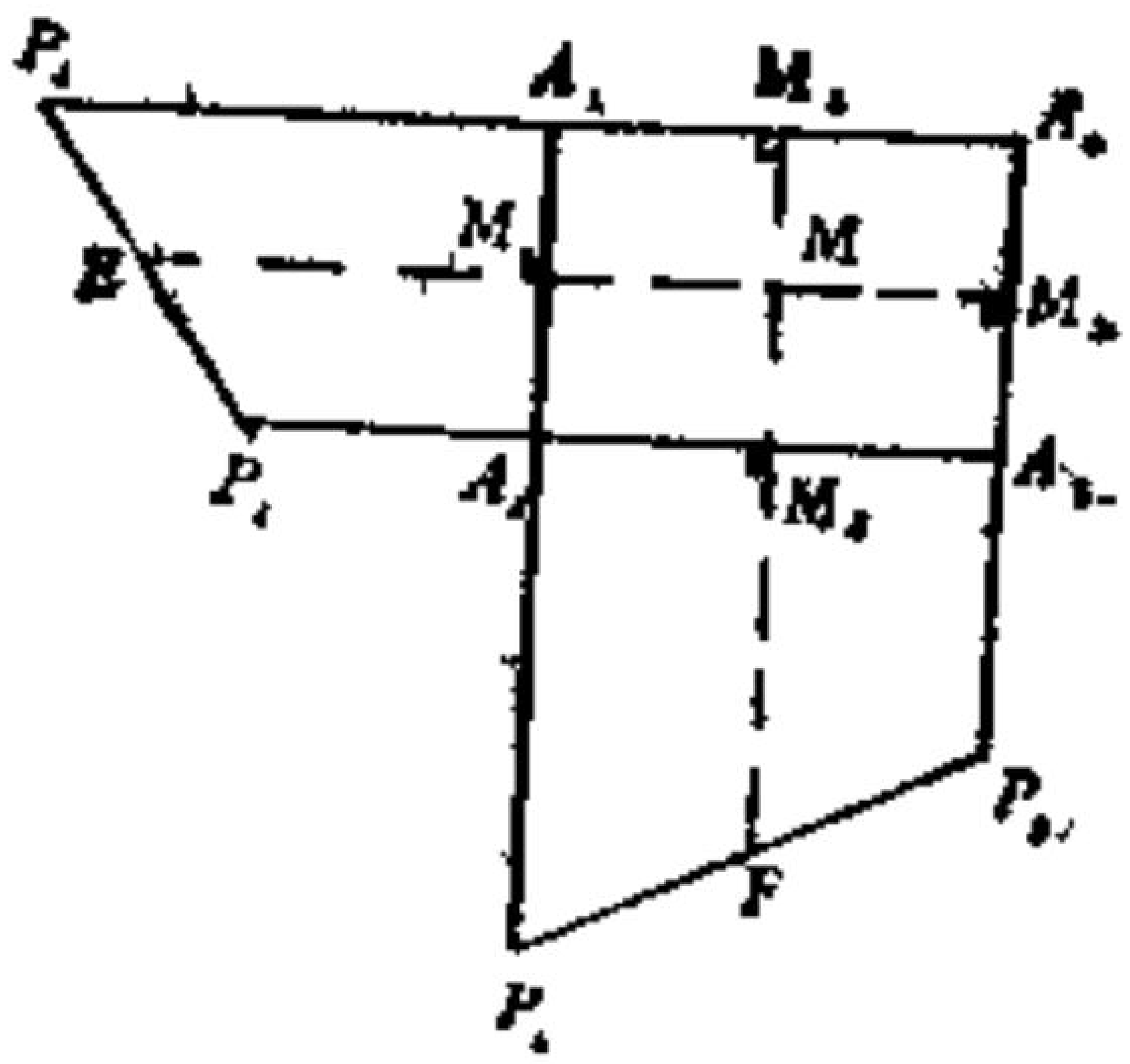
（证明略）．



图复四—28

29.设矩形各边（所在直线）分别通过四定点，求各边中点和矩形中心的轨迹．

探求：E、F是定点所连线段P_2P_4、P_1P_3的中点．故亦为定点．所以M_1、M_2、M_3、M_4的轨迹可能在以EP_1、FP_2、EP_3、FP_4为直径的圆上；M点的轨迹可能在以EF为直径的圆上．（证明略）



图复四—29

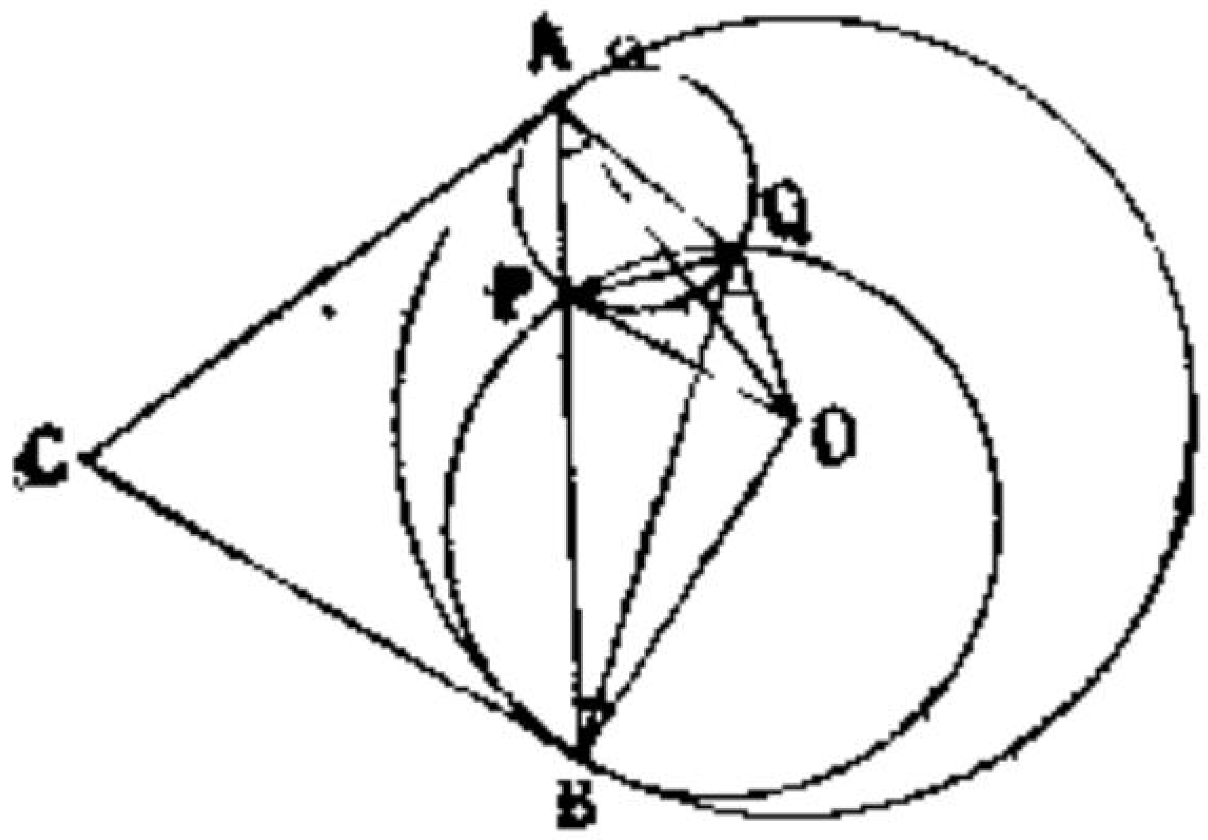
30.设P是定圆内的定点，过P作定圆的弦AB，又以AP、BP为弦各作圆使切于定圆，求所作两圆第二交点的轨迹．

探求：设两切线相交于C，则$\angle PQA=\angle BAC$，$\angle PQB=\angle ABC$．故A、C、B、O、Q五点共圆．

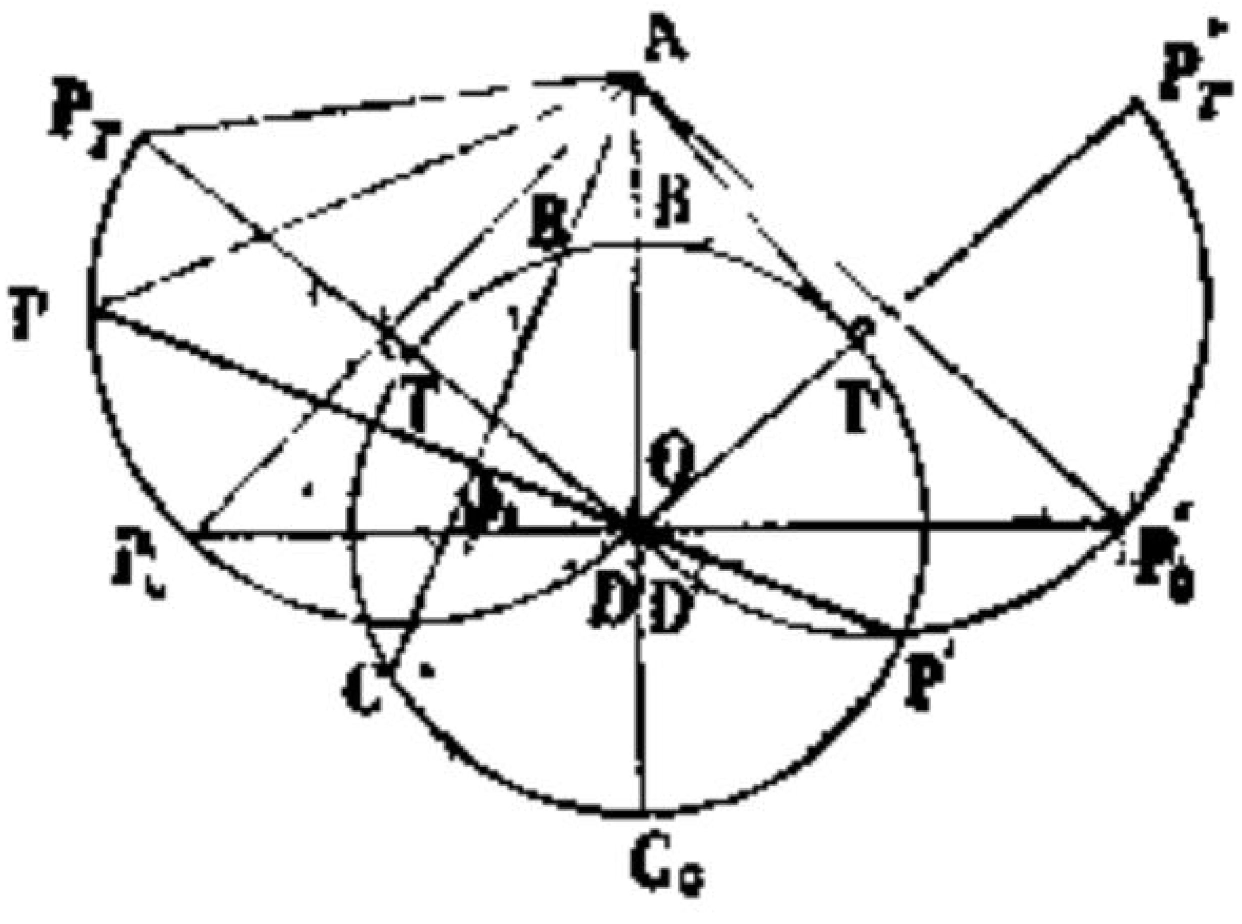
$\therefore\quad \angle PQO=\angle CBA+\angle BAO=\angle CBA+\angle ABO=90^\circ$．

当AB为直径时，Q与P重合；当P与O重合时，Q与O也重合．

故Q点的轨迹可能是OP为直径的圆．（证明略）



图复四—30



图复四—31

31. 自定圆外一定点 A 作割线 ABC，过 BC 弦的中点 M 引 $MP \perp BC$，若 $MP = MA$，求 P 点的轨迹．

探求：当 ABC 过圆心 O 时，有 P_O、P_O' 为定点；当 ABC 为切线位置 AT、AT' 时，得轨迹的终止位置 P_T、D' 与 P_T'、D；当 ABC 在一般位置时，有

$\angle APO = \angle AP_OO = 45°$．有 A、P、P_O、O 四点共圆，故 P 点的轨迹可能是以 AP_O、AP_O' 为直径的圆上的两段圆弧 $\overset{\frown}{P_TD}$ 与 $\overset{\frown}{P'_TD'}$．（证明略）．

32. 自定圆外一定点 P 作割线 PAB，在 AB 弦的两端引定圆的切线，求切线交点的轨迹．

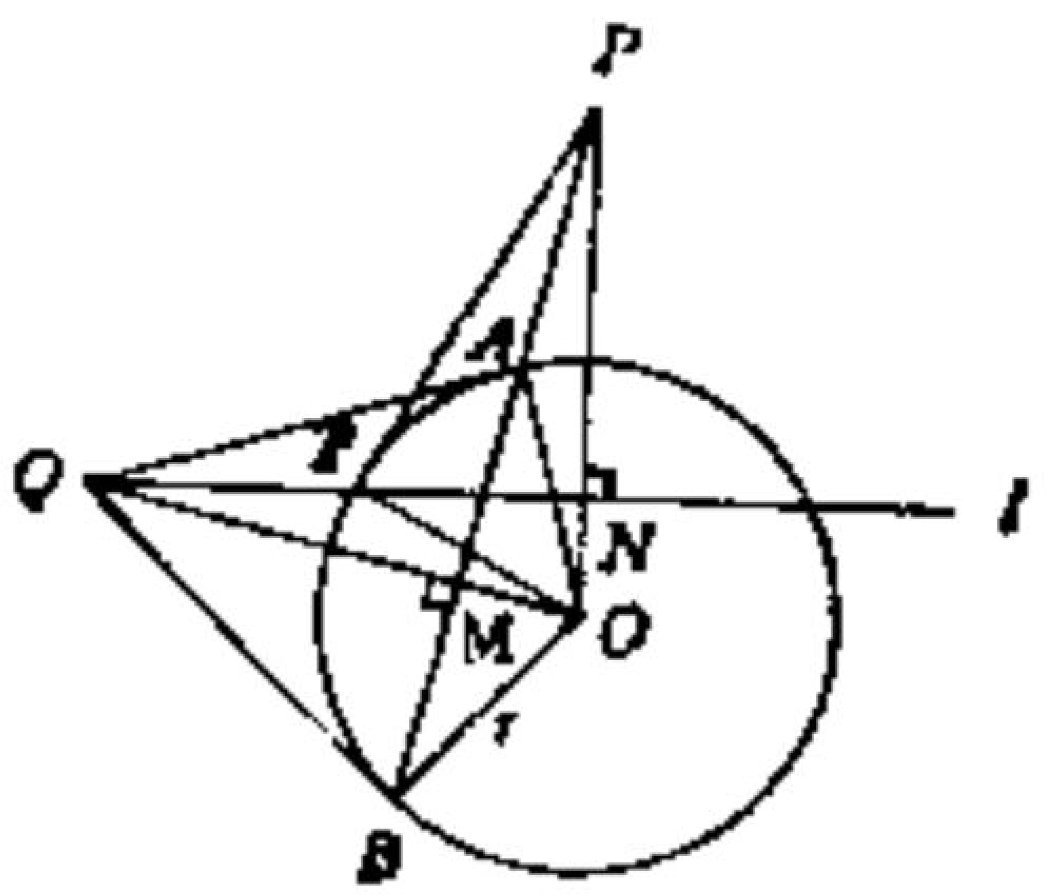
探求：作切线 PT 切 $\odot O(r)$ 于 T．$TN \perp OP$ 于 N．

又割线 PAB 在 AB 弦两端点所作切线的交点为 Q．则：

$OP \cdot ON = r^2 = OQ \cdot OM$，有 P、Q、M、N 四点共圆．

$\therefore \quad \angle QNP = \angle QMP = 90°$．

Q 点在垂直 OP 于 N 的直线 l 上．



图复四—32

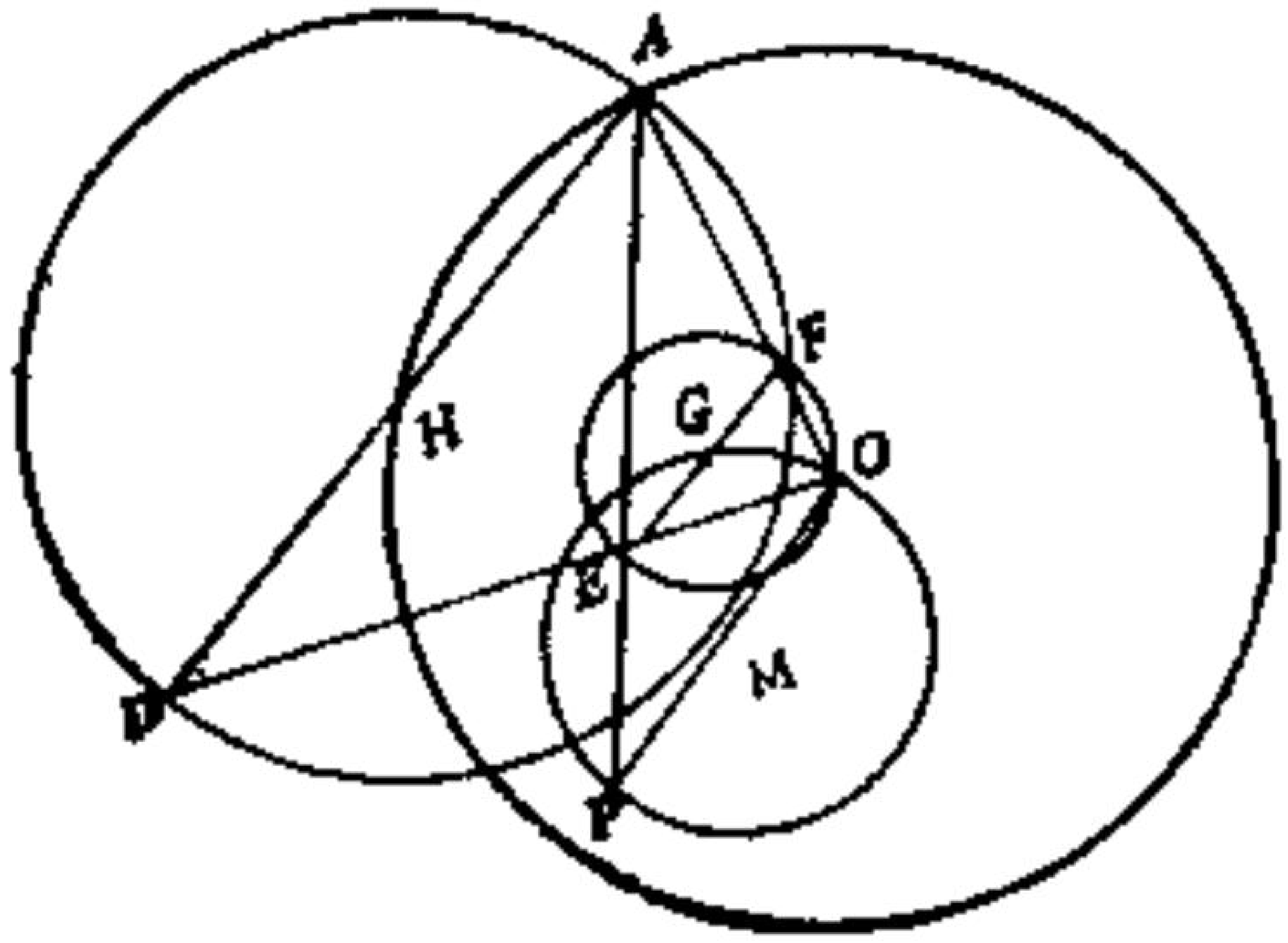
当 PAB 过圆心 O 时，两切线不相交，故切点 Q 的轨迹可能是直线 l 的圆外部分．（证明略）

33. A 是定圆上的定点，P 是这圆内的定点，过 P 作定

圆的弦 BC，求$\triangle ABC$的(1)重心；(2)垂心的轨迹.

探求：(1)：由习题二十一第3题有，BC弦的中点轨迹为以 OP 为直径的圆$\odot M$；

由于重心G在中线的$2/3$处，取E、F在AP、AO的$2/3$处，则重心的轨迹为以EF为直径的圆$\odot G$，即$\odot G$为QM的位似圆，以A点为位似中点，以$2/3$为位似系数；(证明略)



图复四—33

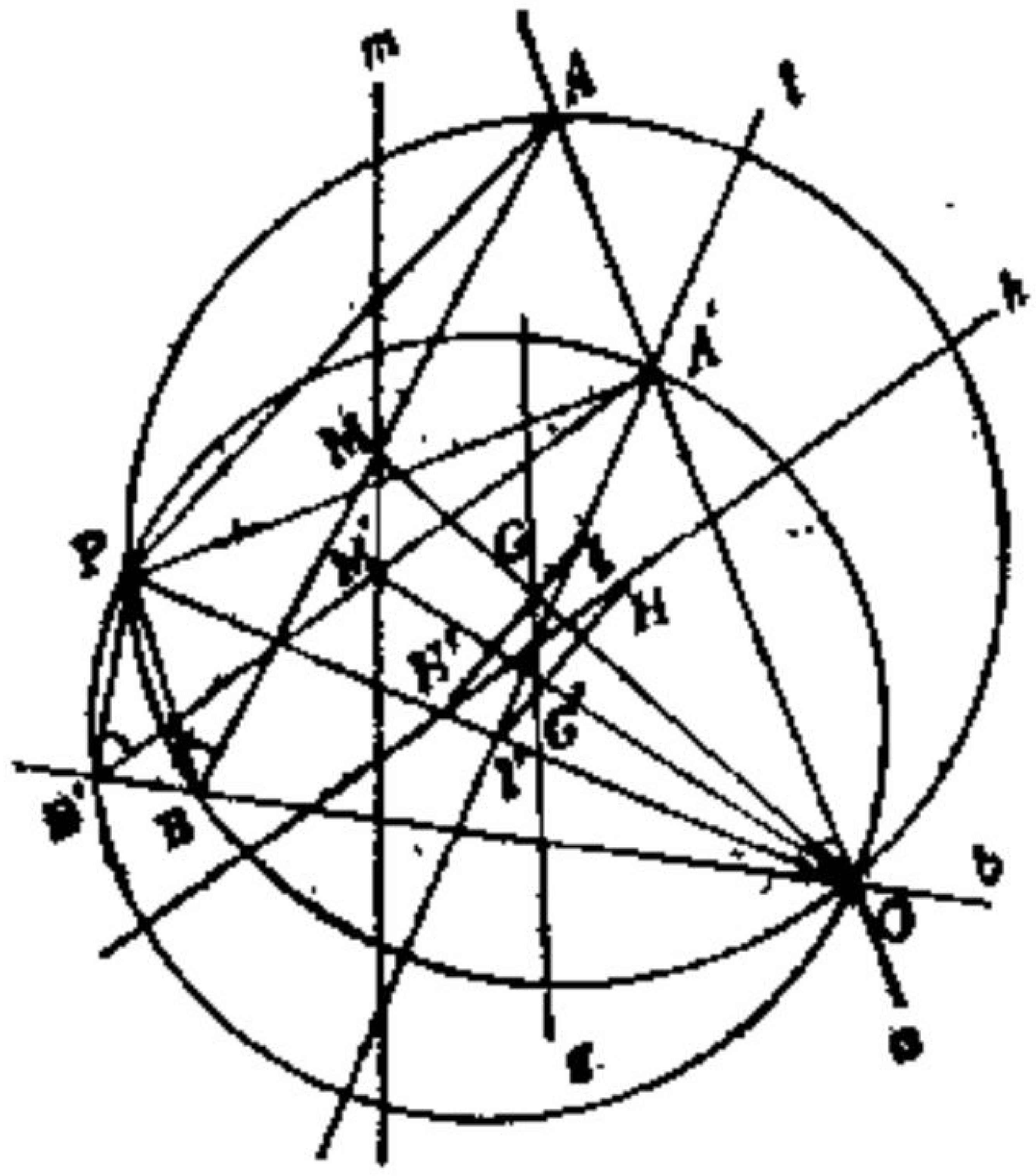
(2)：由例题44推论3°，三角形的垂心H、重心G、外心O在一直线上，且G在自O量起的$1/3$处，延长OE至ED使E为OD的三等分点，则垂心的轨迹为以AD为直径的圆$\odot H$，即$\odot H$是$\odot G$的位似圆，以O为位似中心，以3为位似系数.(证明略)

34. 设O是两定直线a、b的交点，P是线外的定点，通过O、P两点作圆设交a、b于A、B.

求 (1) AB弦的中点；(2) $\triangle OAB$的重心；

(3) $\triangle OAB$的垂心的轨迹.

探求（1）：作⊙P'、⊙I交a、b于A'、A，B'、B，有



图复四—34

$\angle PA'B'=\angle POB'$

$=\angle PAB$

$\angle PB'A'=\angle POA'$

$=\angle PBA$，

故$\triangle PAB\backsim\triangle PA'B'$，

且$\triangle PAM\backsim\triangle PA'M'$。

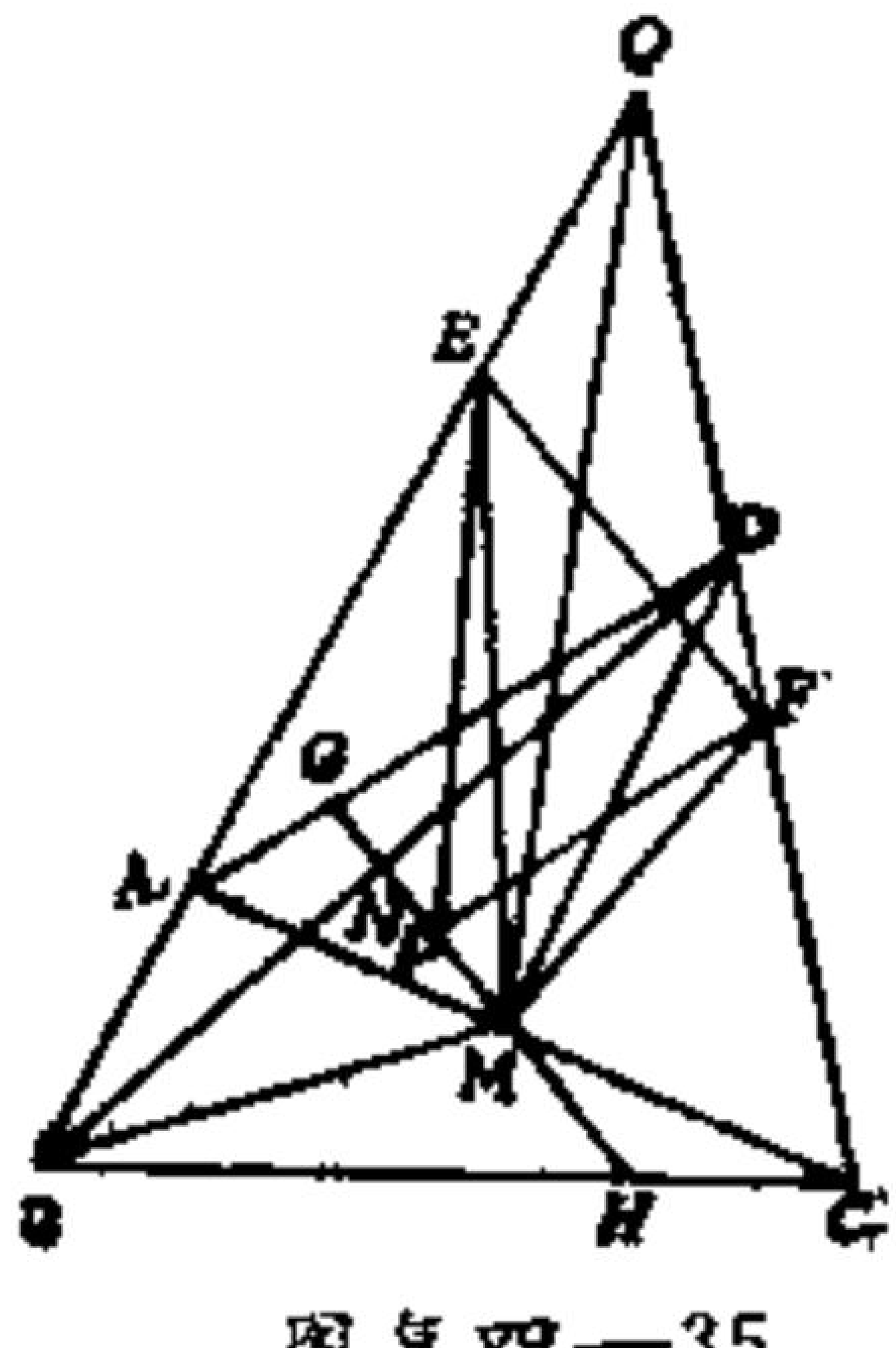
由习题二十三第27题，得M点的轨迹为直线m；

（2）：∵ $OG=\dfrac{2}{3}OM$，故重心G的轨迹为直线g，且$g/\!/m$。

（3）：$\triangle OAB$的外心在OP的中垂线l上，由于外心、重心、垂心三者共线，且重心在外心至垂心的1/3处，而重心的轨迹为直线g，故垂心的轨迹为直线h。（证明略）

35．设P是定凸四边形$ABCD$内部的点，合于面PAB+面PCD=面PAD+面PBC．求P点的轨迹。

探求：设M、N为对角线AC、BD的中点，则有



图复四—35

面MAB+面MCD=

面MAD+面MBC，

面NAB+面NCD=

面NAD+面NBC．

即M、N是轨迹上的点。

令BA、CD相交于Q，

取$QE=AB$、$QF=CD$，

则 Q、E、F均为定点。

且 面 MAB+面 $MCD=\frac{1}{2}$面 $ABCD$=面 MQE+面 MQF

=面 QEF+面 MEF,

及 面 NAB+面 NCD=面 QEF+面 NEF.

$\therefore$ $MN\parallel FE$.

取MN上任一点P，有

面 PAB+面 PCD=面 QEF+面 $PEF=\frac{1}{2}$面 $ABCD$

故P点的轨迹可能是过M、N的线段 GH，G、H 两点为终止点。（证明略）

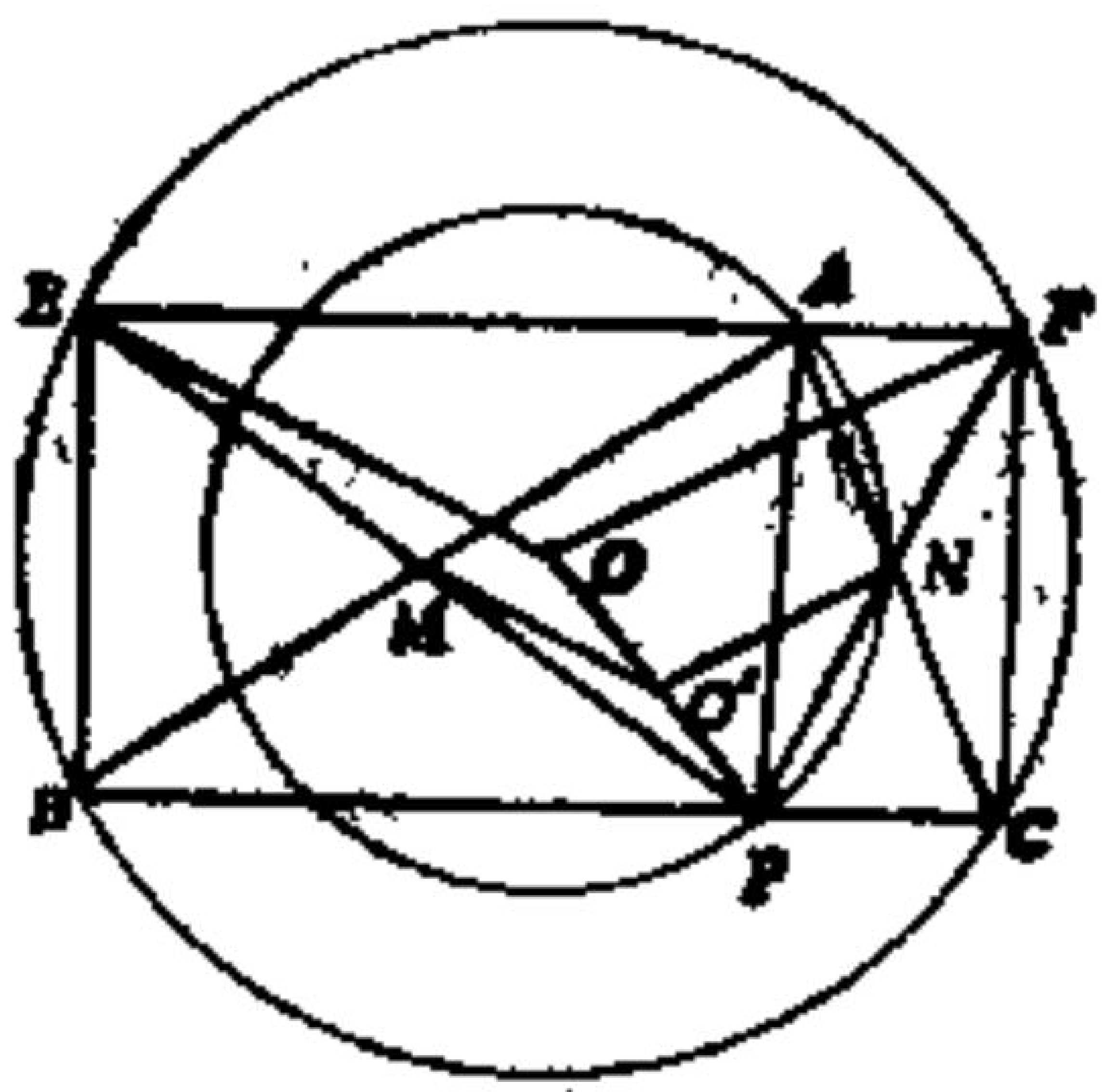
36．已知两同心圆，P是内圆上的定点，A是内圆上的动点，过P且垂直于PA作外圆的弦 BC，求线段 AB 和AC的中点的轨迹。

探求：令外圆半径为R，过A作$EF\perp AP$，则 $APBE$、$APCF$ 均为矩形，且M、N为两矩形的中点。

取 OP 的中点为O'，则O'为定点，且有

$O'M=O'N=\frac{1}{2}R$.

故M、N的轨迹可能是 $\odot O'(\frac{1}{2}R)$.（证明略）



图复四—36

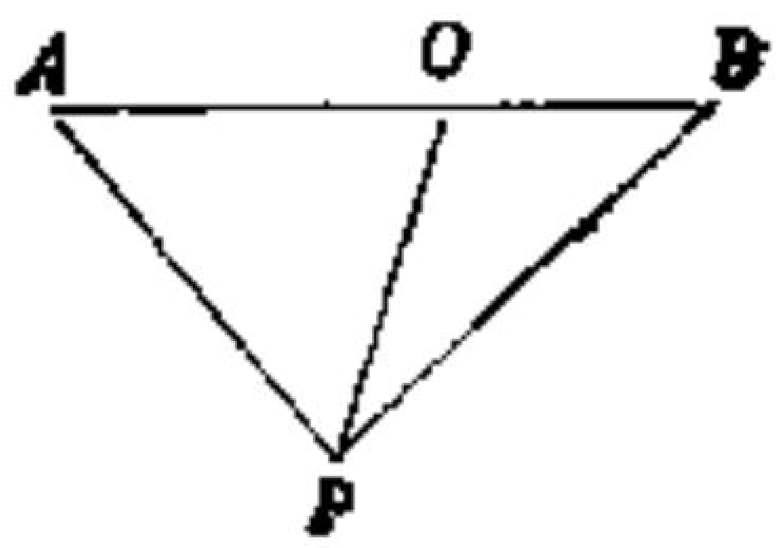
37．设A、B是两定点，P是合于$a\cdot PA^2+b\cdot PB^2=k$的点，其中$a$、$b$、$k$都是常数，求$P$点的轨迹。

探求：在 AB 上取点 O，

使　$AO:OB=b:a$

由习题十八第20题有

$$a\cdot PA^2+b\cdot PB^2=(a+b)OP^2+a\cdot OA^2+b\cdot OB^2=k$$



图复四—37

$\therefore\quad OP^2=\dfrac{k}{a+b}-\dfrac{a\cdot OA^2}{a+b}-\dfrac{b\cdot OB^2}{a+b}$ 为定值，

当 $k-a\cdot OA^2-b\cdot OB^2>0$ 时，

P 点的轨迹为⊙O，其半径为 $\sqrt{\dfrac{k-a\cdot OA^2-b\cdot OB^2}{a+b}}$．

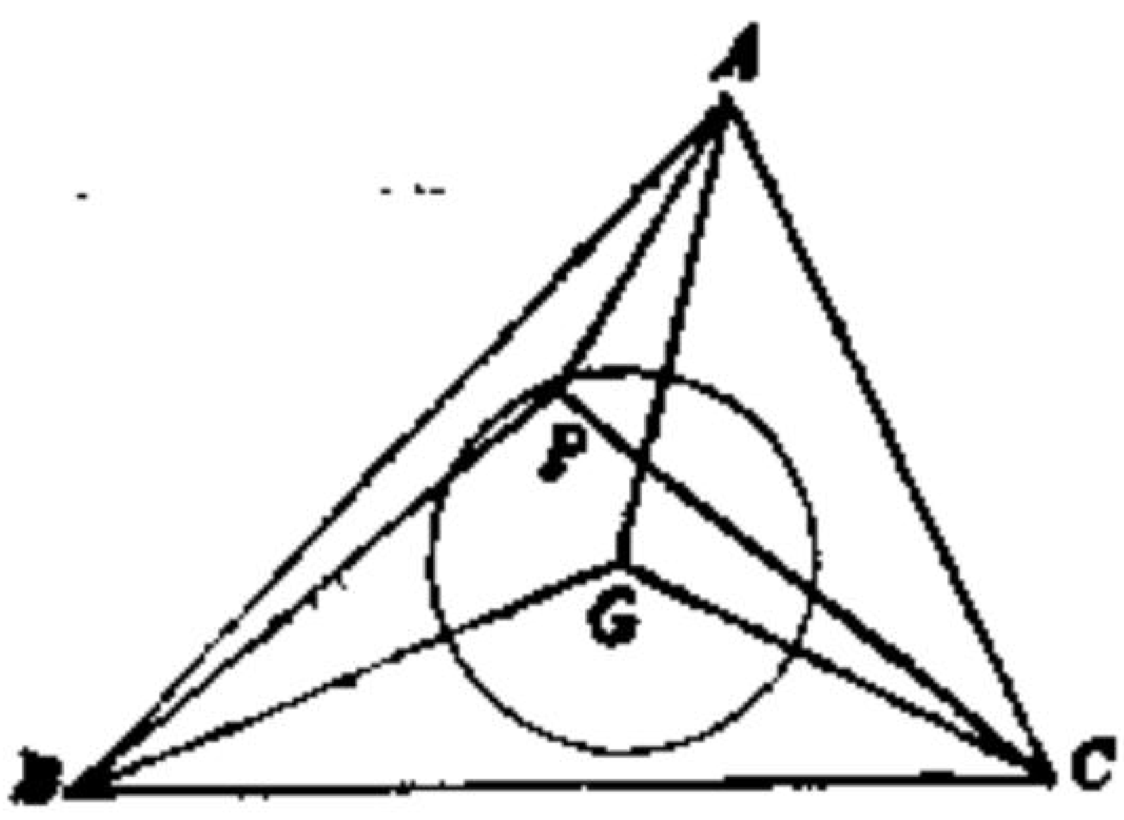
38．设△ABC 是定三角形，P 是合于 $PA^2+PB^2+PC^2=k$ 的点，其中 k 是常数，求 P 点的轨迹。

探求：设 G 是△ABC 的重心，由习题十八第 21 题得：

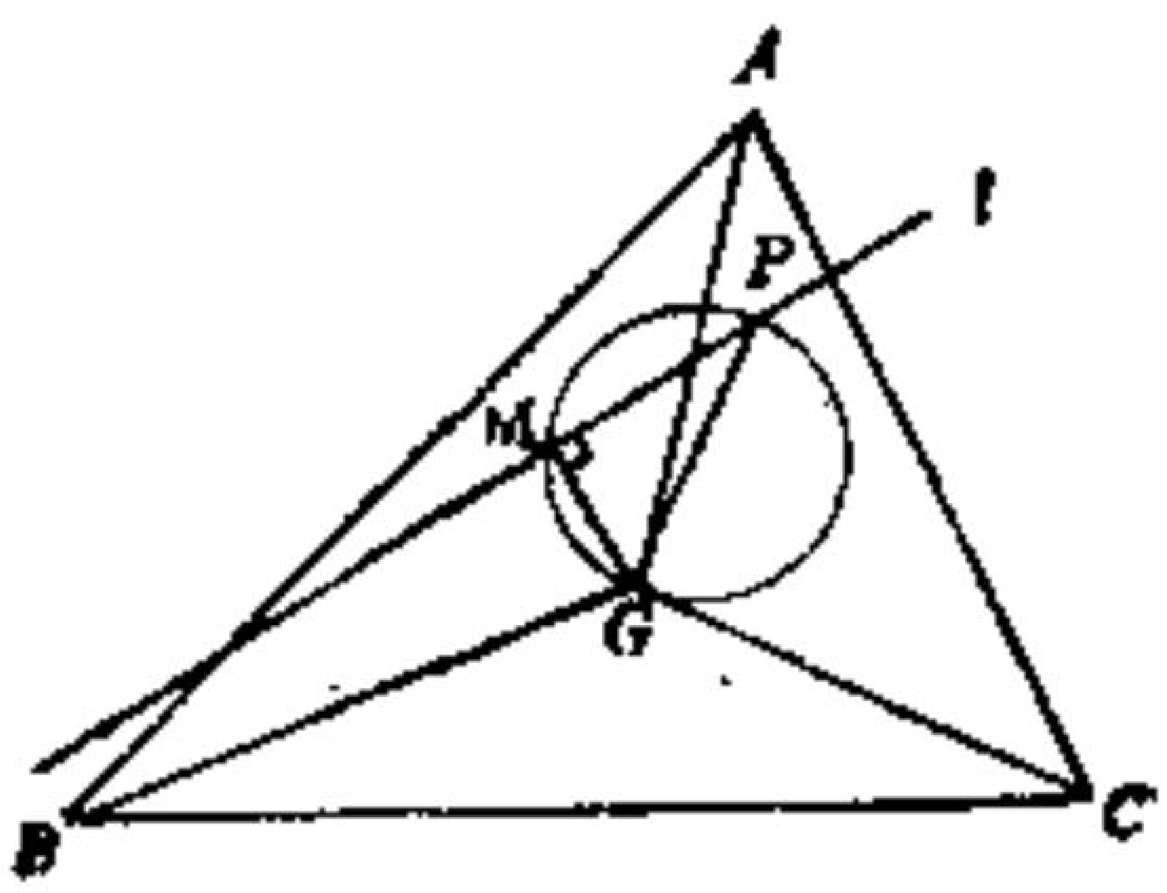
$$PA^2+PB^2+PC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3\cdot GP^2=k,$$

$\therefore\quad GP^2=\dfrac{1}{3}(k-GA^2-GB^2-GC^2)$ 为定值．

故当 $k-GA^2-GB^2-GC^2>0$ 时，P 点的轨迹是以 G 为圆心半径为 $\sqrt{\frac{1}{3}(k-GA^2-GB^2-GC^2)}$ 的圆。（证明略）



图复四—38



图复四—39

39. 已知△ABC及一点P，设l是过P点的直线，M是l上当$MA^2+MB^2+MC^2$极小时的点，求M点的轨迹。

探求：设G为△ABC的重心，由习题十八第21题得：

$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3\cdot GM^2$，

欲使$MA^2+MB^2+MC^2$极小，则需GM极小，故$GM\perp l$。得M点的轨迹是以GP为直径的圆。（证明略）

40. 设△ABC是定三角形，P是合于

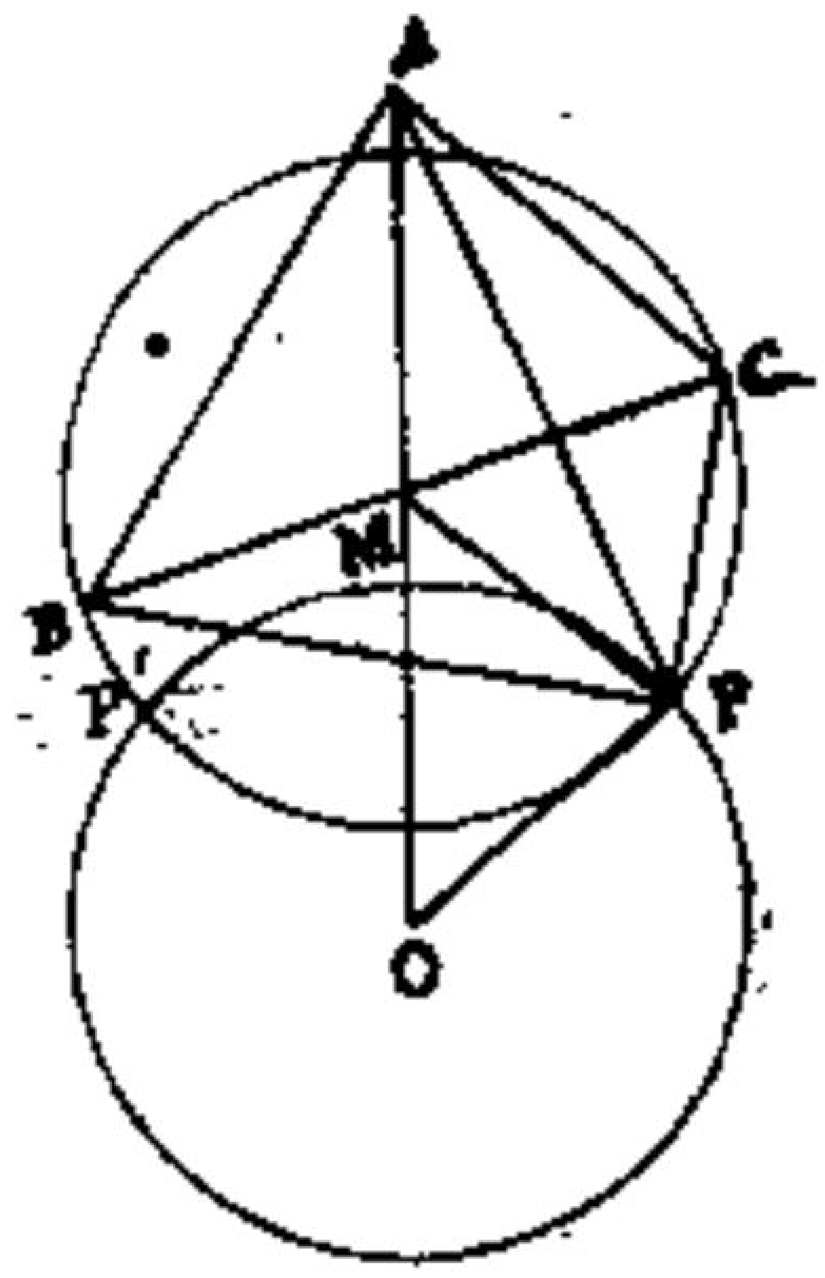
$PA^2=PB^2+PC^2$的点，求P点的轨迹。

探求：以BC为直径作圆，此圆设与以A为圆心，以BC为半径所作之弧相交于P、P'，则P、P'两点满足$PA^2=PB^2+PC^2$。

延长AM至AO，使M为AO的中点，且M为BC的中点，由关于中线的定理131得，

$PB^2+PC^2=2(BM^2+PM^2)$，

$PO^2+PA^2=2(AM^2+PM^2)$。



图复四—40

两式相减得：

$OP^2=2(AM^2-BM^2)$为定值。

当$AM>BM$时，P点的轨迹为以O为圆心以$\sqrt{2(AM^2-BM^2)}$为半径的圆。